



Análisis Matemático II

Facultad de Ingeniería



Análisis Matemático II
Presentaciones en el Aula

TEMA 5

Cálculo en campos escalares

Función real dependiente de varias variables reales

Se define una función real de n variables reales como una aplicación $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que asigna a cada punto $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ perteneciente al conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un único valor real y que pertenece a \mathbb{R} . El elemento $y \in \mathbb{R}$, que se escribe $y = f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, es la imagen de \mathbf{x} por f y el conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ es el dominio de la función f .

Esta función o **campo escalar** es una transformación de un punto $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ sobre un eje f en \mathbb{R}^1 .

Variables: Puntos $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

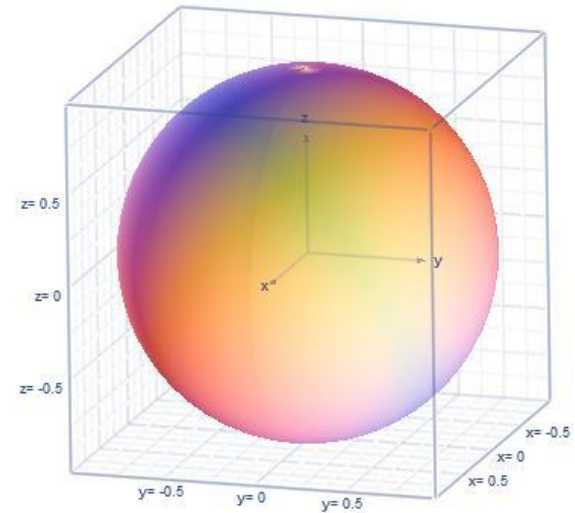
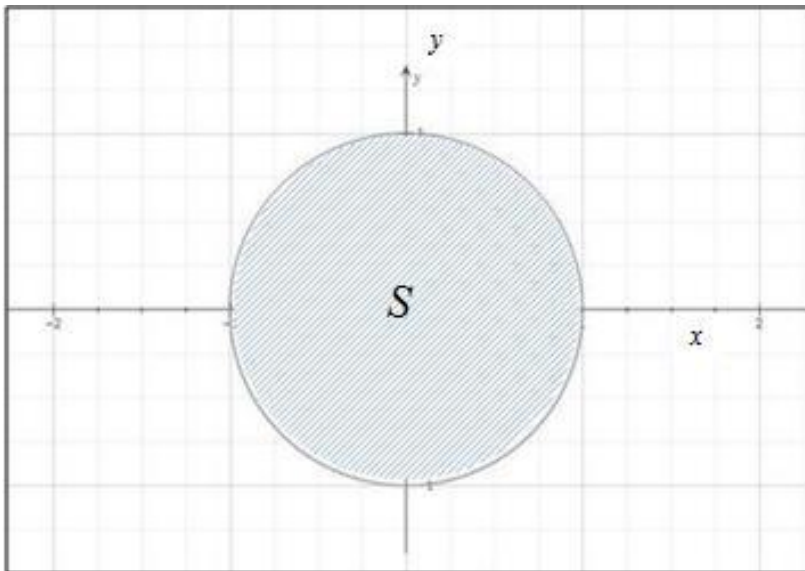
Distancia entre 2 puntos \mathbf{x} : $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*) \equiv \sqrt{(x_1 - x_1^*)^2 + (x_2 - x_2^*)^2 + \dots + (x_n - x_n^*)^2}$

Entorno de un punto perteneciente a \mathbb{R}^n : $N(\mathbf{x}^*; r)$ conjunto de todos los puntos \mathbf{x} más cercanos a \mathbf{x}^* que r , es decir tales que $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*) < r$.

