Facultad de Ingeniería

Análisis Matemático II
Presentaciones en el Aula

TEMA 1

Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

Autor: Gustavo Lores

2015

¿Qué es una ecuación diferencial?

Es una **ecuación** que involucra al menos una **derivada** de una **función desconocida** de una o más variables.

La ecuación puede contener más de una función desconocida, una, algunas o todas las variables de las que dependen, una o varias funciones conocidas de dichas variables y constantes definidas.

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x}}$$

Es una ecuación diferencial donde y *es la función desconocida*

No se considerar como ecuaciones diferenciales a las que contienen constantes arbitrarias.

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{x-Cy}{x}}$$

No es una ecuación diferencial

Problemas que se puede resolver planteando una EDO

Cuando se analiza un fenómeno y se busca establecer cómo una variable depende de otra o de otras, es decir, cuando se necesita hallar una ***función*** que represente un ***proceso***.

Se parte de proponer la manera en que varía tal ***función desconocida*** cuando varía la ***variable independiente***.

Por ejemplo

Un tanque de 500 litros de capacidad que estaba lleno con agua potable se contaminó con 15 gramos de cianuro. Para limpiarlo se carga por un conducto agua pura a razón de 5 litros por minuto y por otro se libera el contenido del tanque con el mismo caudal. ¿Después de cuánto tiempo te tomarías un vaso con agua del tanque sin poner en riesgo tu vida?

Una concentración de 100 partes por millón de cianuro en el agua es letal.

Función desconocida: *cantidad de cianuro en el tanque*

Variable independiente: *tiempo*

El caso del tanque

1 ppm en el tanque equivale a 0,5 gramos de cianuro en el tanque

Función desconocida: *Cianuro en el tanque* $\psi(t)$ *[gramos]*

Variable independiente: *tiempo [minutos]*

Pregunta clave: ***¿Cómo varía la cantidad de cianuro*** $\psi(t)$ ***en el tanque?***

¿Entra cianuro al tanque?: ***No*** *¿Sale cianuro del tanque?* ***Si***

¿Cómo se expresa este proceso con un modelo matemático?

Análisis del proceso

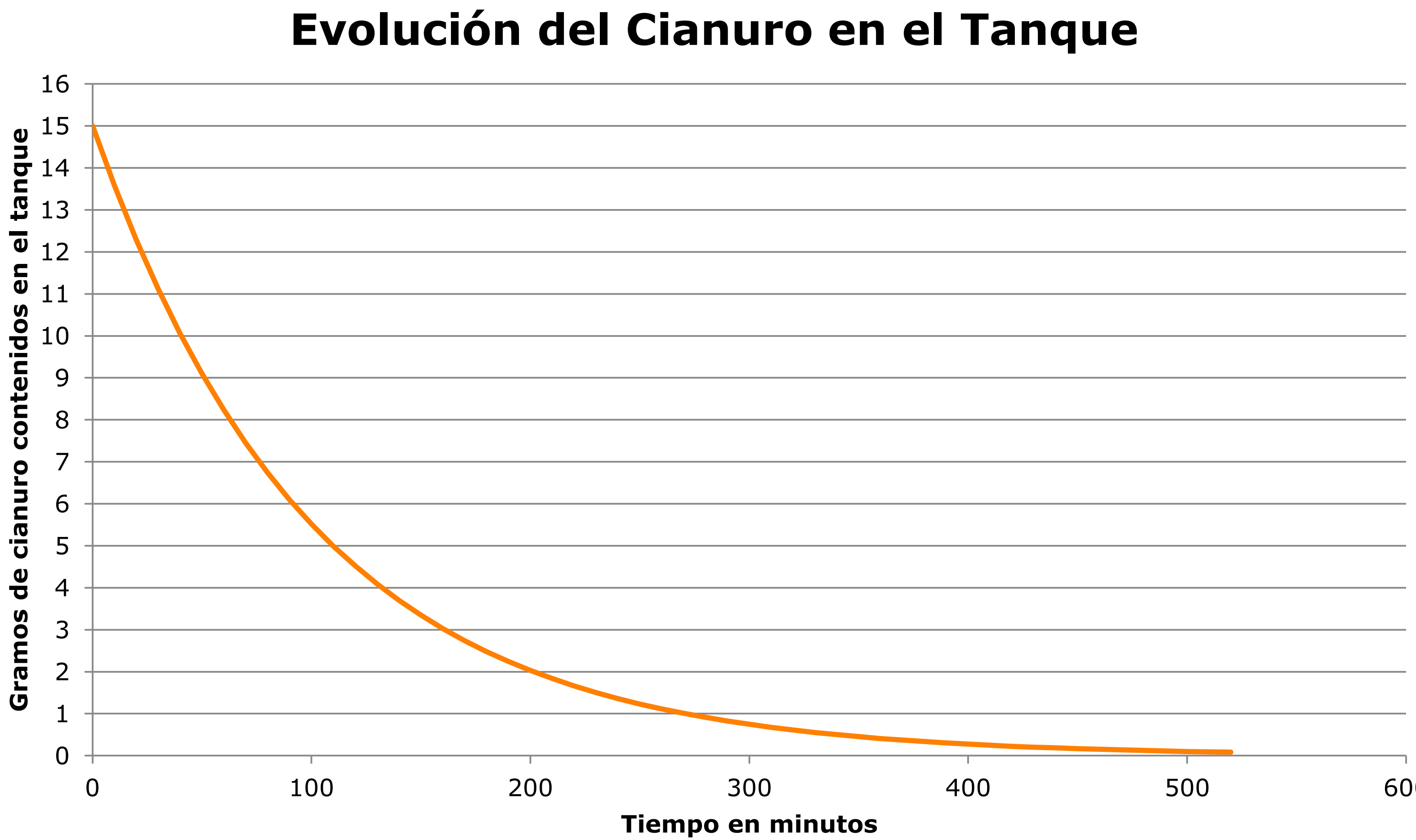
$$\Delta\psi[gramos] = \left\{ \frac{\Psi(t)\,[gramos]}{500\,[litros]} \cdot 5\left[\frac{litros}{minutos}\right] \right\} \cdot \Delta t\,[minutos] \qquad (1)$$

