Tema 8. Cálculo en campos vectoriales

1. Introducción

En física, geometría y sus aplicaciones en ingeniería, se utilizan dos clases de cantidades: escalares y vectores. Una cantidad *escalar* queda determinada por su magnitud, es decir su número de unidades medida en una escala adecuada. Por ejemplo longitud, temperatura, precio son escalares.

Un *vector* es una cantidad que queda determinada tanto por su magnitud como por su dirección, es decir que se puede representar mediante una flecha o un segmento dirigido. También un vector puede ser representado por sus componentes. Por ejemplo velocidad, fuerza, costo son vectores.

La notación que se utilizará para denotar vectores es letra minúscula negrita: **a**, **b**, **v**, etcétera. Esto es lo habitual en trabajos impresos. En la escritura a mano se pueden caracterizar los vectores mediante flechas, o sea $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{v}$, etcétera.

En el espacio de 2 dimensiones y en el espacio de 3 dimensiones, un vector queda representado por una flecha, que tiene una cola o punto inicial y una punta llamada punto terminal. La longitud de la flecha se llama *norma* de vector, y si el vector es $\mathbf{a}$, su norma se representa $\|\mathbf{a}\|$. Un vector de longitud 1 es un vector unitario.

Los conocimientos previos: componentes de un vector, propiedades de los vectores, norma de un vector, cosenos directores, producto interior, vectores perpendiculares y ortogonales, producto vectorial y triple producto escalar son requeridos para este capítulo.

2. Funciones y campos vectoriales

El cálculo vectorial involucra dos clases de funciones, *funciones vectoriales*, cuyos valores son vectores, como ser

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(P) = \left(u_1(P), u_2(P), u_3(P)\right) \qquad [1]$$

y que dependen del valor de que toma el punto variable P y *funciones escalares* cuyos valores son números (escalares), como ser

$$f = f(P) \qquad [2]$$

que dependen del valor de un punto variable P.

Se dice que una función vectorial define un **campo vectorial** en una región determinada.

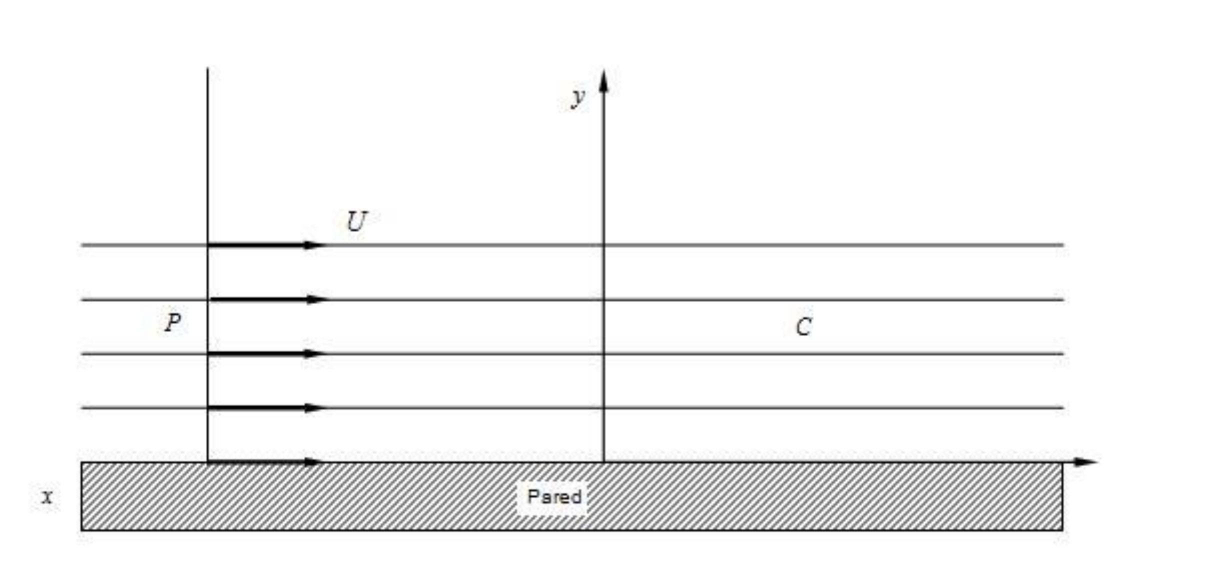
Ejemplo1:

Campo de velocidad de un fluido. Sea un flujo de fluido estacionario y uniforme, tal como aire o agua, a una determinada velocidad U metros/segundo, paralelo a una pared, como se muestra en la figura 1.

Es decir que en cada instante y en cada punto (x,y) de la región $S = \mathbb{R}^2$, comprendida por $(-\infty < x < \infty) \wedge (-\infty < y < \infty)$ la velocidad del fluido $\mathbf{v}$ es igual a $U \cdot \mathbf{i}$, donde U es constante.

Entonces la función vectorial $\mathbf{v} = U \cdot \mathbf{i}$, en la región establecida constituye un campo vectorial. Ya que el flujo es estacionario, cada partícula de fluido que pasa a través del punto P en cualquier instante debe seguir la misma trayectoria, en este caso, la curva C.

