Análisis Matemático II
Presentaciones en el Aula

TEMA 2

Ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden

Ejemplo: la caída libre de un cuerpo

¿Se podrá establecer una ecuación diferencial que describa el desplazamiento como función del tiempo de un objeto que cae?

Si no se tiene en cuenta la resistencia del aire, la única fuerza que actúa es la debida a la aceleración de la gravedad.

Ejemplo: la caída libre de un cuerpo

Relación entre desplazamiento, velocidad y aceleración

La velocidad media durante un intervalo de tiempo pude obtenerse determinado la distancia que recorre la partícula en ese intervalo

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad v_{instantánea} = \frac{dx}{dt} \qquad (1)$$

La aceleración media durante un intervalo de tiempo pude interpretarse como el cambio de velocidad que se produce en ese intervalo

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad a_{instantánea} = \frac{dv}{dt} \qquad (2)$$

Combinando (1) y (2) se puede obtener una expresión que relacione el desplazamiento con la aceleración para un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado. En este caso, la aceleración instantánea es constante e igual a g

$$g = -\frac{dv}{dt} = -\frac{d\frac{dx}{dt}}{dt} = -\frac{d^2x}{dt^2}$$

Ejemplo: la caída libre de un cuerpo

Resolviendo la EDO de segundo orden

$g = -\frac{dv}{dt} = -\frac{d\frac{dx}{dt}}{dt} = -\frac{d^2x}{dt^2}$	EDO que relaciona el desplazamiento con la aceleración
$\int g = \int -\frac{d\frac{dx}{dt}}{dt}$	se integra
$\int g\,dt = \int -d\frac{dx}{dt}$	se separan variables
$g.t = -\frac{dx}{dt} + C_1$	resulta una nueva EDO, ahora de primer orden
$\frac{dx}{dt} = -g.t + C_1$	se reagrupan los términos
$\int \frac{dx}{dt} = \int -g.t + C_1$	se integra
$\int dx = \int(-g.t + C_1).dt$	se separan variables
$\boxed{x = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2}$	resulta $x = f(t)$

Solución general del problema

Ejemplo: la caída libre de un cuerpo

Para nombrar a las constantes se puede establecer que cuando $t=0$ se tiene que $C_1=v=v_0$ y que además $C_2=x=x_0$

