Facultad de Ingeniería

Análisis Matemático II
Presentaciones en el Aula

TEMA 9

Integrales de línea

Autor: Gustavo Lores

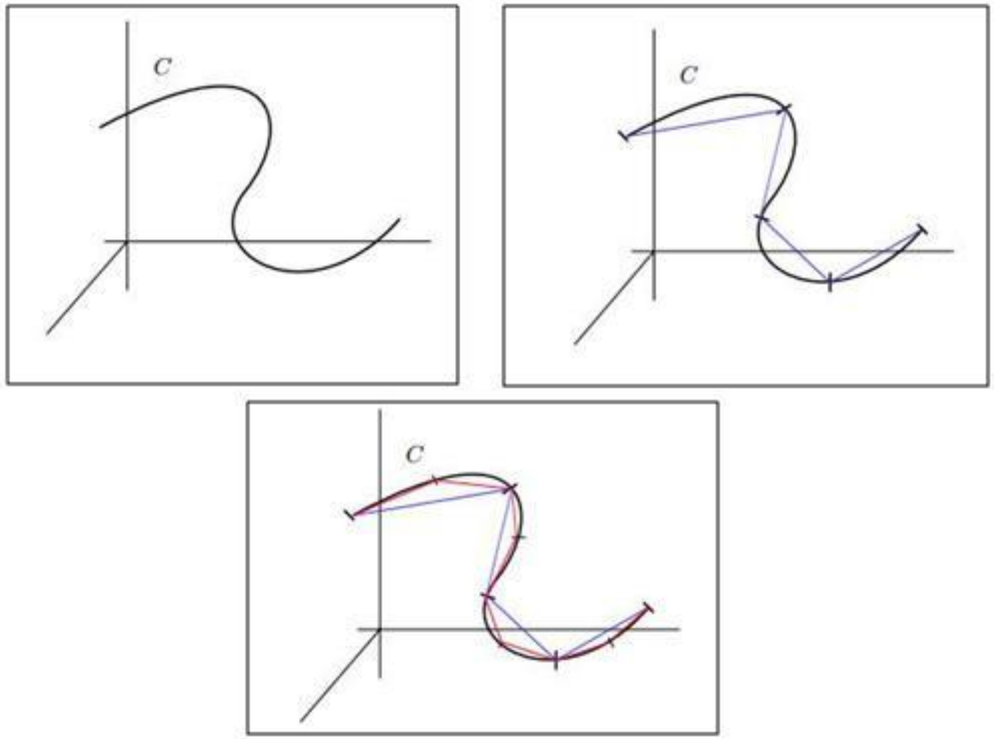
Introducción

Se extiende el concepto de integral definida de funciones reales de una variable real en un sentido diferente al visto en el Tema 7 – Integrales Múltiples.

Se abordará el tema de las integrales de línea o integrales curvilíneas en las que el intervalo de integración que se considera en aquellas se transforma en un camino de integración en el espacio.

Por otra parte, no sólo se van a integrar campos escalares sino también campos vectoriales, en los que este tipo de integrales tienen el mayor número de aplicaciones.

Longitud de una curva en el espacio



Se define una parametrización a través de la función vectorial $\mathbf{r}(t): J \to \mathbb{R}^n$, continua en J, donde $J = [a,b]$ es un intervalo cerrado finito en $\mathbb{R}^1$.

Longitud de una curva en el espacio

Dividiendo el intervalo $J=[a,b]$ en $P=\{a=t_0\leq t_1\leq t_2\leq\cdots\leq t_k=b\}$, se puede aproximar el cálculo de la longitud de arco $\mathbf{r}\left([t_i,t_{i+1}]\right)$ como la longitud del segmento $[\mathbf{r}(t_i),\mathbf{r}(t_{i+1})]$.

Llamando L a la longitud del arco de curva entre dos puntos de la partición, se tiene:

$$L(\mathbf{r}\left([t_i,t_{i+1}]\right))\cong\|\mathbf{r}(t_{i+1})-\mathbf{r}(t_i)\|=\sum_{j=1}^{n}|r_j(t_{i+1})-r_j(t_i)|^2$$

y aplicando el teorema del valor medio a cada diferencia,

$$|r_j(t_{i+1})-r_j(t_i)|=|r_j'(s_i)|\cdot|t_{i+1}-t_i|\text{ con } s_i\in[t_i,t_{i+1}]$$

Si la función derivada $\mathbf{r}'(t)$ es continua es válido suponer que $r_j'(s_i)=r_j'(t_i)$ y

$$\|\mathbf{r}(t_{i+1})-\mathbf{r}(t_i)\|=\sum_{j=1}^{n}|r_j'(t_i)|^2\cdot|t_{i+1}-t_i|^2=\|\mathbf{r}'(t_i)\|\cdot|t_{i+1}-t_i|$$