Figura 1



3. Límites y continuidad para una función vectorial

Sea $\mathbf{u}=\mathbf{u}(\mathbf{P})=[u_1(\mathbf{P}),\ldots,u_m(\mathbf{P})]$ una aplicación de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, y además $\mathbf{P}\in S\subset\mathbb{R}^n$. Entonces:

$$\lim_{\mathbf{P}\to\mathbf{P}_0}\mathbf{u}(\mathbf{P})=\mathbf{L}\Leftrightarrow \lim_{\mathbf{P}\to\mathbf{P}_0}|\mathbf{u}(\mathbf{P})-\mathbf{L}|=0 \qquad [3]$$

La definición es análoga a la del caso de las funciones escalares y la generaliza: dada una función vectorial $\mathbf{u}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, $\mathbf{P}_0\in S\subset\mathbb{R}^n$ un punto de acumulación en S y $\mathbf{L}\in\mathbb{R}^m$, se dice que $\mathbf{L}$ es el límite de $\mathbf{u}$ cuando $\mathbf{P}$ tiende a $\mathbf{P}_0$ si se puede comprobar que si para cada $\varepsilon>0$ (no importa cuán pequeño) existe un correspondiente $\delta>0$ tal que $|\mathbf{u}(\mathbf{P})-\mathbf{L}|<\varepsilon$ siempre que $0<\|\mathbf{P}-\mathbf{P}_0\|<\delta$. Es decir, $\mathbf{u}(\mathbf{P})$ se puede acercar arbitrariamente a $\mathbf{L}$ haciendo $\mathbf{P}$ suficientemente cercano a $\mathbf{P}_0$.

La continuidad de un campo vectorial se puede definir a partir del vector en su conjunto: se dice que $\mathbf{u}=\mathbf{u}(\mathbf{P})=[u_1(\mathbf{P}),\ldots,u_m(\mathbf{P})]$ es continua en $\mathbf{P}=\mathbf{P}_0$ si existe el límite $\lim_{\mathbf{P}\to\mathbf{P}_0}\mathbf{u}(\mathbf{P})$ y coincide con $\mathbf{u}(\mathbf{P}_0)=[u_1(\mathbf{P}_0),\ldots,u_m(\mathbf{P}_0)]$

Si el valor de $\mathbf{P}$ depende de una sola variable real, por ejemplo t, se dice que $\mathbf{u}(t)$ es función de una variable real, t, y tiene como límite $\mathbf{L}$ a medida que t se aproxima a t_0, si $\mathbf{u}(t)$ está definida en algún entorno de t_0 .

4. Derivada de una función vectorial

Se dice que una función vectorial $\mathbf{u}(t)$ es derivable en un punto t si existe el límite

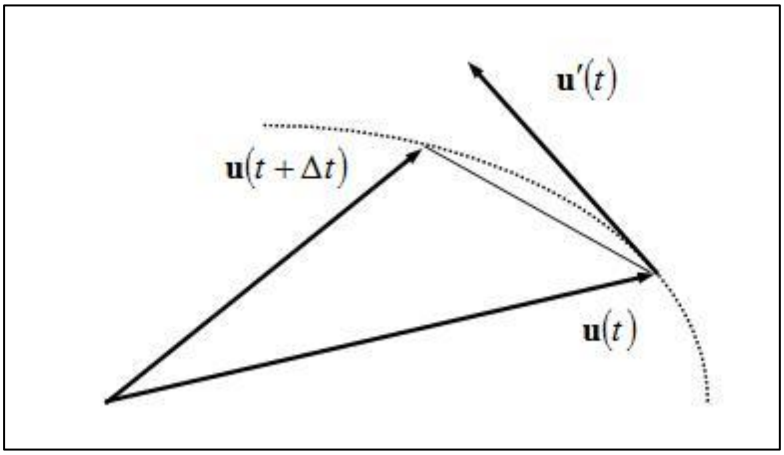
$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{u}(t+\Delta t)-\mathbf{u}(t)}{\Delta t}$$

El vector $\mathbf{u}'(t)$ se denomina la **derivada** de $\mathbf{u}(t)$.

$$\mathbf{u}'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{u}(t+\Delta t)-\mathbf{u}(t)}{\Delta t} \qquad [4]$$

La figura 2 representa gráficamente a los dos vectores mencionados:

Figura 2



En términos de las componentes de un vector en un sistema dado de coordenadas cartesianas, $\mathbf{u}(t)$es diferenciable en un punto t sí y sólo sí sus componentes son diferenciables en t , y, entonces la derivada $\mathbf{u}'(t)$ se obtiene por la derivación de cada componente en forma separada,

$$\mathbf{u}'(t) = [u_1'(t), u_2'(t), \cdots, u_n'(t)] \qquad [5]$$

4.1. Propiedades de la derivada de una función vectorial

Las reglas para la derivación de funciones vectoriales surgen de las reglas conocidas de derivación para funciones escalares. La propiedades generales son:

$(c \cdot \mathbf{u})' = c \cdot \mathbf{u}'$	(Producto por una constante)	[6a]
$(\mathbf{u}+\mathbf{v})' = \mathbf{u}' + \mathbf{v}'$	(Distributiva a la suma)	[6b]
$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})' = \mathbf{u}' \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}'$	(Derivada del producto escalar)	[6c]
$(\mathbf{u} \times \mathbf{v})' = \mathbf{u}' \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{v}'$	(Derivada del producto vectorial)	[6d]
$(\mathbf{uvw})' = (\mathbf{u}'\mathbf{vw}) + (\mathbf{uv}'\mathbf{w}) + (\mathbf{uvw}')$	(Derivada del triple producto escalar)	[6e]
$\mathbf{u}(t) = c \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{u}'(t) = 0 \\ \mathbf{u}'(t) \text{ perpendicular a } \mathbf{u}(t) \end{cases}$	(Derivada de un vector constante)	[6f]