$$\boxed{x = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + x_0}$$

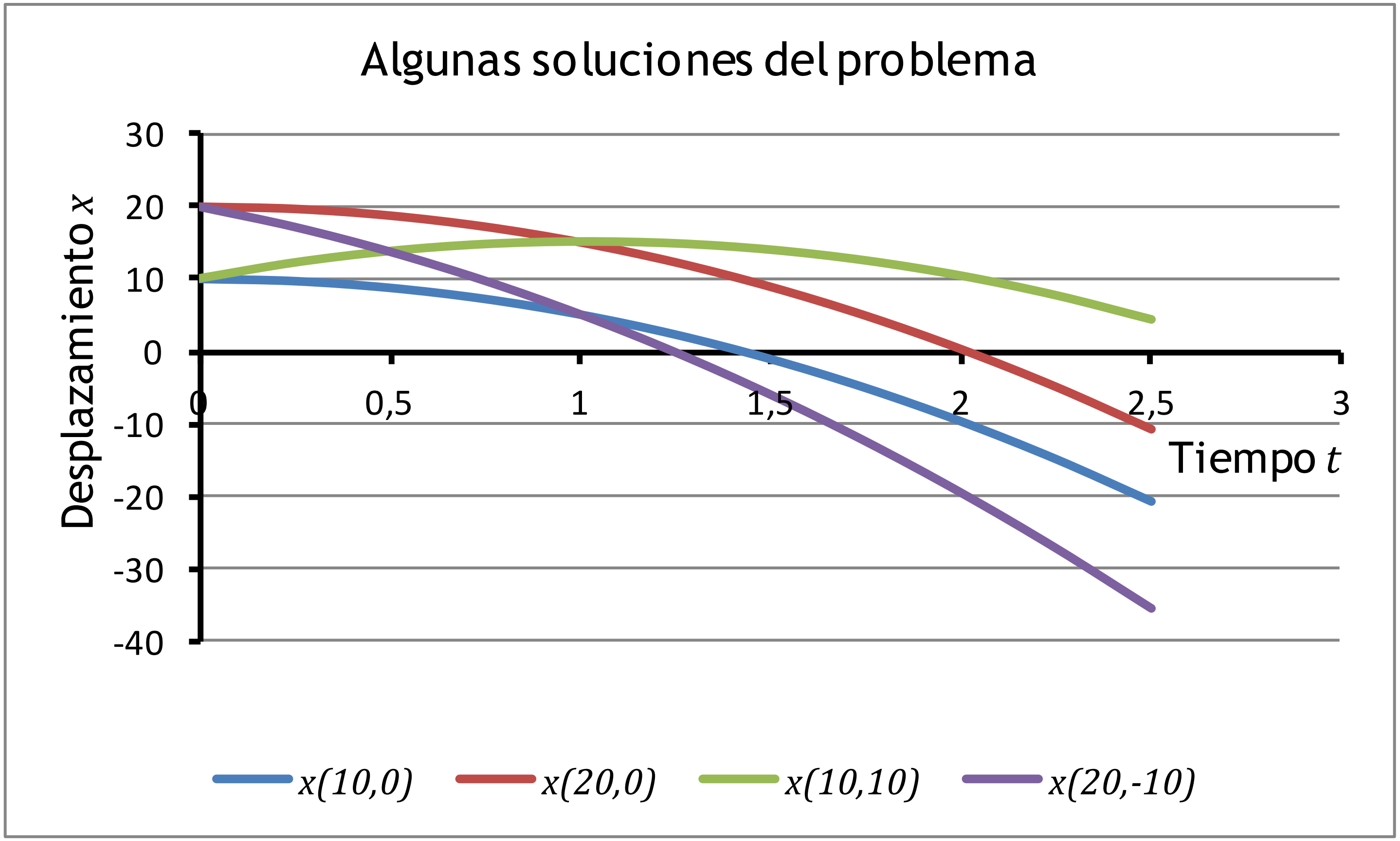
A partir de esta solución general se puede analizar un caso particular. Será necesario conocer dos condiciones: el valor de la función en un punto y el de su derivada en el mismo punto.
Son las "condiciones iniciales". En este caso, los valores de v_0 y de x_0

Por ejemplo si $v_0 = 0$ y $x_0 = 0$ se tiene que

$$\boxed{x = -\frac{1}{2}gt^2}$$

Ejemplo: la caída libre de un cuerpo

Para diferentes condiciones iniciales se obtienen desplazamientos en función del tiempo diferentes, según se ve



Cada una de ellas es una solución particular que surge de la solución general estableciendo dos condiciones iniciales. En este caso desplazamiento y velocidad iniciales.

EDO lineales de segundo orden. Marco conceptual.

Teorema 1: Existencia y unicidad

Sea el problema de valores iniciales

$$\left.\begin{aligned} y'' + p_1(x)\,y' + p_0(x)\,y = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = A_1 \end{aligned}\right\} \qquad [1]$$

si $p_1(x)$ y $p_0(x)$ son funciones continuas en algún intervalo abierto I y $x_0 \in I$, entonces el problema de valores iniciales [1] tiene una solución única $y(x)$ en el intervalo I.

Sea el problema con condiciones de frontera

$$\left.\begin{aligned} y'' + p_1(x)\,y' + p_0(x)\,y = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y(x_1) = y_1 \end{aligned}\right\} \qquad [2]$$

si $p_1(x)$ y $p_0(x)$ son funciones continuas en algún intervalo abierto I y $x_0 ; x_1 \in I$, entonces el problema de valores de frontera [2] tiene una solución única $y(x)$ en el intervalo I.