Y la longitud total de la curva resulta en

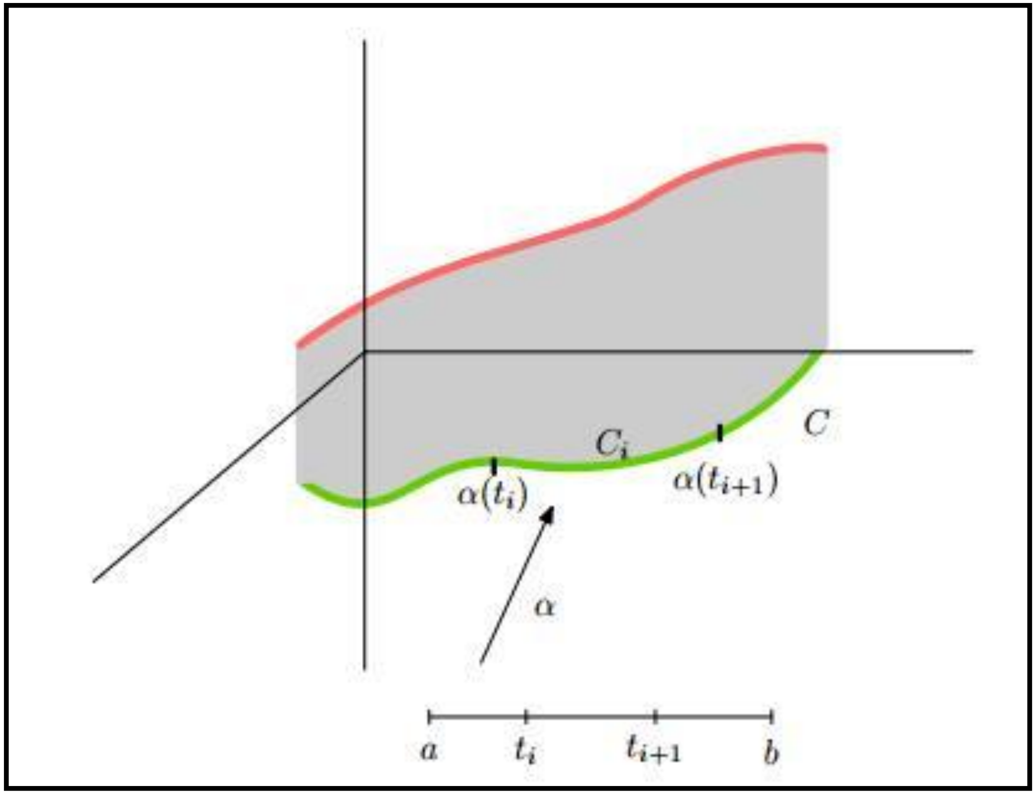
$$L(C)=\sum_{i=0}^{k-1}L(\mathbf{r}([t_i,t_{i+1}]))=\sum_{i=0}^{k-1}\|\mathbf{r}'(t_i)\|\cdot|t_{i+1}-t_i|$$

A medida que las particiones sean cada vez más pequeñas las sumas tienden a la integral que define a de la longitud de C como

$$L(C)=\int_a^b\|\mathbf{r}'(t)\|\,dt$$

Integral de línea de un campo escalar

La curva C queda dividida en una unión de arcos $C_i = \mathbf{r}([t_{i-1}, t_i])$ y la "pared" sombreada en una unión de rectángulos de base C_i y una altura $f[x(t_i), y(t_i)]$.



$$\mathbf{r}(t): J \to \mathbb{R}^2$$

$$J = [a, b]$$

$$P = \{a = t_0 \le t_1 \le t_2 \le \cdots \le t_k = b\}$$

$$\int_C f(x,y) \cdot dC = \int_a^b f[\mathbf{r}(t)] \cdot \|\mathbf{r}'(t)\| \, dt$$

Integral de línea de un campo vectorial

Sea $\mathbf{r}(t)$ un camino regular a trozos en el $n-$espacio definido en un intervalo $[a,b]$, y sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial definido y acotado sobre la gráfica de $\mathbf{r}$. La ***integral de línea*** de $\mathbf{F}$ a lo largo de $\mathbf{r}$ se representa con el símbolo $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ y se define por

$$\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}\left[\mathbf{r}(t)\right] \cdot \mathbf{r}'(t)dt$$

siempre que la integral del segundo miembro exista.