4.2. Derivadas parciales de una función vectorial

Sea que las componentes de una función vectorial

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n) = u_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_1 + u_2 \cdot \hat{\mathbf{e}}_2 + \cdots + u_n \cdot \hat{\mathbf{e}}_n \qquad [7]$$

son funciones diferenciables de n variables $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Entonces la **derivada parcial** de $\mathbf{u}$ respecto de t_1 se indica mediante $\partial \mathbf{u} / \partial t_1$ y se define mediante la función vectorial

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t_1} = \frac{\partial u_1}{\partial t_1} \cdot \hat{\mathbf{e}}_1 + \frac{\partial u_2}{\partial t_1} \cdot \hat{\mathbf{e}}_2 + \cdots + \frac{\partial u_n}{\partial t_1} \cdot \hat{\mathbf{e}}_n \qquad [8]$$

Del mismo modo, las derivadas parciales de orden superior, por ejemplo con respecto a las variables t_i y t_j, se obtienen de acuerdo a:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t_i \partial t_j} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial t_i \partial t_j} \cdot \hat{\mathbf{e}}_1 + \frac{\partial^2 u_2}{\partial t_i \partial t_j} \cdot \hat{\mathbf{e}}_2 + \cdots + \frac{\partial^2 u_n}{\partial t_i \partial t_j} \cdot \hat{\mathbf{e}}_n \qquad [9]$$

y así sucesivamente, se pueden determinar las posibles derivada parciales de orden superior.

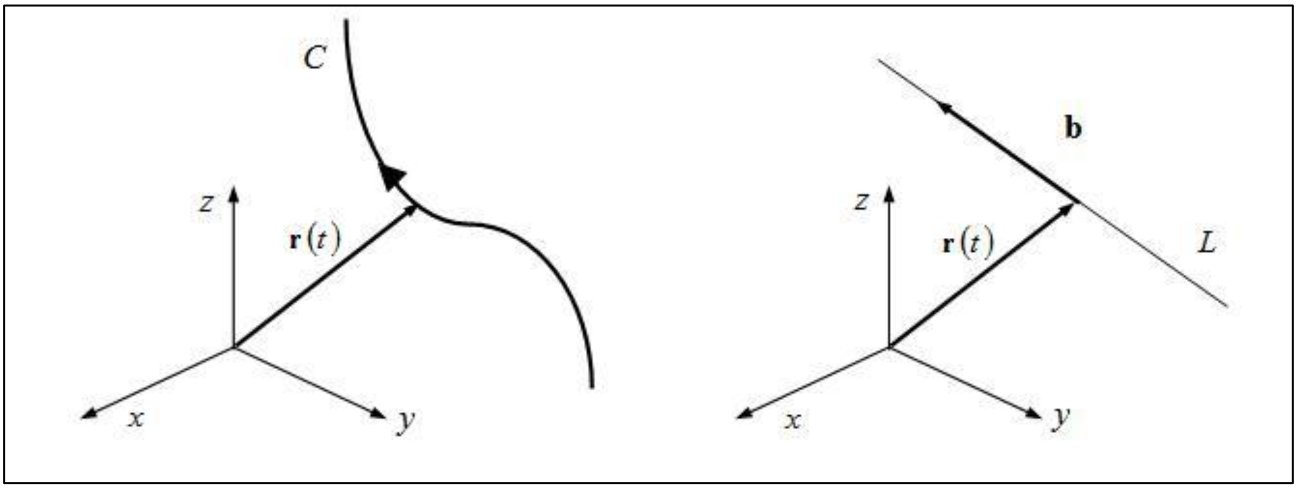
5. Curvas en el espacio. Representación paramétrica.

El estudio de curvas y superficies es el campo de las matemáticas llamado geometría diferencial.

Dado un sistema de coordenadas cartesiano, se puede representar una curva C en el espacio $\mathbb{R}^3$ mediante una función vectorial, como se muestra en la figura 3, proponiendo

$$\mathbf{r}(t) = \left(x(t), y(t), z(t)\right) = x(t) \cdot \mathbf{i} + y(t) \cdot \mathbf{j} + z(t) \cdot \mathbf{k} \qquad [10]$$

Figura 3



Para cada valor t_0 de la variable real t corresponde un punto de C que está dado por el vector posición $\mathbf{r}(t_0)$, de coordenadas $x(t_0)$, $y(t_0)$, $z(t_0)$.

Una representación de la forma [10] se llama **representación vectorial paramétrica** de la curva C, y t se denomina parámetro de esta representación.

El incremento de los valores de t define el sentido positivo de la curva C, que puede indicarse con la punta de una flecha, como en la figura 3.

Por otra parte, los valores decrecientes de t define el sentido negativo de la curva C. De esta forma, se dice que la función $\mathbf{r}(t)$ define una curva orientada.

En la figura también se muestra la representación paramétrica de una línea recta L.

Otra manera de representar una curva C en el espacio es

$$\begin{cases} y = f(x) \\ z = g(x) \end{cases} \qquad [11]$$

en la que $y = f(x)$ es la proyección de C en el plano x, y, mientras que $z = f(x)$ es la proyección de C en el plano x, z.