EDO lineales de segundo orden. Marco conceptual.

Teorema 2: *Principio de linealidad o superposición de las soluciones*

Sea la ecuación diferencial

$$y'' + p_1(x)\,y' + p_0(x)\,y = 0 \qquad [3]$$

Entonces, si $p_1(x)$ y $p_0(x)$ son funciones continuas en algún intervalo abierto I cualquier combinación lineal de dos de sus soluciones en un intervalo abierto I, es también solución de la ecuación dada en I. En especial, para tales ecuaciones, la suma y multiplicación por constantes de las soluciones son a su vez solución de [3].

Para demostrarlo se supone que y_1 e y_2 son soluciones de [3] en un intervalo I. Entonces sustituyendo

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \qquad [4]$$

y sus derivadas en [3] y utilizando las reglas de derivación, se obtiene [5] en la que se verifica que [4] satisface [3]. Esto es, $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ es solución de [3].

$$\begin{aligned} y'' + p_1(x)\,y' + p_0(x)\,y &= \left(C_1 y_1 + C_2 y_2\right)'' + p_1(x)\cdot\left(C_1 y_1 + C_2 y_2\right)' + p_0(x)\cdot\left(C_1 y_1 + C_2 y_2\right) \\ &= C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + p_1(x)\cdot\left(C_1 y_1' + C_2 y_2'\right) + p_0(x)\cdot\left(C_1 y_1 + C_2 y_2\right) \qquad [5] \\ &= C_1\cdot\underbrace{\left(y_1'' + p_1(x)\,y_1' + p_0(x)\,y_1\right)}_{=0} + C_2\cdot\underbrace{\left(y_2'' + p_1(x)\,y_2' + p_0(x)\,y_2\right)}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

EDO lineales de segundo orden. Marco conceptual.

Teorema 3: *Existencia de la solución general*

Si $p_1(x)$ y $p_0(x)$ son funciones continuas en algún intervalo abierto I, la ecuación diferencial [3] tiene una solución general en un intervalo I al que pertenece x. Esta solución general es de la forma

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \qquad [6]$$

donde $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son funciones de x *linealmente independientes*, es decir *no proporcionales* y forman una *base de soluciones* de [3] en I. C_1, C_2 son constantes arbitrarias cuyos valores quedan fijados al establecer condiciones iniciales o de frontera.

Las ecuaciones diferenciales del tipo [3] no tienen soluciones singulares, es decir, soluciones que no se obtienen a partir de la solución general.

EDO lineales de segundo orden. Marco conceptual.

Independencia lineal de funciones

Un conjunto finito de funciones $\{y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)\}$ es linealmente independiente sobre un intervalo abierto I si para que se verifique la ecuación

$$a_1 \cdot y_1(x) + a_2 \cdot y_2(x) + \cdots + a_n \cdot y_n(x) = 0 \qquad [7]$$

resulta necesario que todos los coeficientes a_i sean cero.

Si en cambio la ecuación [7] se verifica para un conjunto de coeficientes a_i no todos nulos, se dice que tal conjunto de funciones no es linealmente independiente.

Para el caso especial donde el análisis se hace sobre dos funciones, la prueba de independencia lineal se puede plantear de una manera sencilla.

Dadas dos funciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$, éstas son linealmente dependientes en un intervalo I donde están definidas si $k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) = 0$ para valores de las constantes k_1, k_2 no simultáneamente nulos.

Entonces, si $k_1 \neq 0$ ó $k_2 \neq 0$ se puede proponer alguno de estos cocientes $y_1 = (-k_2/k_1) \cdot y_2$ ó $y_2 = (-k_1/k_2) y_1$ y analizar su comportamiento.

