Análisis Matemático II
Presentaciones en el Aula

TEMA 6

Estudio de Funciones de dos Variables

Introducción

En este curso el estudio de funciones de dos variables independientes se centra en el análisis de sus ***puntos críticos***.

Se denomina habitualmente ***punto crítico*** a un punto del dominio que genera que el ***plano tangente a la superficie que representa a la función sea horizontal***.

Dentro de los puntos críticos del dominio de una función, resulta de especial interés identificar aquellos que la hacen tomar sus ***máximos valores*** o sus ***mínimos valores***, ya sea en un entorno del punto del dominio o en todo el dominio.

Este tipo de análisis, normalmente se conoce, en forma simplificada, como el ***estudio de los máximos y los mínimos por los que pasa la función***.

Máximos y mínimos de funciones de dos variables. Definición

Sea $f(x,y)$ con $(x,y)\subseteq S\in\mathbb{R}^2$, donde S se interpreta como la región donde se estudia la función. Sea (x_0,y_0) un punto de S, se define que:

2.1. Máximo relativo

$f(x,y)$ pasa por un ***máximo local (o relativo)*** en el punto $(x_0,y_0)\subseteq S$ si $f(x,y)\leq f(x_0,y_0)$ para todo (x,y) en un entorno de (x_0,y_0).

2.2. Mínimo relativo

$f(x,y)$ pasa por un ***mínimo local (o relativo)*** en el punto $(x_0,y_0)\subseteq S$ si $f(x,y)\geq f(x_0,y_0)$ para todo (x,y) en un entorno de (x_0,y_0).

2.3. Máximo absoluto

$f(x,y)$ pasa por un ***máximo absoluto*** en el punto $(x_0,y_0)\subseteq S$ si $f(x,y)\leq f(x_0,y_0)$ para todo $(x,y)\subseteq S$.

2.4. Mínimo absoluto

$f(x,y)$ pasa por un ***mínimo absoluto*** en el punto $(x_0,y_0)\subseteq S$ si $f(x,y)\geq f(x_0,y_0)$ para todo $(x,y)\subseteq S$.