Un tercer tipo de representación de curvas en el espacio es mediante la intersección de dos superficies

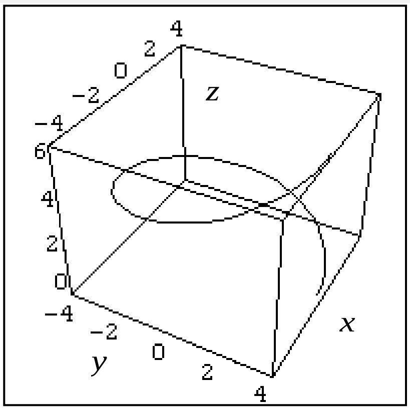
$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases} \qquad [12]$$

Ejemplo 2:

La curva representada en la Figura 4 se llama hélice circular y queda representada por la función vectorial

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \left(a\cdot\cos t\ ,\ a\cdot\operatorname{sen} t\ ,\ c\cdot t\right) \\ &= a\cdot\cos t\cdot\mathbf{i} + a\cdot\operatorname{sen} t\cdot\mathbf{j} + c\cdot t\cdot\mathbf{k} \quad \text{con} \quad a,c\in\mathbb{R}\wedge a,c\neq 0\ ,\ 0\le t\le 2\pi \end{aligned} \qquad [13]$$

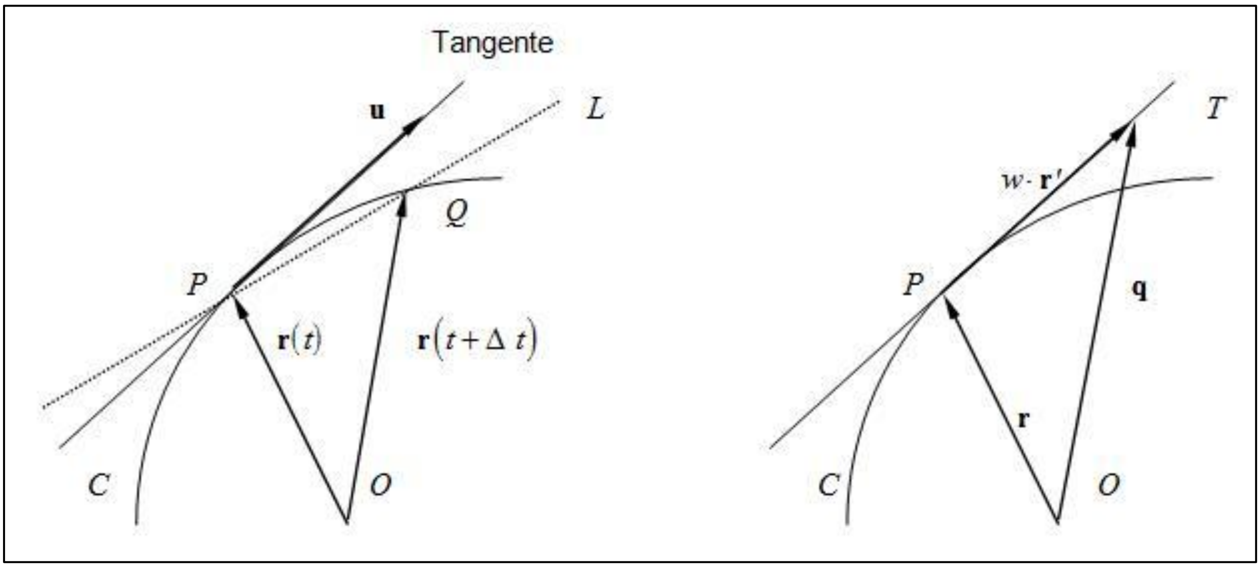
Figura 4



6. Función vectorial tangente a una curva

La tangente a una curva C en un punto P de C es la posición límite de la línea recta L que pasa por P y por un punto Q de C cuando Q se aproxima a P recorriendo C, como se ve en la Figura 5.

Figura 5



Si C viene dada por $\mathbf{r}(t)$, con los puntos P y Q correspondientes a t y a $t+\Delta t$, respectivamente, entonces el vector $(1/\Delta t)\cdot\left[\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)\right]$ tiene la dirección de L y en el límite se convierte en la derivada

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \cdot \left[\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)\right] \qquad [14]$$

siempre que $\mathbf{r}(t)$ sea diferenciable.

Si $\mathbf{r}'(t) \neq 0$, $\mathbf{r}'(t)$ es un ***vector tangente*** a C en P. Normalizando $\mathbf{r}'(t)$ se obtiene el ***vector tangente unitario*** a la curva C en P:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{|\mathbf{r}'|} \cdot \mathbf{r}' \qquad [15]$$

Tanto $\mathbf{r}'$ como $\mathbf{u}$ están orientados en la dirección de t creciente, de modo que su sentido depende de la orientación de C.

Por otra parte y de acuerdo a lo que se ve en la Figura 5, para cualquier valor del parámetro w la función vectorial $\mathbf{q}(w)$ se puede expresar de forma análoga al la que plantea el Teorema del Valor Medio de primer orden para campos escalare, esto es, está dada por:

$$\mathbf{q}(w) = \mathbf{r} + w \cdot \mathbf{r}' \qquad [16]$$

<u>Ejemplo 3:</u>

Determinar la tangente a la elipse $\frac{1}{4}x^2 + y^2 = 1$ en $P = \left(\sqrt{2}\,,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

<u>Resolución:</u>

Las funciones vectoriales que representa a la elipse y su derivada son

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= 2\cos t \cdot \mathbf{i} + \operatorname{sen} t \cdot \mathbf{j} \\ \mathbf{r}'(t) &= -2\operatorname{sen} t \cdot \mathbf{i} + \cos t \cdot \mathbf{j} \end{aligned} \qquad [17]$$

El punto P corresponde a $t = \frac{\pi}{4}$, ya que

$$2\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$$

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

por lo que resulta el vector tangente

$$\mathbf{r}'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \cdot \mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \mathbf{j} \qquad [18]$$

Una aproximación lineal de la elipse, $\mathbf{q}$, está dada por la función:

$$\mathbf{q}(w) = \left(\sqrt{2} \cdot \mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \mathbf{j}\right) + w \cdot \left(-\sqrt{2} \cdot \mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \mathbf{j}\right) = \sqrt{2} \cdot (1-w) \cdot \mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1+w) \cdot \mathbf{j}$$