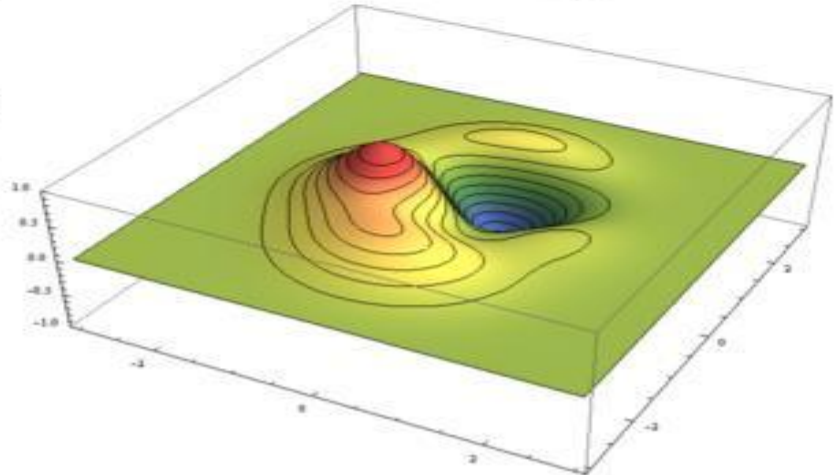
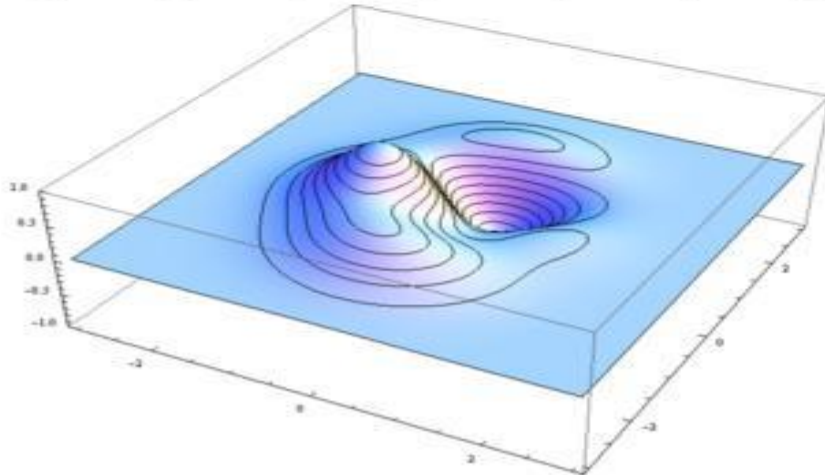
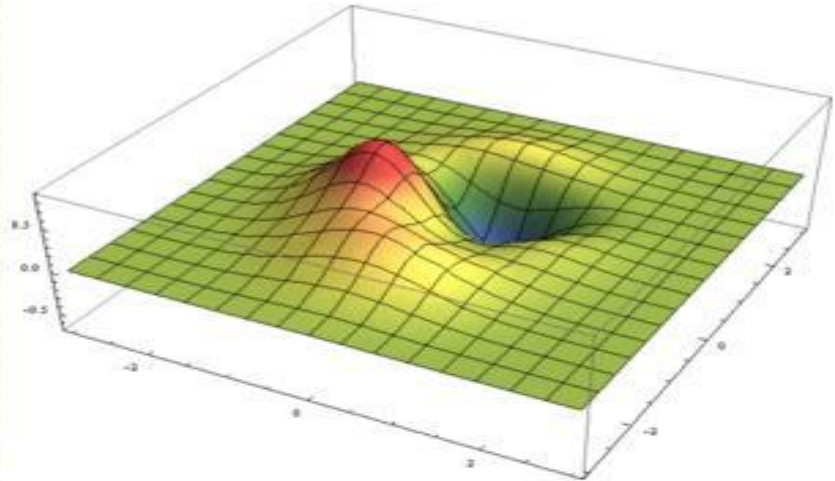
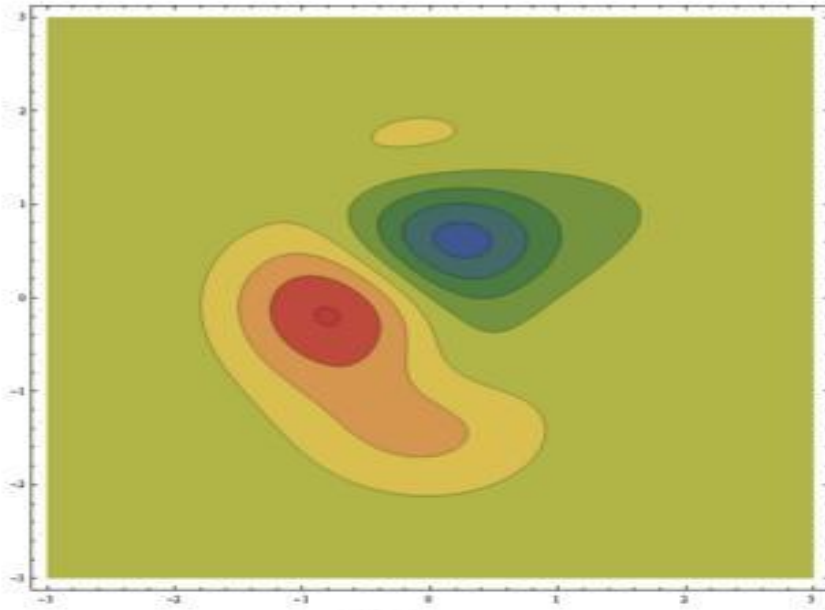
Dominio e imagen de un campo escalar