Otras notaciones para las integrales de línea

C representa la gráfica de $\mathbf{r}$; $\mathbf{a} = \mathbf{r}(a)$ y $\mathbf{b} = \mathbf{r}(b)$ representan los extremos de C

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \qquad\qquad \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{F} = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Cuando $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ el camino se llama ***cerrado***

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

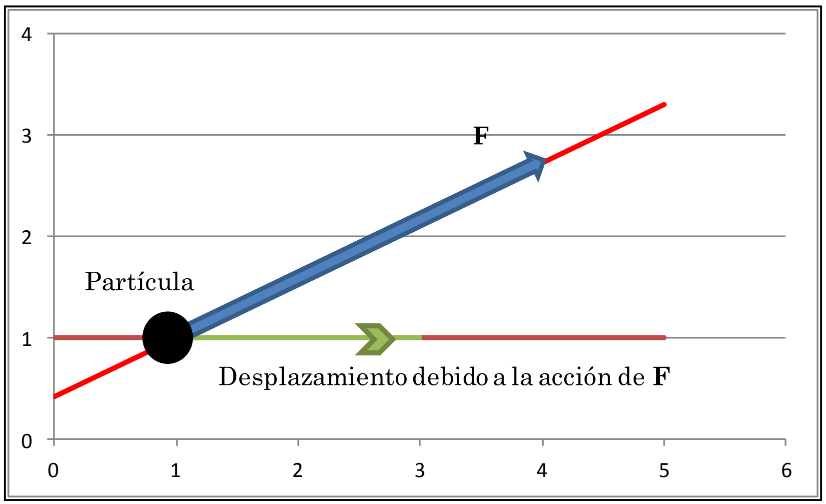
Si $\mathbf{F}$ y $\mathbf{r}$ se representan por sus componentes

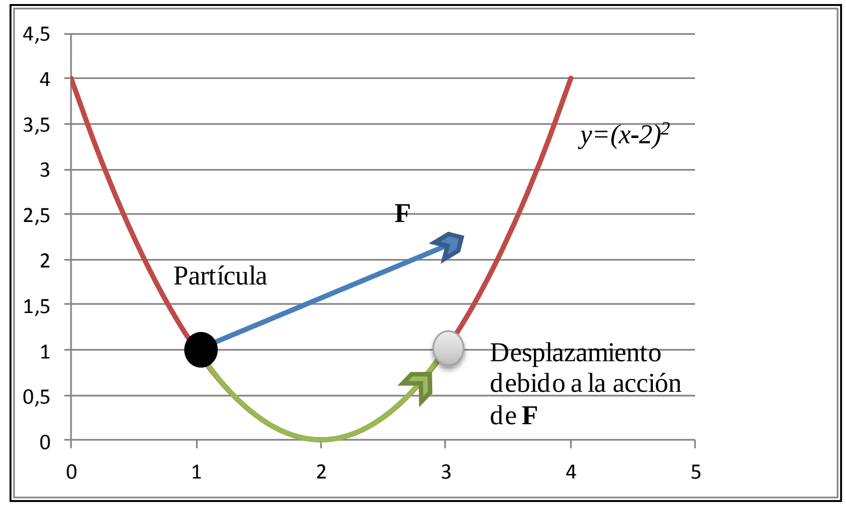
$$\mathbf{F} = (f_1, \ldots, f_n) \quad \mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_n) \qquad\qquad \int f_1 dr_1 + \cdots + f_n dr_n$$

En el caso 2 – dimensional, $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C f_1 dx + f_2 dy = \int_C f_1(x, y)\, dx + f_2(x, y)\, dy$

Trabajo de una fuerza sobre una partícula a lo largo de un camino

$$\mathbf{F} = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\,\hat{\mathbf{i}} + 3 \cdot \frac{1}{2}\,\hat{\mathbf{j}} \equiv \mathbf{F}[\mathbf{r}(t)]$$





$$\begin{cases} \mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + \mathbf{j} \\ 1 \le t \le 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + (t-2)^2\,\mathbf{j} \\ 1 \le t \le 3 \end{cases}$$

Propiedades de las integrales de línea

Linealidad respecto al integrando:

$$\int_C \left[af(x,y)+bg(x,y)\right]\cdot dC = a\int_a^b f[\mathbf{r}\ (t)]\cdot \|\mathbf{r}'\ (t)\|\, dt + b\int_a^b g[\mathbf{r}\ (t)]\cdot \|\mathbf{r}'\ (t)\|\, dt$$

$$\int_C (a\mathbf{f} + b\mathbf{g})\cdot d\mathbf{r} = a\cdot\int_C \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r} + b\cdot\int_C \mathbf{g}\cdot d\mathbf{r}$$