<u>7. Vector Gradiente de un campo escalar</u>

Dado un campo escalar $f(x_1, \ldots, x_n)$, diferenciable, se define al gradiente como el vector

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\mathbf{e}_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\mathbf{e}_n \qquad [19]$$

Relacionado con el gradiente, se define el operador diferencial nabla

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_1}\,\mathbf{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\,\mathbf{e}_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}\,\mathbf{e}_n \qquad [20]$$

que permite escribir

$$\text{grad } f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\,\mathbf{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\,\mathbf{e}_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\,\mathbf{e}_n \qquad [21]$$

Ejemplo 4:

Determinar el gradiente de $f(x,y,z) = 2x + yz - 3y^2$

Resolución:

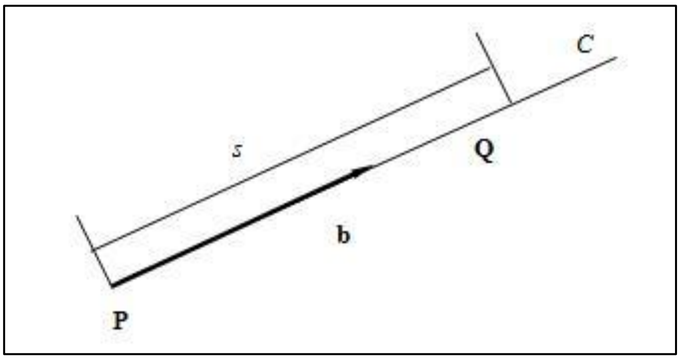
$$\text{grad } f = 2\mathbf{i} + (z-6y)\mathbf{j} + y\mathbf{k}$$

8. Derivada direccional de un campo escalar y su vector gradiente

Sea f un campo escalar, su velocidad de cambio en cualquier punto $\mathbf{P}$ en una dirección dada por un vector $\mathbf{b}$, viene definida por la derivada direccional de f respecto de la dirección de $\mathbf{b}$, con $\|\mathbf{b}\| = 1$, como se vio en el punto 4 del Capítulo 8.

Como notaciones alternativas a la utilizada, es decir a $f'(\mathbf{P}\,;\mathbf{b})$, se tiene también $D_{\mathbf{b}} f = df/ds$, cuya interpretación se ve en la Figura 6:

Figura 6



de la que surge:

$$D_{\mathbf{b}} f = \frac{df}{ds} = \lim_{s\to 0} \frac{f(\mathbf{Q}) - f(\mathbf{P})}{s} \qquad [22]$$

y en la que s es la distancia entre $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$; $\mathbf{Q}$ es un punto variable sobre la recta C en la dirección de $\mathbf{b}$.

Utilizando coordenadas cartesianas, ejemplificando para $n = 3$, la recta C viene dada por la ecuación

$$\mathbf{r}(s) = x(s)\,\mathbf{i} + y(s)\,\mathbf{j} + z(s)\,\mathbf{k} = \mathbf{p_0} + s \cdot \mathbf{b} \qquad [23]$$

con $s \geq 0$, $\|\mathbf{b}\| = 1$ y $\mathbf{p_0}$ la posición del vector $\mathbf{P}$.

Entonces, de [22] se desprende que $D_{\mathbf{b}} f = df/ds$ es la derivada de $f(x(s),y(s),z(s))$ con respecto a s en C.

Suponiendo que f es continua y aplicando la regla de la cadena se obtiene:

$$D_{\mathbf{b}} f = \frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x} x' + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial z} z' \qquad [24]$$

en las que las derivadas respecto de s se toman en $s = 0$.

De [23] se deduce que $\mathbf{r}' = x'\,\mathbf{i} + y'\,\mathbf{j} + z'\,\mathbf{k} = \mathbf{b}$.

Del análisis de [24] se observa que esta expresión resulta del producto interior de $\mathbf{b}$ y el $\text{grad } f$, o sea

$$D_{\mathbf{b}} f = \frac{df}{ds} = \mathbf{b} \cdot \text{grad } f \qquad [25]$$

Esta expresión, válida para un vector $\mathbf{b}$ unitario, se generaliza para cualquier vector $\mathbf{a}$ de cualquier longitud $(\neq 0)$ tomando la forma

$$D_{\mathbf{a}} f = \frac{df}{ds} = \frac{1}{\|\mathbf{a}\|} \cdot \mathbf{a} \cdot \text{grad } f \qquad [26]$$

Ejemplo 5:

Encontrar la derivada direccional de $f(x,y,z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2$, en el punto $\mathbf{P} = (2;1;3)$, en la dirección del vector $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{k}$

Resolución:

Para aplicar [26] se calculan los factores. La norma de $\mathbf{a}$ vale $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{5}$. Luego se determina el vector gradiente

$$\text{grad } f(x,y,z) = 4x\,\mathbf{i} + 6y\,\mathbf{j} + 2z\,\mathbf{k} \qquad [27]$$

y en $\mathbf{P} = (2;1;3)$, se tiene que

$$\text{grad } f = 8\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 6\mathbf{k} \qquad [28]$$

y aplicando [466]

$$D_{\mathbf{a}} f = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (\mathbf{i} - 2\mathbf{k}) \cdot (8\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 6\mathbf{k}) = \frac{1 \cdot 8 - 2 \cdot 6}{\sqrt{5}} = -\frac{4}{\sqrt{5}} \approx -1{,}789 \qquad [29]$$

en la que el signo menos indica que f decrece en la dirección de $\mathbf{a}$.