Se llega a la ecuación diferencial

de (1) $\dfrac{\Delta\psi}{\Delta t} = -0{,}01\,\psi$. Ordenando la notación se obtiene la EDO $\boxed{\psi' = -0{,}01\,\psi}$

La solución del caso del tanque

$$\boxed{\psi = 15 \cdot e^{-0{,}01t}}$$

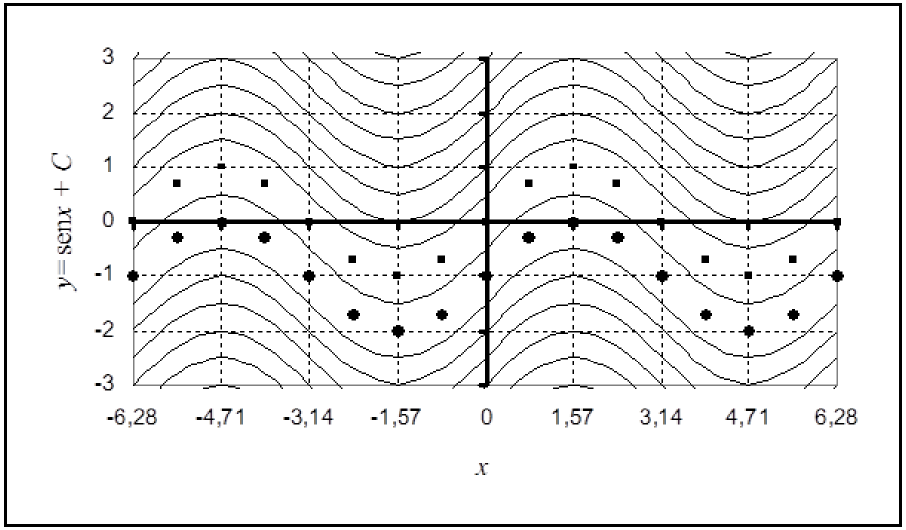


Las soluciones de una ecuación diferencial

Sea la ecuación diferencial $y' = \cos\ x$

La satisfacen todas las curvas pertenecientes a la familia $y = senx + C$

Entre ellas, por ejemplo, las curvas $y = senx$ y $y = senx - 1$



El conjunto de todas las curvas que satisfacen la ecuación diferencial se denomina ***solución general***.

Aquellas curvas de esa familia que cumplen determinados requisitos se conocen como ***soluciones particulares***.