Si éste resulta una constante, son proporcionales (linealmente dependientes).

$$y_1/y_2 = (-k_2/k_1) = K_1 \quad \Leftrightarrow \quad y_1, y_2 \text{ son linealmente dependientes}$$

$$y_2/y_1 = (-k_1/k_2) = K_2 \quad \Leftrightarrow \quad y_1, y_2 \text{ son linealmente dependientes}$$

Si por el contrario resulta en una función de x, las funciones son no proporcionales (linealmente independientes)

$$y_1/y_2 = u_1(x) \Leftrightarrow y_1, y_2 \text{ son linealmente independientes}$$

$$y_2/y_1 = u_2(x) \quad \Leftrightarrow \quad y_1, y_2 \text{ son linealmente independientes}$$

EDO lineales de segundo orden. Marco conceptual.

Determinante Wronskiano

Para el análisis de la independencia lineal de funciones (así como para muchas otras aplicaciones matemáticas) es útil introducir un determinante particular, llamado Wronskiano, formulado por J. M. Höne Wronski.

Dado un conjunto finito de funciones, $\{y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)\}$ y asumiendo que estas funciones son continuas y derivables $n-1$ veces sobre un intervalo abierto I, se puede generar el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} a_1 \cdot y_1(x) + a_2 \cdot y_2(x) + \cdots + a_n \cdot y_n(x) = 0 \\ a_1 \cdot y_1'(x) + a_2 \cdot y_2'(x) + \cdots + a_n \cdot y_n'(x) = 0 \\ \cdots = 0 \\ a_1 \cdot y_1^{(n-1)}(x) + a_2 \cdot y_2^{(n-1)} + \cdots + a_n \cdot y_n^{(n-1)}(x) = 0 \end{array}\right\} \qquad [8]$$

por sucesivas derivaciones.

El determinante de los coeficientes a_i resulta ser

$$W[y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \qquad [9]$$

EDO lineales de segundo orden. Marco conceptual.

Relación entre el determinante Wronskiano con la independencia lineal de funciones

El conjunto finito de funciones $\{y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)\}$ continuas y derivables $n-1$ veces sobre un intervalo abierto I será linealmente independiente sí y sólo sí su determinante wronskiano no es idénticamente cero en I.

Esta afirmación se debe a que en el sistema [8], la primera de las ecuaciones representa a [7], que es la base del análisis de la proporcionalidad de las funciones consideradas; las restantes ecuaciones del sistema surgen derivando la primera, y por último, de la teoría de las ecuaciones algebraicas resulta que si existe un valor de x en I, por ejemplo $x = x_0$ tal que $W[y_1(x), \cdots, y_n(x)] \neq 0$, entonces en [8] todos los coeficientes $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ deben ser necesaria y simultáneamente cero, lo que implica la independencia lineal de las funciones.

EDO lineales de segundo orden. Marco conceptual.

Teorema 4: *Relaciones entre las EDO de segundo orden lineales homogéneas y no homogéneas*

Considérense las ecuaciones diferenciales como asociadas por sus coeficientes

$$y'' + p_1(x)\,y' + p_0(x)y = r(x) \qquad [10]$$

$$u'' + p_1(x)u' + p_0(x)u = 0 \qquad [11]$$

donde $r(x)$ no es idénticamente nula y $p_1(x)$ y $p_0(x)$ son funciones continuas en algún intervalo abierto I. Entonces:

a) *La diferencia entre dos soluciones de [10] en algún intervalo abierto I es una solución de [11] en I.* Para probarlo, sean y_1 e y_2 soluciones de [10], es decir

$$\left.\begin{array}{l} y_1'' + p_1(x)y_1' + p_0(x)y_1 = r(x) \\ y_2'' + p_1(x)y_2' + p_0(x)y_2 = r(x) \end{array}\right\} \qquad [12]$$

entonces se debe demostrar que la función que resulta de la diferencia entre ambas, o sea $y = y_1 - y_2$ satisface [11]. Derivando y, se tiene