8.1. El gradiente y la dirección del máximo incremento de un campo escalar

Sea $f(\mathbf{P}) = f(x,y,z)$ un campo escalar continuo con derivadas primeras continuas. Entonces existe $\text{grad } f$ y su longitud y dirección son independientes de la elección particular del sistema de coordenadas.

Si en el punto $\mathbf{P}$ el $\text{grad } f$ no es el vector cero, entonces tiene la dirección del máximo incremento de f en $\mathbf{P}$.

Esta tesis se demuestra a partir de [25] y de la definición de producto interior, ya que se tiene que:

$$D_{\mathbf{b}} f = \|\mathbf{b}\| \cdot \|\text{grad } f\| \cdot \cos\gamma = \|\text{grad } f\| \cdot \cos\gamma \qquad [30]$$

donde γ es el ángulo comprendido entre $\mathbf{b}$ y $\text{grad } f$.

De la expresión [30] se ve que $D_{\mathbf{b}} f$ es máxima cuando $\cos\gamma = 1$, o sea $\gamma = 0$ y entonces $D_{\mathbf{b}} f = \text{grad } f$. En consecuencia, la dirección del vector gradiente es la dirección para la cual la derivada direccional del campo escalar es máxima.

Ejemplo 6:

Sea $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$ y $\mathbf{P} = (2;1)$. Determinar, en este punto, la dirección para la cual la función decrece más rápido.

Resolución:

La dirección buscada es la del vector gradiente en el punto en cuestión. El vector gradiente vale

$$\operatorname{grad} f(x,y) = f_x\,\mathbf{i} + f_y\,\mathbf{j} = \left(3x^2 - 3y^2\right)\mathbf{i} - 6xy\,\mathbf{j} \qquad [31]$$

por lo tanto

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{P}) = \operatorname{grad} f(2,1) = 9\,\mathbf{i} - 12\,\mathbf{j} \qquad [32]$$

Para caracterizar la dirección del vector gradiente, se lo normaliza de modo que sus componentes sean los cosenos directores:

$$\mathbf{u} = \frac{\operatorname{grad} f}{\left\|\operatorname{grad} f\right\|} = \frac{9\,\mathbf{i} - 12\,\mathbf{j}}{\sqrt{81+144}} = \frac{3}{5}\,\mathbf{i} - \frac{4}{5}\,\mathbf{j} \qquad [33]$$

donde $\mathbf{u}$ es un vector unitario con la dirección del $\operatorname{grad} f(\mathbf{P})$, que es la de máxima variación.

Llamando α al ángulo formado por dicha dirección con el eje cartesianos x, se tiene que

$$\cos\alpha = 3/5 \quad \Rightarrow \quad \alpha = -53^\circ 7' 48''$$

que define la dirección buscada.

Para verificar que en esta dirección la función decrece, se evalúa la derivada direccional

$$D_{\mathbf{u}} f = \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} f(\mathbf{P}) = \left(\frac{3}{5}\,\mathbf{i} - \frac{4}{5}\,\mathbf{j}\right) \cdot \left(9\,\mathbf{i} - 12\,\mathbf{j}\right) = \frac{27}{5} - \frac{48}{5} = -4.2$$

8.2. Aplicaciones geométricas del vector gradiente

Otra aplicación del vector gradiente está relacionada con el manejo de superficies S en el espacio, dadas por la fórmula

$$f(x,y,z) = c \quad , \quad c = \text{constante} \qquad [34]$$

Una curva C en el espacio se puede expresar

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k} \qquad [35]$$

Si se establece que la curva C pertenezca a S, sus componentes deben satisfacer [34], o sea

$$f\left(x(t), y(t), z(t)\right) = c \qquad [36]$$

Un vector tangente de C será $\mathbf{r}'(t) = x'(t)\,\mathbf{i} + y'(t)\,\mathbf{j} + z'(t)\,\mathbf{k}$. Si C pertenece a S, este vector es tangente a S.

En un punto fijo $\mathbf{P}$ sobre S, el conjunto de todos los vectores tangentes a cada curva C que pasa por $\mathbf{P}$ y pertenece a S, forman en general un plano, llamado ***plano tangente*** de S en $\mathbf{P}$.

Su normal (la línea recta que pasa por $\mathbf{P}$ y es perpendicular al plano tangente) es la ***recta normal*** de S en $\mathbf{P}$, mientras que cualquier vector paralelo a esta recta se llama ***vector normal a la superficie*** de S en $\mathbf{P}$.

Derivando [36] respecto de un parámetro t, aplicando la regla de la cadena, se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial x}x' + \frac{\partial f}{\partial y}y' + \frac{\partial f}{\partial z}z' = (\operatorname{grad} f)\cdot\mathbf{r}' = 0 \qquad [37]$$

que expresa la ortogonalidad entre el $\operatorname{grad} f(\mathbf{P})$ y todos los vectores $\mathbf{r}'$ contenidos en el plano tangente.

8.3. El gradiente como vector normal a una superficie

Sea una superficie S en el espacio, definida por una función escalar diferenciable representada por $f(x,y,z) = c = \text{constante}$. Entonces si el $\operatorname{grad} f(\mathbf{P})$, con $\mathbf{P} \in S$, no es el vector nulo, es un vector normal a S en $\mathbf{P}$.

<u>*Ejemplo 7:*</u>

Encontrar un vector unitario normal $\mathbf{n}$ al cono de revolución $z^2 = 4\cdot(x^2+y^2)$ en el punto $\mathbf{P} = (1\,;0\,;2)$.