Clasificando Ecuaciones Diferenciales

Expresión	Datos complementarios relativos a la o las funciones desconocidas	Clasificación
$x^2 y''' y' + 2e^x y'' = \left(x^2+2\right)\cdot y^2$	$y = y(x)$	Ecuación diferencial ordinaria de tercer orden.
$\frac{\partial z}{\partial x} + x\cdot z^2 - y\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$	$z = z(x,y)$	Ecuación diferencial en derivadas parciales de segundo orden.
$\left.\begin{array}{l} y\cdot y' - x\cdot z = 1 \\ x^2\cdot z'' - y = 0 \end{array}\right\}$	$\left.\begin{array}{l} y = y(x) \\ z = z(x) \end{array}\right\}$	Sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias con dos funciones incógnitas. La primera es de primer orden, mientras que la segunda es de segundo orden.
$\left.\begin{array}{l} u\cdot v - \partial u/\partial x = y^2 \\ \sqrt{u\cdot v} + \partial v/\partial y = x\cdot y \end{array}\right\}$	$u = u(x,y)$ $v = v(x,y)$	Sistema de dos ecuaciones diferenciales en derivadas parciales con dos funciones incógnitas

Existencia y unicidad de las soluciones particulares de las EDO

$$\left.\begin{aligned} y' &= F(x,y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}\right\}$$

¿Bajo qué condiciones una ecuación diferencial ordinaria presentada como un problema con valores iniciales o con condiciones de frontera tiene al menos una solución?

$F(x,y)$ debe ser continua y acotada en todos los puntos (x,y) dentro de una región del plano R: $|x-x_0|<a,\ |y-y_0|<b$, o sea $|F(x,y)|\le K\ \ \forall\ (x,y)\in R$ para que el problema tiene al menos una solución $y(x)$ definida para todos los valores de x dentro del intervalo $|x-x_0|<\alpha$, donde α es el menor entre los números a y b/K.

$$\left.\begin{aligned} y' &= F(x,y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}\right\}$$

¿Bajo qué condiciones una ecuación diferencial ordinaria presentada como un problema con valores iniciales o con condiciones de frontera tiene como máximo una solución?

$F(x,y)$ y $\partial F/\partial y$ deben ser continuas y acotadas en todos los puntos (x,y) dentro de una región R: $|x-x_0|<a,\ |y-y_0|<b$, o sea $|F(x,y)|\le K \wedge |\partial F/\partial y|\le M\ \ \forall (x,y)\in R$ y el problema con valores iniciales tiene como máximo una solución $y(x)$.

Resolver una Ecuación Diferencial Ordinaria

Resolver una ecuación diferencial de primer orden significa determinar su **solución general**.

Por ejemplo, resolver $y' + 5x^4 y^2 = 0$ **(1)**
significa encontrar funciones $y = y(t, C)$ que la satisfagan.

El resultado es una **familia de curvas** uniparamétrica. En este caso, la solución general de **(1)** es

$$y = \frac{1}{x^5 - C}$$

que se obtiene integrando la ecuación diferencial.

Encontrar una Solución Particular

Cuando de esa familia de curvas se necesita seleccionar una que satisfaga no sólo la ecuación diferencial sino que también pase por determinado punto del plano, esto es que simultáneamente **cumpla una determinada condición inicial** significa que luego de resolver la ecuación diferencial se debe obtener la **solución particular** incorporando la **condición inicial**.

Por ejemplo, resolver $y'+5x^4y^2=0$ y determinar la curva que pasa por el punto **(0,1)** significa determinar **C** a partir de su solución general de tal manera que se cumpla este requisito, produciendo la solución particular

$$y_p=\frac{1}{x^5+1}$$

Orden, constantes arbitrarias y condiciones iniciales de las EDO

Esquema relacional entre orden, constantes arbitrarias y condiciones particulares para ecuaciones diferenciales ordinarias					
Orden de la ecuación diferencial	Forma genérica de la ecuación diferencial	Forma genérica de la solución general	Condiciones dadas necesarias para obtener una solución particular		Forma genérica de la solución particular
			Iniciales	De frontera	
1	$f(x,y,y')=0$	$g(x,y,C_1)=0$	$y(x_0)=y_0$	$y(x_0)=y_0$	$h(x,y)=0$
2	$f(x,y,y',y'')=0$	$g(x,y,C_1,C_2)=0$	$\left.\begin{array}{l} y(x_0)=y_0 \\ y'(x_0)=A_1 \end{array}\right\}$	$\left.\begin{array}{l} y(x_0)=y_0 \\ y(x_1)=y_1 \end{array}\right\}$	$h(x,y)=0$
3	$f(x,y,y',y'',y''')=0$	$g(x,y,C_1,C_2,C_3)=0$	$\left.\begin{array}{l} y(x_0)=y_0 \\ y'(x_0)=A_1 \\ y''(x_0)=A_2 \end{array}\right\}$	$\left.\begin{array}{l} y(x_0)=y_0 \\ y(x_1)=y_1 \\ y(x_2)=y_2 \end{array}\right\}$	$h(x,y)=0$
n	$f(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$	$g(x,y,C_1,\cdots,C_n)=0$	$\left.\begin{array}{lcl} y(x_0) & = & y_0 \\ y'(x_0) & = & A_1 \\ \cdots & = & \cdots \\ y^{(n-1)}(x_0) & = & A_{n-1} \end{array}\right\}$	$\left.\begin{array}{lcl} y(x_0) & = & y_0 \\ y(x_1) & = & y_1 \\ \cdots & = & \cdots \\ y(x_{n-1}) & = & y_{n-1} \end{array}\right\}$	$h(x,y)=0$