Ejemplos gráficos

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$$

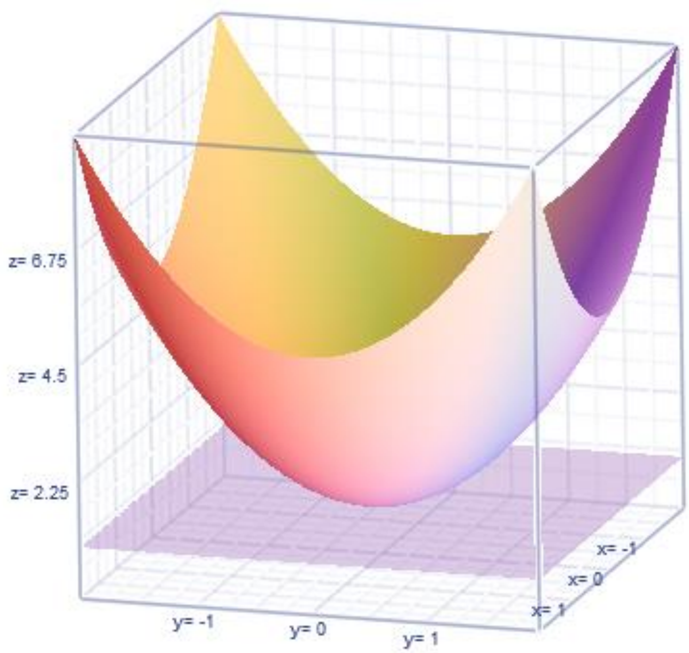
Mínimo en $(x,y)=(x_0,y_0)=(0,0)$

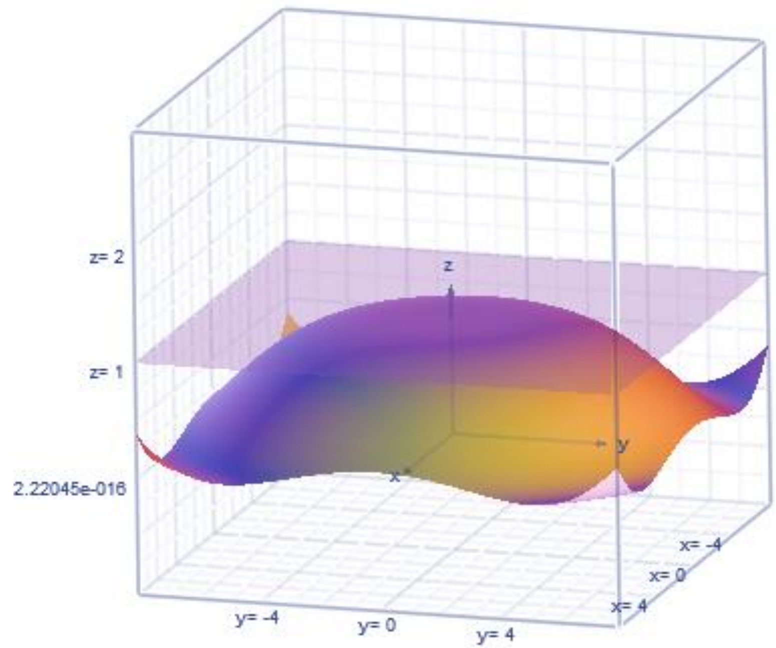
Que vale $f(x,y) = z = 1$

$$f(x,y) = \cos^2(x^2 + y^2)$$

Mínimo en $(x,y)=(x_0,y_0)=(0,0)$

Que vale $f(x,y) = z = 1$





Máximos y mínimos de funciones de dos variables.
Otra forma de definirlos

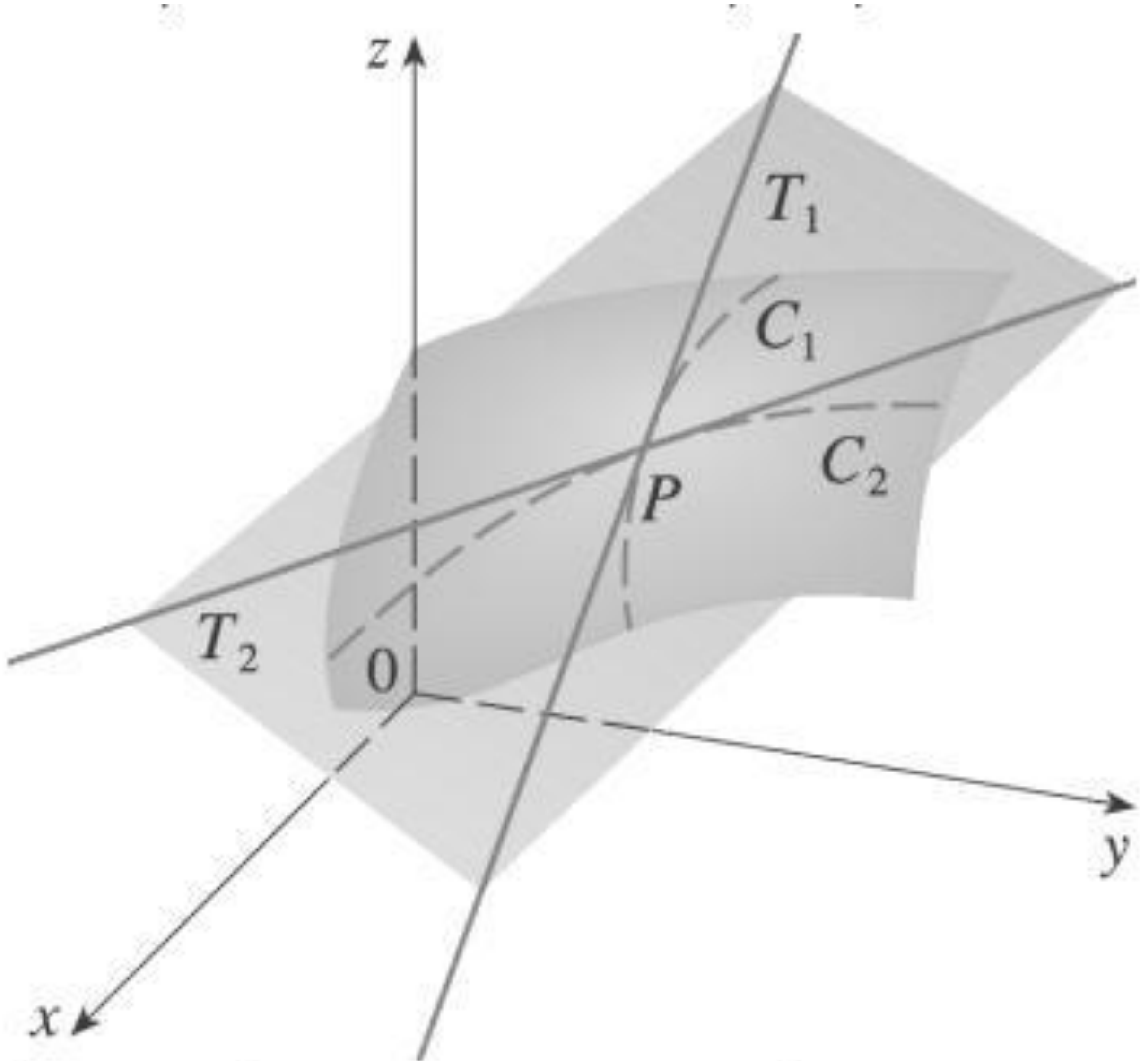
Máximo relativo, otra definición: Si la resta $f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0,y_0)$ resulta **negativa** para cualquier combinación de valores h y k, entonces $f(x,y)$ pasa por un ***máximo local (o relativo)*** en el punto $(x_0,y_0)\subseteq S$.