$$y' = y_1' - y_2' \wedge y'' = y_1'' - y_2'' \qquad [13]$$

para luego remplazar en [11], resultando

$$\begin{aligned} y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y &= (y_1'' - y_2'') + p_1(x)\cdot(y_1' - y_2') + p_0(x)\cdot(y_1 - y_2) \\ &= \underbrace{(y_1'' + p_1(x)\cdot y_1' + p_0(x)\cdot y_1)}_{=r(x)} - \underbrace{(y_2'' + p_1(x)\cdot y_2' + p_0(x)\cdot y_2)}_{=r(x)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

que es lo que se quería probar.

EDO lineales de segundo orden. Marco conceptual.

***Teorema 4:** Relaciones entre las EDO de segundo orden lineales homogéneas y no homogéneas*

Considérense las ecuaciones diferenciales como asociadas por sus coeficientes

$$y'' + p_1(x)\,y' + p_0(x)y = r(x) \qquad [10]$$

$$u'' + p_1(x)u' + p_0(x)u = 0 \qquad [11]$$

donde $r(x)$ no es idénticamente nula y $p_1(x)$ y $p_0(x)$ son funciones continuas en algún intervalo abierto I. Entonces:

b) La suma de una solución de [10] y una solución de [11] sobre algún intervalo abierto I es una solución de [10] en I. Para probarlo, sean y y u soluciones de [10] y [11] respectivamente, es decir

$$\left.\begin{aligned} y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y &= r(x) \\ u'' + p_1(x)u' + p_0(x)u &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad [14]$$

entonces se debe demostrar que la función que resulta de la suma de ambas, o sea $\omega = y + u$ satisface [10]. Derivando ω, se tiene

$$\omega = y' + u' \wedge \omega'' = y'' + u'' \qquad [15]$$

para luego remplazar en [10], resultando

$$\begin{aligned} \omega'' + p_1(x)\,\omega' + p_0(x)\,\omega &= (y'' + u'') + p_1(x)\cdot(y' + u') + p_0(x)\cdot(y + u) \\ &= \underbrace{(y'' + p_1(x)\cdot y' + p_0(x)\cdot y)}_{=r(x)} + \underbrace{(u'' + p_1(x)\cdot u' + p_0(x)\cdot u)}_{=0} \\ &= r(x) \end{aligned}$$

que es lo que se quería probar.

EDO lineales de segundo orden. Marco conceptual.

Teorema 5: *Solución general de una EDO no homogénea de segundo orden*

Una solución general de la ecuación no homogénea [10] sobre un intervalo abierto I tiene la forma

$$y(x) = u(x) + z(x) \qquad [16]$$

donde

$$u(x) = C_1 u_1 + C_2 u_2 \qquad [17]$$

es la solución general de la ecuación [11], es decir la homogénea asociada a [10] sobre el intervalo abierto I, mientras que $z(x)$ es una solución cualquiera, *sin constantes arbitrarias*, de [10]. El Teorema 4 parte b) prueba el anterior enunciado.

EDO lineales de segundo orden. Marco conceptual.

__*Teorema 6:* *Existencia de z(x)*__

Sea la ecuación diferencial

$$y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = r(x) \qquad [18]$$

donde $r(x)$ es continua en algún intervalo abierto I y no es idénticamente nula en dicho intervalo y $p_1(x)$ y $p_0(x)$ son funciones continuas en algún intervalo abierto I. Entonces:

$$z(x) = -u_1(x)\int \frac{u_2(x)\cdot r(x)}{W(x)}dx + u_2(x)\int \frac{u_1(x)\cdot r(x)}{W(x)}dx \qquad [19]$$

es una solución sin constantes de [18], en la que las funciones $\{u_1, u_2\}$ forman una base de la solución general de la ecuación diferencial homogénea asociada a [18] y W es el determinante wronskiano de dichas funciones.