<u>*Resolución:*</u>

El cono es la superficie de nivel $f = 0$ de $f(x,y,z) = 4\cdot(x^2+y^2) - z^2$. En consecuencia, el gradiente queda definido como:

$$\operatorname{grad} f(x,y,z) = 8x\,\mathbf{i} + 8y\,\mathbf{j} - 2z\,\mathbf{k}$$

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{P}) = \operatorname{grad} f(1\,;0\,;2) = 8\,\mathbf{i} - 4\,\mathbf{k} \qquad [38]$$

entonces, de acuerdo a las propiedades del vector gradiente, se tiene que:

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\left\|\operatorname{grad} f(\mathbf{P})\right\|}\cdot\operatorname{grad} f(\mathbf{P}) = \frac{1}{\sqrt{64+16}}\cdot(8\,\mathbf{i} - 4\,\mathbf{k}) = \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{k} \qquad [39]$$

8.4. Campos vectoriales que son gradiente de un campo escalar

Los campos escalares son por lo general más sencillos de manejar que los campos vectoriales.

Cuando una función vectorial $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ puede ser expresada como el gradiente de una función escalar $f(\mathbf{x})$, esta última recibe el nombre de ***función potencial*** o bien ***potencial*** de tal función vectorial $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ y se dice que tal campo vectorial $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ es ***conservativo.***

Por ejemplo, en el campo gravitatorio que es conservativo, la energía sólo se transforma, no aumenta ni disminuye. Al desplazarse un cuerpo desde un punto $\mathbf{P}$ hacia otro punto dentro del campo vectorial y volver a $\mathbf{P}$ no se gana ni se pierde energía.

<u>9. Divergencia de un campo vectorial</u>

Sea $\mathbf{v}(x,y,z)$ un campo vectorial derivable, donde x,y,z son coordenadas cartesianas, y sean $v_1\,;v_2\,;v_3$ las componentes de $\mathbf{v}$. Entonces se define la función

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} \qquad [40]$$

Que se llama ***divergencia*** de $\mathbf{v}$, o la ***divergencia del campo vectorial*** definido por $\mathbf{v}$. Una notación común para la divergencia de $\mathbf{v}$ es $\nabla \cdot \mathbf{v}$.

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\,\mathbf{k} \right) \cdot \left(v_1\,\mathbf{i} + v_2\,\mathbf{j} + v_3\,\mathbf{k} \right) = \\ &= \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} \end{aligned} \qquad [41]$$

Ejemplo 8:

Determinar la divergencia de $\mathbf{v} = 3xz\,\mathbf{i} + 2xy\,\mathbf{j} - yz^2\,\mathbf{k}$.

Resolución:

Aplicando [41], resulta $\operatorname{div} \mathbf{v} = 3z + 2x - 2yz$

9.1. Invariancia de la divergencia

Los valores de $\operatorname{div} \mathbf{v}$ no dependen del sistema de coordenadas cartesiano seleccionado. Esto es, sólo depende de $\mathbf{v}$ y del punto en el que se evalúa.

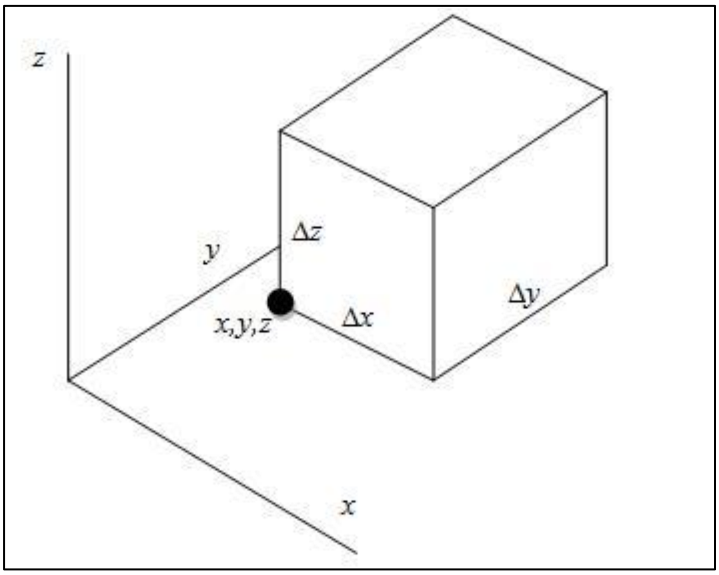
9.2. Significado de divergencia. Movimiento de un fluido compresible

Se considera el movimiento de un fluido en una región $\Re$ en la cual no hay fuentes ni pérdidas.

En los fluidos compresibles, como gases y vapores, la densidad ($\rho =$ masa por unidad de volumen) depende en general de las coordenadas x, y, z en el espacio (y puede depender del tiempo).

Se considera el flujo de un fluido compresible a través de una pequeña caja rectangular W de dimensiones Δx; Δy; Δz, con aristas paralelas a los ejes coordenados. W tiene el volumen $\Delta V = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$, como se representa en la Figura 7.

Figura 7



Sea $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) = v_1\,\mathbf{i} + v_2\,\mathbf{j} + v_3\,\mathbf{k}$ el vector que representa la velocidad del movimiento y se fija la masa que se mueve, por unidad de superficie, como:

$$\mathbf{u} = \rho\,\mathbf{v} = (u_1, u_2, u_3) = u_1\,\mathbf{i} + u_2\,\mathbf{j} + u_3\,\mathbf{k} \qquad [42]$$

Se supone que tanto $\mathbf{v}$ como $\mathbf{u}$ son funciones vectoriales de x, y, z, t derivables con continuidad.