Mínimo relativo, otra definición: Si la resta $f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0,y_0)$ resulta **positiva** para cualquier combinación de valores h y k, entonces $f(x,y)$ pasa por un ***mínimo local (o relativo)*** en el punto $(x_0,y_0)\subseteq S$.

Una interpretación geométrica de este enunciado es que en aquellos puntos (x_0,y_0) la función pasa por extremo relativo, **el plano tangente a la superficie en el punto debe, necesariamente, ser horizontal, esto es, paralelo al plano** x,y.

Esta propiedad habilita a establecer las **condiciones necesarias** para que una función pase por un **extremo relativo**.

Condición necesaria para la existencia de puntos críticos



Condición necesaria para la existencia de puntos críticos

Sea $f(x,y)$ con $(x,y) \subseteq S \in \mathrm{R}^2$

La ecuación de un plano tangente a la función en un punto (x_0, y_0) es:

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) - f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) = 0$$

Se escribe la ecuación del plano de la forma:

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$$

Para mostrar la diferencia entre dos valores de f, uno tomado en (x,y) y el otro en (x_0,y_0).

Si f es un plano horizontal esa diferencia es nula para todo punto del plano x,y.

La única posibilidad de que esto ocurra es que se satisfaga el sistema:

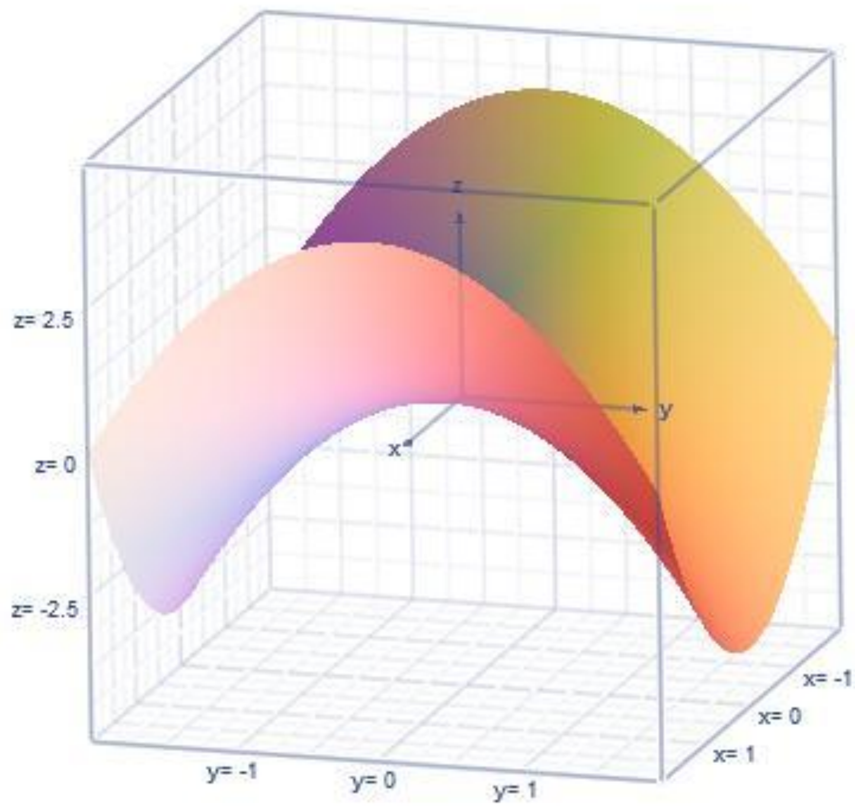
$$\left.\begin{aligned} f_x(x_0,y_0) &= 0 \\ f_y(x_0,y_0) &= 0 \end{aligned}\right\} \text{Condición necesaria para la existencia de un punto crítico}$$