Campo escalar: $z(x, y) = \pm\sqrt{1-x^2-y^2}$

Definido para el conjunto de puntos $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$



Representaciones de un campo escalar $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$



Microsoft Mathematics

The screenshot displays the Microsoft Mathematics application interface. At the top, the 'Herramientas gráficas' (Graphing Tools) ribbon is active, featuring various options for graph manipulation such as 'Zoom', 'Girar' (Rotate), 'Ocultar ejes' (Hide axes), 'Representación proporcional' (Proportional representation), 'Rango de trazado' (Plot range), and 'Restaurar gráfica' (Restore graph). Below the ribbon, the 'Ecuaciones y funciones' (Equations and Functions) pane is open, showing the equation $z = 3x - 15y$ entered in the input field. The main workspace displays a 3D plot of this equation as a red plane within a wireframe box. The axes are labeled with x , y , and z . The z -axis has tick marks at $z = -20.25$, $z = 0.5$, and $z = 21.25$. The x -axis has tick marks at $x = -1$, $x = 0$, and $x = 1$. The y -axis has tick marks at $y = -1$, $y = 0$, and $y = 1$. On the left side of the interface, there is a virtual calculator keypad with various mathematical functions like 'Calculo', 'Estadísticas', 'Trigonometría', and 'Álgebra lineal'. At the bottom, the Windows taskbar is visible, showing several open applications and the system clock at 02:36 p.m.

Curvas de Nivel

Montaña



Valle



Límites y continuidad

Sea la función $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(\mathbf{x})$. Se dice que $f(\mathbf{x})$ tiene un límite L cuando $\mathbf{x} = x_1, x_2, \dots, x_n$ tiende a $\mathbf{x}^* = x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$, y se escribe $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^*} f(\mathbf{x}) = L$ si para cada $\varepsilon > 0$ (no importa cuán pequeño) existe un correspondiente $\delta(\varepsilon, \mathbf{x}^*) > 0$ tal que $|f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon$ siempre que $0 < |\mathbf{x} - \mathbf{x}^*| < \delta$. Es decir, $f(\mathbf{x})$ se puede acercar arbitrariamente a L haciendo \mathbf{x} suficientemente cercana a \mathbf{x}^* .

Sea la función $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(\mathbf{x})$, se dice que $f(\mathbf{x})$ es continua en \mathbf{x}^* si $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^*} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^*)$.

Para el caso de funciones de dos variables se tiene que:

$$\text{Si } \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$$

Si existen los límites $\lim_{x \rightarrow a} f(x,y) \wedge \lim_{y \rightarrow b} f(x,y)$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \left[\lim_{y \rightarrow b} f(x,y) \right] = \lim_{y \rightarrow b} \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x,y) \right]$$

Derivadas Parciales de Funciones Reales de dos variables

Sea $f(x, y)$ una función real de dos variables reales independientes, x e y , definida en un entorno de un punto $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$.

Si se mantiene y constante, es decir $y = y_0$, entonces $f(x, y) = f(x, y_0)$ depende sólo de x .