Para demostrar que siempre existe $z(x)$ basta recordar en primer lugar que se cumplen las condiciones del Teorema 1, por lo que existe la solución general de la ecuación diferencial homogénea asociada y por lo tanto la base $\{u_1, u_2\}$. Además, el determinante wronskiano de esta base es no nulo para todo $x_0 \in I$. Las integrales existen ya que también $r(x)$ es continua en I por hipótesis.

EDO lineales de segundo orden. Marco conceptual.

Para demostrar cómo se alcanza la fórmula

$$z(x) = -u_1(x)\int \frac{u_2(x)\cdot r(x)}{W(x)}dx + u_2(x)\int \frac{u_1(x)\cdot r(x)}{W(x)}dx \qquad [19]$$

se procede de la siguiente manera: la ecuación homogénea asociada tiene una solución general $u(x) = C_1u_1(x) + C_2u_2(x)$ en el intervalo I. Se remplazan las constantes C_1, C_2 por funciones a determinar, $v(x)$, $w(x)$, de modo tal que la función resultante

$$z(x) = v(x)u_1(x) + w(x)u_2(x) \qquad [20]$$

sea una solución sin constantes de [18] en I.

Para determinar estas funciones se deriva [20], resultando

$$z'(x) = v'(x)u_1(x) + v(x)u_1'(x) + w'(x)u_2(x) + w(x)u_2'(x) \qquad [21]$$

y se establece arbitrariamente una condición proponiendo

$$\boxed{v'(x)u_1(x) + w'(x)u_2(x) = 0} \qquad [22]$$

Entonces se reduce la expresión [21] a

$$z'(x) = v(x)u_1'(x) + w(x)u_2'(x) \qquad [23]$$

Derivando [23] se tiene

$$z''(x) = v'(x)u_1'(x) + v(x)u_1''(x) + w'(x)u_2'(x) + w(x)u_2''(x) \qquad [24]$$

EDO lineales de segundo orden. Marco conceptual.

Sustituyendo [24], [23] y [20] en [18] y agrupando los términos que contienen $v(x)$ y los términos que contienen $w(x)$, resulta

$$\begin{aligned} & v(x)\cdot\underbrace{\left[u_1''(x)+p_1(x)u_1'(x)+p_0(x)u_1(x)\right]}_{=0}+ \\ & +w(x)\cdot\underbrace{\left[u_2''(x)+p_1(x)u_2'(x)+p_0(x)u_2(x)\right]}_{=0}+v'(x)u_1'(x)+w'(x)u_2'(x)=r(x) \end{aligned} \qquad [25]$$

donde las expresiones entre corchetes se anulan porque u_1, u_2 son soluciones de la ecuación homogénea asociada a [18]. Entonces [25] se reduce a

$$\boxed{v'(x)u_1'(x)+w'(x)u_2'(x)=r(x)} \qquad [26]$$

que junto con [22] forman el siguiente sistema lineal, en el que las incógnitas son $v'(x)$ y $w'(x)$:

$$\left.\begin{aligned} v'(x)u_1(x)+w'(x)u_2(x)&=0 \\ v'(x)u_1'(x)+w'(x)u_2'(x)&=r(x) \end{aligned}\right\} \qquad [27]$$

EDO lineales de segundo orden. Marco conceptual.

Resolviendo el sistema [27] resulta

$$\left.v'(x)=\frac{\begin{vmatrix}0 & u_2(x)\\ r(x) & u_2'(x)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}u_1(x) & u_2(x)\\ u_1'(x) & u_2'(x)\end{vmatrix}}=\frac{-r(x)\cdot u_2(x)}{W(x)}=-\frac{u_2(x)\cdot r(x)}{W(x)}\right\} \qquad [28]$$

$$\left.w'(x)=\frac{\begin{vmatrix}u_1(x) & 0\\ u_1'(x) & r(x)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}u_1(x) & y_2(x)\\ u_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}}=\frac{u_1(x)\cdot r(x)}{W(x)}=\frac{u_1(x)\cdot r(x)}{W(x)}\right\} \qquad [29]$$

e integrando se tiene

$$\left.\begin{aligned} v(x)&=-\int\frac{u_2(x)r(x)}{W(x)}\,dx\\ w(x)&=\int\frac{u_1(x)r(x)}{W(x)}\,dx\end{aligned}\right\} \qquad [30]$$

que en [20] produce [19], lo que se quería probar.