No todos los puntos críticos con extremos

$$f(x,y)=z=\mathrm{x}^2-y^2$$

Punto de ensilladura en $(x,y)=(x_0,y_0)=(0,0)$

Que vale $f(x,y)=z=\mathrm{x}^2-y^2$



Clasificación de los puntos críticos

El Teorema del Valor Medio de segundo orden para funciones de una variable

Para funciones de una variable, una forma de expresar el Teorema del Valor Medio es

$$f(x_0+h)-f(x_0)=h\,f'(x_0+\theta h) \quad \text{con} \quad \theta\in\mathbb{R} \;\wedge\; 0<\theta<1 \qquad [4]$$

Se va a desarrollar este Teorema con derivadas de segundo orden.

Se define la constante M, de modo que

$$f(b)-f(x_0)-(b-x_0)\cdot f'(x_0)-\frac{1}{2}(b-x_0)^2\cdot M=0 \qquad [5]$$

Se forma $F(x)$ remplazado a b por x, resultando:

$$F(x)=f(x)-f(x_0)-(x-x_0)\cdot f'(x_0)-\frac{1}{2}(x-x_0)^2\cdot M \qquad [6]$$

Como $F(b)=0$, por [5] y $F(x_0)=0$, por [6], se puede aplicar a $F(x)$ el Teorema de Rolle, que dice: "*Si* $F(x)$ *es continua en el intervalo* $[x_0,b]$ *y se anula en sus extremos y tiene derivada* $F'(x)$ *para todo* $x\in[x_0,b]$, *entonces existe al menos un valor* $x=x_1\in[x_0,b]$ *para el que* $F'(x_1)=0$".

Entonces

$$\left.\begin{aligned} F'(x)&=f'(x)-f'(x_0)-(x-x_0)\cdot M \\ F'(x_1)&=f'(x_1)-f'(x_0)-(x_1-x_0)\cdot M \end{aligned}\right\} \qquad [7]$$

Clasificación de los puntos críticos

Aplicando el Teorema de Rolle y evaluando $F'(x)$ en x_0, resulta:

$$\left.\begin{array}{l} F'(x_1)=0 \\ F'(x_0)=0 \end{array}\right\} \qquad [8]$$

de lo que resulta que la función $F'(x)$ también satisface el Teorema de Rolle y, en consecuencia $F''(x)$ debe anularse para algún valor de $x = x_2 \in [x_0, x_1] \subset [x_0, b]$. Entonces, a partir de [7], se propone:

$$\left.\begin{array}{l} F''(x)=f''(x)-M \\ F''(x_2)=f''(x_2)-M \end{array}\right\} \qquad [9]$$

Como por el Teorema de Rolle $F''(x_2)=f''(x_2)-M=0$ resulta que

$$M = f''(x_2) \qquad [10]$$

Remplazando [10] en [5], da

$$f(b)=f(x_0)+(b-x_0)\cdot f'(x_0)+\frac{1}{2}(b-x_0)^2\cdot f''(x_2) \qquad [11]$$

que, para cualquier valor $b = x$

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)\cdot f'(x_0)+\frac{1}{2}(x-x_0)^2\cdot f''(x_2) \qquad [12]$$

$$f(x)-f(x_0)=(x-x_0)\cdot f'(x_0)+\frac{1}{2}(x-x_0)^2\cdot f''(x_2) \quad \text{con} \quad x_0 < x_2 < x \qquad [13]$$

Clasificación de los puntos críticos

El Teorema del Valor Medio de segundo orden para funciones de dos variables

$f(x,y)$ continua y derivable en un dominio $S \subset \mathbb{R}^2$; h y k dos reales;

t una variable real en el intervalo $I=[0,1]\subset \mathbb{R}$ tal que $\forall\, t \in I \;\; (x_o+ht,\, y_o+ht)\in S$

$$\left.\begin{aligned} x &= x_o + ht \\ y &= y_o + kt \end{aligned}\right\} \qquad [14]$$

$$f(x,y) = f(x_o+ht,\, y_o+ht) \equiv F(t)$$

$$F(1)-F(0)=F'(0)+\frac{1}{2}F''(\theta) \quad \text{con} \quad 0<\theta<1 \qquad [15]$$