Se calcula el cambio en la masa contenida en W considerando el flujo a través de los límites, es decir la pérdida de masa total por unidad de tiempo.

Se considera el flujo a través de la cara izquierda de W, cuyo área es $\Delta x \cdot \Delta z$. Las componentes v_1, v_3 de $\mathbf{v}$ son paralelas a esta cara y no contribuyen en este flujo, de manera que la masa de fluido que entra a través de esta cara durante un pequeño intervalo de tiempo Δt es aproximadamente igual a

$$\left(\rho v_2\right)_y \, \Delta x \, \Delta z \, \Delta t = \left(u_2\right)_y \, \Delta x \, \Delta z \, \Delta t \qquad [43]$$

donde el subíndice y indica que esta expresión se refiere a la cara izquierda.

La masa de fluido que deja la caja W a través de la cara opuesta durante el mismo intervalo de tiempo es aproximadamente $\left(u_2\right)_{y+\Delta y} \, \Delta x \, \Delta z \, \Delta t$, donde el subíndice $y + \Delta y$ indica que esta expresión se refiere a la cara derecha. La diferencia

$$\Delta u_2 \, \Delta x \, \Delta z \, \Delta t = \frac{\Delta u_2}{\Delta y} \Delta V \, \Delta t \qquad ; \qquad \left[\Delta u_2 = \left(u_2\right)_{y+\Delta y} - \left(u_2\right)_y\right] \qquad [44]$$

es aproximadamente la pérdida de masa. Considerando los otros dos pares de caras paralelas de W y sumando estas tres expresiones, se encuentra que la pérdida total de masa en W durante el intervalo de tiempo Δt es aproximadamente igual a

$$\left(\frac{\Delta u_1}{\Delta x} + \frac{\Delta u_2}{\Delta y} + \frac{\Delta u_3}{\Delta z}\right) \Delta V \, \Delta t \qquad [45]$$

en la que

$$\left[\Delta u_1 = \left(u_1\right)_{x+\Delta x} - \left(u_1\right)_x\right] \quad ; \quad \left[\Delta u_3 = \left(u_3\right)_{z+\Delta z} - \left(u_3\right)_z\right] \qquad [46]$$

La pérdida de masa en W se debe a la variación de la densidad en el tiempo y es igual a

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot \Delta V \cdot \Delta t \qquad [47]$$

Igualando [45] con [47], dividiendo la ecuación resultante por $\Delta V \cdot \Delta t$ y aproximando Δx ; Δy ; Δz ; Δt a 0, se obtiene

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \operatorname{div}\left(\rho \cdot \mathbf{v}\right) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \qquad [48]$$

o sea

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho \cdot \mathbf{v}\right) = 0 \qquad [49]$$

Esta relación importante se denomina *condición para la conservación de la masa* o ***ecuación de continuidad*** del *flujo de un fluido compresible.*

Si el flujo es *estacionario*, es decir independiente del tiempo, entonces $\partial \rho / \partial t = 0$ y la ecuación de continuidad es

$$\operatorname{div}\left(\rho \cdot \mathbf{v}\right) = 0 \qquad [50]$$

Si la densidad es constante, de manera que el fluido es incompresible, la ecuación anterior se expresa $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ [51]

Esta relación se conoce como la ***condición de incompresibilidad***. Expresa el hecho de que el balance de entrada y salida para un dado elemento de volumen es cero en todo momento.

10. Rotor de un campo vectorial

Sea un sistema de coordenadas cartesianas, se establece $\mathbf{v}(x, y, z) = v_1\,\mathbf{i} + v_2\,\mathbf{j} + v_3\,\mathbf{k}$ una función vectorial derivable. Entonces la función

$$\operatorname{rotor} \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \qquad [52]$$

$$= \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

se llama ***rotor*** de *la función vectorial* $\mathbf{v}$ o ***rotor*** *del campo vectorial definido por* $\mathbf{v}$.

Ejemplo 9:

Determinar $\operatorname{rotor} \mathbf{v}$, si $\mathbf{v} = yz\,\mathbf{i} + 3zx\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$

Resolución:

Resolviendo [52]

$$\operatorname{rotor} \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ yz & 3zx & z \end{vmatrix} = -3x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + (3z - z)\,\mathbf{k} = -3x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + 2z\,\mathbf{k}$$

10.1. Interpretación física del rotor de una función vectorial

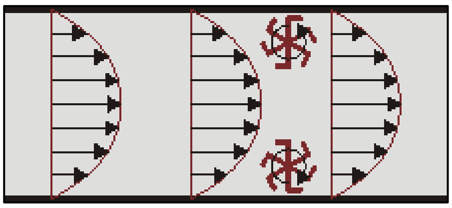
El rotacional o rotor es un operador vectorial que muestra la tendencia de un campo vectorial a inducir rotación alrededor de un punto.

Aunque el que el rotacional de un campo alrededor de un punto sea distinto de cero no implica que las líneas de campo giren alrededor de ese punto y lo encierren.

Por ejemplo, el campo de velocidades de un fluido que circula por una tubería (conocido como perfil de Poiseuille, Figura 8) posee un rotacional no nulo en todas partes, salvo en el eje central, pese a que la corriente fluye en línea recta:

La idea es que si colocamos una rueda de paletas infinitamente pequeña en el interior del campo vectorial, esta rueda girará, aunque el campo tenga siempre la misma dirección, debido a la diferente magnitud del campo a un lado y a otro de la rueda.

Figura 8



En la rotación de un cuerpo rígido, el rotor del campo velocidad tiene la dirección del eje de rotación, y su magnitud es dos veces la velocidad angular de la rotación.