Soluciones de las EDO2°OLCC homogéneas.

Son de la forma $y'' + a y' + b y = 0$; en la que a, b son constantes reales. [33]

Una manera de llegar a un procedimiento que logre resolverlas, es partir de considerar la solución de una ecuación lineal homogénea de primer orden con un coeficiente constante $y' + k y = 0$ es, según se vio oportunamente, una función exponencial de la forma $y = e^{-kx}$.

Esto sugiere la idea de probar, como solución para [33] la función $y = e^{\lambda x}$ [40]
en la que λ es un número real.

Partiendo de [40] y considerando que deberíamos encontrar ese número λ tal que [40] satisfaga [33], se determinan sus derivadas, que son $y' = \lambda e^{\lambda x}$ y $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$ [41]

Sustituyendo [40] y [41] en [33], se tiene que $\left(\lambda^2 + a\lambda + b\right) \cdot e^{\lambda x} = 0$ [42]

Como para todo valor de x es $e^{\lambda x} \neq 0$, para que se cumpla [42] necesariamente debe ser
$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$
y, entonces, $y = e^{\lambda x}$ es solución de [33] sí y sólo sí λ es solución de la ecuación cuadrática
$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ [43]

Soluciones de las EDO2°OLCC homogéneas.

Ésta se denomina *ecuación característica o ecuación auxiliar* de [33]. Sus raíces, o sea los valores de λ que la satisfacen son, si existen,

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2-4b}\right)\\ \lambda_2 &= \frac{1}{2}\left(-a-\sqrt{a^2-4b}\right)\end{aligned}\right\} \qquad [44]$$

y las funciones

$$\begin{cases} y_1 = e^{\lambda_1 x} \\ y_2 = e^{\lambda_2 x} \end{cases} \qquad [45]$$

son dos soluciones de la EDO2°OLCC homogénea dada.

Del análisis de [44] se observa que se presentarán tres casos posibles cuando se buscan las soluciones de [43], según sea el signo del discriminante a^2-4b. Las características de λ_1, λ_2 dependerán de cuál caso de esos tres se presente.

Soluciones de las EDO2°OLCC homogéneas.

Ecuaciones diferenciales lineales de 2do orden homogéneas. Solución general			
Ecuación diferencial $y''+ay'+by=0$			
Ecuación característica (e.c.) $\lambda^2+a\lambda+b=0$			$\omega=+\sqrt{b-(1/4)a^2}$
Caso	***Raíces ecuación característica***	***Bases***	***Solución General***
1	**Reales distintas** $\lambda_1=\frac{1}{2}\cdot\left(-a+\sqrt{a^2-4b}\right)$ $\lambda_2=\frac{1}{2}\cdot\left(-a-\sqrt{a^2-4b}\right)$	$e^{\lambda_1 x}$ $e^{\lambda_2 x}$	$y=c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}$
2	**Real doble** $\lambda=-\frac{1}{2}\cdot a$	$e^{-ax/2}$ $x\cdot e^{-ax/2}$	$y=(c_1+c_2x)\cdot e^{-ax/2}$
3	**Complejas conjugadas** $\lambda_1=-\frac{1}{2}\cdot a+i\omega$ $\lambda_2=-\frac{1}{2}\cdot a-i\omega$	$e^{-ax/2}\cdot\cos\omega x$ $e^{-ax/2}\cdot\operatorname{sen}\omega x$	$y=e^{-ax/2}\cdot(A\cdot\cos\omega x+B\cdot\operatorname{sen}\omega x)$

Soluciones de las EDO2°OLCC no homogéneas.