Aditividad respecto al camino de integración:

Sea una curva $C = C_1 \cup C_2$, entonces

$$\int_C f(x,y)\cdot dC = \int_{C_1} f(x,y)\cdot dC + \int_{C_2} f(x,y)\cdot dC$$

$$\int_C \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r}$$

Teorema del Cálculo para integrales de línea

φ campo escalar diferenciable con gradiente continuo $\nabla\varphi$ en un conjunto conectado abierto $S \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces para dos puntos cualesquiera $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ unidos por un camino regular a trozos $\mathbf{r}$ situado en S definido en un intervalo $a \le t \le b$, se tiene que

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \nabla\varphi \cdot d\mathbf{r} = \varphi(\mathbf{b}) - \varphi(\mathbf{a})$$

Demostración:

$$g(t) = \varphi\left[\mathbf{r}(t)\right]$$

$$g'(t) = \nabla\varphi\left[\mathbf{r}(t)\right]\mathbf{r}'(t)$$

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \nabla\varphi \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \nabla\varphi\left[\mathbf{r}(t)\right]\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt$$

Aplicando la regla de la cadena resulta

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \nabla\varphi \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b g'(t)\,dt = g(b) - g(a) = \varphi\left[\mathbf{r}(b)\right] - \varphi\left[\mathbf{r}(a)\right] = \varphi(\mathbf{b}) - \varphi(\mathbf{a})$$

Teorema de Green en el plano

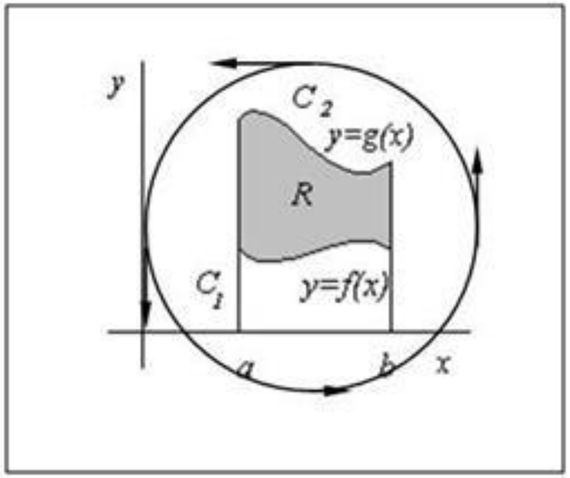
$$\mathbf{f}(x,y)=\mathbf{f}[x(t),y(t)]=P(x,y)\,\hat{\mathbf{i}}+Q(x,y)\,\hat{\mathbf{j}} \qquad P(x,y) \text{ y } Q(x,y) \text{ son derivables}$$

C es una curva regular cerrada y R la unión de C y su interior

$$\oint_C \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r}=\oint_C P\,dx+Q\,dy=\iint_R\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$$

$$\iint_R \frac{\partial Q}{\partial x}dx\,dy=\oint_C Q\,dy \quad (1) \qquad\qquad -\iint_R \frac{\partial P}{\partial y}dx\,dy=\oint_C P\,dx \quad (2)$$

Para regiones **tipo I** se puede demostrar (2)



$$R=\left\{(x,y)\,\middle|\,a\le x\le b\,;\,f(x)\le y\le g(x)\right\}$$

$$\oint_C P\,dx=\int_{C_1}P\,dx+\int_{C_2}P\,dx$$

$$\mathbf{r}(t)=t\,\mathbf{i}+f(t)\,\mathbf{j}$$

$$\int_{C_1}P\,dx=\int_a^b P[t,f(t)]\,dt$$

$$\int_{C_2}P\,dx=-\int_a^b P[t,g(t)]\,dt$$

$$\int_C P\,dx=\int_a^b P[t,f(t)]\,dt-\int_a^b P[t,g(t)]\,dt$$

$$-\iint_R \frac{\partial P}{\partial y}dx\,dy=-\int_a^b\left[\int_{f(x)}^{g(x)}\frac{\partial P}{\partial y}dy\right]dx=\int_a^b\left[\int_{g(x)}^{f(x)}\frac{\partial P}{\partial y}dy\right]dx=\int_a^b P[x,f(x)]dx-\int_a^b P[x,g(x)]dx$$

Análisis Matemático II

Facultad de Ingeniería

UNIVERSIDAD NACIONAL DE JUJUY

FLAMMAM TVAM HOC FOCO ACCENDE

Análisis Matemático II
Presentaciones en el Aula

TEMA 9

Integrales de línea

Autor: Gustavo Lores