Resolviendo Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

7.2. Ecuaciones en las que las variables están separadas

Forma de la ecuación diferencial

$$g(y)\cdot y' = f(x) \qquad [72]$$

donde f y g son funciones continuas y acotadas en una región R: $|x - x_0| < a$, $|y - y_0| < b$.

Función desconocida

$$y(x) \qquad [73]$$

Solución general

Surge de

$$\int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx + C \qquad [74]$$

Procedimiento

Como $y' = dy/dx$, toda ecuación de la forma [72] se puede siempre escribir

$$g(y)\cdot dy = f(x)\cdot dx \qquad [75]$$

en la que las variables están separadas.

Para resolverla se integran ambos miembros con respecto a x, obteniendo

$$\int g(y)\frac{dy}{dx}\,dx = \int f(x)dx + C \qquad [76]$$

y operando en la primera integral, como

$$\frac{dy}{dx}dx \;=\; dy \qquad [77]$$

se obtiene [74]. [78]

Como f y g deben ser funciones continuas, las integrales existen y se pueden evaluar, obteniendo la solución general de [72].

Resolviendo Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

7.3. Ecuaciones diferenciales de variables separables.

Forma de la ecuación diferencial

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right) \qquad [90]$$

donde g es una función continua y acotada en una región R: $|x - x_0| < a$, $|y - y_0| < b$. Como ejemplo de este caso se pueden mencionar $g\left(\frac{y}{x}\right) = (y/x)^3$ o $g\left(\frac{y}{x}\right) = sen(y/x)$.

Función desconocida: $y(x)$ [91]

Procedimiento para obtener la Solución General

En [90] se establece la sustitución $\begin{cases} y/x = u \\ y = x \cdot u \\ y' = u + x \cdot u' \end{cases}$ [92]

reemplazando [92] en [90], se tiene $u + x \cdot u' = g(u)$ [93]

se separan las variables, haciendo $u + x \cdot \dfrac{du}{dx} = g(u)$ [94]

y resulta $\dfrac{du}{g(u) - u} = \dfrac{dx}{x}$ [95]

Integrando ambos miembros de [95] y reemplazando u por y/x se obtiene la solución general de [90]

Resolviendo Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

7.4. Ecuaciones diferenciales lineales

Forma de la ecuación diferencial lineal

$$y' + P(x) \cdot y = Q(x) \qquad [104]$$

Forma de la ecuación diferencial lineal homogénea

$$u' + P(x) \cdot u = 0 \qquad [105]$$

Solución general de [105]

$$u = C\, e^{-\int P(x)\, dx} \qquad [106]$$

Solución general de [104]

$$y = C\, e^{-\int P(x)\, dx} + e^{-\int P(x)\, dx} \cdot \int Q(x)\; e^{\int P(x)\, dx}\; dx \qquad [107]$$

Una aplicación de las Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

8.1. Método para determinar Trayectorias Ortogonales

Cualquier familia de curvas uniparamétrica puede ser interpretada, bajo ciertas condiciones, como la solución general de una ecuación diferencial de primer orden.

La propiedad de ortogonalidad entre dos familias de curvas y y u implica que en cada punto del plano, las curvas de cada familia tienen tangentes de pendientes opuestas e inversas.

O sea que en cada punto del plano $y' = -\dfrac{1}{u'}$

Esto permite establecer el siguiente método para determinar trayectorias ortogonales a una familia de curvas uniparamétrica:

Primer paso:

Determinar la ecuación diferencial de la familia de curvas dadas y en la forma $y' = f(x,y)$.

Segundo paso:

Plantear la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales, aplicando $y' = -\dfrac{1}{u'}$

Tercer paso:

Resolver la ecuación diferencial planteada en u

Análisis Matemático II
Presentaciones en el Aula

TEMA 1

Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

Autor: Gustavo Lores

2015