Son de la forma $y'' + ay' + by = r(x)$ en la que a, b son constantes reales. [91]

Se le asocia la ecuación homogénea $u'' + au' + bu = 0$ [92]

Entonces la solución general de [91] se puede expresar siempre como la suma de dos funciones $y = u + z$, donde una es $u = c_1 u_1 + c_2 u_2$ es la solución general de [92] y la otra es z, una solución cualquiera, sin constantes arbitrarias, de [91] tal que $z'' + az' + bz = r(x)$.

A la función z se la suele llamar *"solución sin constantes"* de [91]. Esta solución es parte de la solución general de $y'' + ay' + by = r(x)$, pero no es una de sus soluciones particulares.

Las soluciones particulares de [91] se obtienen asignando valores a las constantes arbitrarias presentes en la solución general.

Cálculo de *z(x)*: Variación de parámetros.

Se encuentra *z(x)* analíticamente aplicando la expresión

$$z(x) = -u_1(x)\int \frac{u_2(x)\cdot r(x)}{W(x)}\,dx + u_2(x)\int \frac{u_1(x)\cdot r(x)}{W(x)}\,dx$$

Donde

$$W(x) = \begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u'_1(x) & u'_2(x) \end{vmatrix} \text{ y } u(x) = C_1u_1 + C_2u_2 \text{ tal que } u'' + au' + bu = 0$$

Soluciones de las EDO2°OLCC no homogéneas.

Ecuación diferencial [91] $y'' + ay' + by = r(x)$		
Ecuación característica de [92] $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$		Se define $\omega = +\sqrt{b - (1/4)a^2}$
Forma de $r(x)$	*Raíces de la ecuación característica*	*Forma a proponer para la solución sin constantes de [91]*
$p_{[m]}(x)$	0 no es raíz	$p_{[m]}(x)$
	0 es raíz simple	$x \cdot p_{[m]}(x)$
	0 es raíz doble	$x^2 \cdot p_{[m]}(x)$
$p_{[m]}(x) \cdot e^{\gamma x}$	γ no es raíz	$p_{[m]}(x) \cdot e^{\gamma x}$
	γ es raíz simple	$p_{[m]}(x) \cdot x \cdot e^{\gamma x}$
	γ es raíz doble	$p_{[m]}(x) \cdot x^2 \cdot e^{\gamma x}$
$p_{[m]}(x) \cdot \cos\omega x$	$\pm i\,\omega$ no son raíces	$p_{[m]}(x) \cdot \cos\omega x + q_{[m]}(x) \cdot \operatorname{sen}\omega x$
$p_{[m]}(x) \cdot \operatorname{sen}\omega x$	$\pm i\,\omega$ son raíces	$x \cdot \left[p_{[m]}(x) \cdot \cos\omega x + q_{[m]}(x) \cdot \operatorname{sen}\omega x\right]$
$e^{\alpha x} \cdot p_{[m]}(x) \cdot \cos\omega x$	$\alpha \pm i\,\omega$ no son raíces	$e^{\alpha x} \cdot \left[p_{[m]}(x) \cdot \cos\omega x + q_{[m]}(x) \cdot \operatorname{sen}\omega x\right]$
$e^{\alpha x} \cdot p_{[m]}(x) \cdot \operatorname{sen}\omega x$	$\alpha \pm i\,\omega$ son raíces	$e^{\alpha x} \cdot x \cdot \left[p_{[m]}(x) \cdot \cos\omega x + q_{[m]}(x) \cdot \operatorname{sen}\omega x\right]$

Referencias:

$p_{[m]}(x)$ representa un polinomio en x de grado m

γ representa un número real.

Facultad de Ingeniería

Análisis Matemático II
Presentaciones en el Aula

TEMA 2

Ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden

Autor: Gustavo Lores

2015