Las derivadas primera y segunda de *F(t)* serán [16] y [17], aplicando las reglas de derivación de funciones compuestas:

$$F'(t)=\frac{\partial f(x_o+ht\,,y_o+kt)}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f(x_o+ht\,,y_o+kt)}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$F'(t)=\frac{\partial f(x_o+ht\,,y_o+kt)}{\partial x}h+\frac{\partial f(x_o+ht\,,y_o+kt)}{\partial y}k \qquad [16]$$

$$F''(t)=\frac{\partial^2 f(x_o+ht,\,y_o+kt)}{\partial x^2}h^2+2\frac{\partial^2 f(x_o+ht,\,y_o+kt)}{\partial xy}h\cdot k+\frac{\partial^2 f(x_o+ht,\,y_o+kt)}{\partial y^2}k^2 \qquad [17]$$

Clasificación de los puntos críticos

Remplazando F, F' y F'' en 15, resulta, teniendo en cuenta que

para $t=1$ $\left.\begin{array}{l} x = x_o + ht = x_o + h \\ y = y_o + kt = y_o + k \end{array}\right\}$

para $t=0$ $\left.\begin{array}{l} x = x_o + ht = x_o \\ y = y_o + kt = y_o \end{array}\right\}$

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = h \cdot f_x(x_0, y_0) + k \cdot f_y(x_0, y_0) +$$

$$+\frac{1}{2}\left[h^2 \cdot f_{xx}(x_0+\theta h, y_0+\theta k) + 2 \cdot h \cdot k \cdot f_{xy}(x_0+\theta h, y_0+\theta k) + k^2 \cdot f_{yy}(x_0+\theta h, y_0+\theta k)\right] \quad [18]$$

con $x_0 < \theta < x_0 + h$ y $y_0 < \theta < y_0 + k$, que es una de las formas para expresar el *Teorema del Valor Medio para funciones de dos variables independientes.*

Clasificación de los puntos críticos

$$\left.\begin{array}{l} f_x(x_0, y_0) = 0 \\ f_y(x_0, y_0) = 0 \end{array}\right\}$$

El signo del miembro de la izquierda de [18] o sea el signo de $\Delta f(x_0, y_0)$ será igual al signo que tome la expresión $\frac{1}{2}\left[h^2 \cdot f_{xx}(x_0, y_0) + 2 \cdot h \cdot k \cdot f_{xy}(x_0, y_0) + k^2 \cdot f_{yy}(x_0, y_0)\right]$

$$\left.\begin{array}{l} f_{xx}(x_0, y_0) = A \\ f_{xy}(x_0, y_0) = B \\ f_{yy}(x_0, y_0) = C \end{array}\right\} \qquad \frac{1}{2}\left[h^2 \cdot A + 2 \cdot h \cdot k \cdot B + k^2 \cdot C\right]$$

$$\text{signo } \Delta f = \text{signo } \left[h^2 \cdot A + 2 \cdot h \cdot k \cdot B + k^2 \cdot C\right]$$

$$\text{signo } \Delta f = \text{signo } \left\{(1/A) \cdot \left[(h \cdot A + k \cdot B)^2 + k^2 \cdot (A \cdot C - B^2)\right]\right\},$$

$A \cdot C - B^2 > 0 \Rightarrow$ signo Δf = signo A

$A \cdot C - B^2 < 0 \Rightarrow$ el signo de Δf cambiará según los valores de h y de k.

$A \cdot C - B^2 = 0 \Rightarrow$ que no se puede determinar como se comportará el signo de Δf.

Clasificación de los puntos críticos

Haciendo

$$H = A \cdot C - B^2$$

Se puede resumir el análisis anterior en la siguiente regla, que permite clasificar los puntos críticos de una superficie en la mayoría de los casos, en función de los valores que en ellos toman las segundas derivadas de la función:

$H < 0 \Rightarrow$ la existencia de un punto de silla en (a, b)

$H > 0 \wedge A > 0 \Rightarrow$ la existencia de un mínimo relativo en (a, b)

$H > 0 \wedge A < 0 \Rightarrow$ la existencia de un máximo relativo en (a, b)

$H = 0$ no permite definir el carácter de la función en (a, b)

$$H = \begin{bmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{bmatrix}$$

Extremos condicionados

Determinar los valores de x, y y z, mayores que 0, tales que su producto sea 40 y su suma mínima.

<u>*Resolución:*</u>

Se trata de un problema en que hay que minimizar una función de tres variables independientes ligadas por una restricción.

La función que debe ser mínima es

$$f(x,y)=x+y+z \qquad [41]$$

debiéndose cumplir la condición que

$$x\cdot y\cdot z=40 \qquad [42]$$

Análisis Matemático II

Facultad de Ingeniería

Análisis Matemático II
Presentaciones en el Aula

TEMA 6

Estudio de Funciones de dos Variables