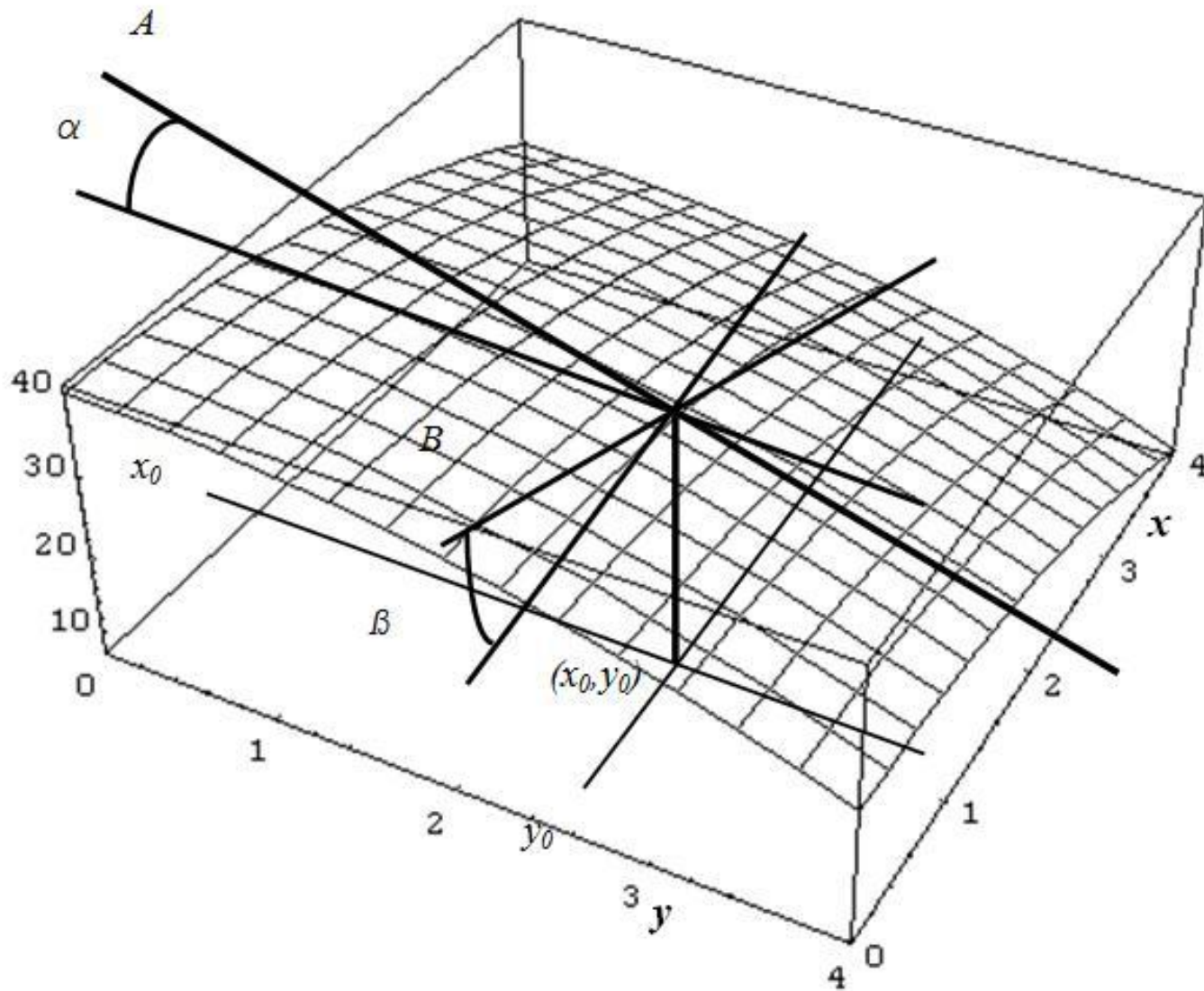
Si existe la derivada de $f(x, y_0)$ respecto de x para un valor $x = x_0$, entonces el valor de esta derivada se denomina derivada parcial de $f(x, y)$ respecto de x en el punto (x_0, y_0) y la notación que se emplea generalmente es $\partial f / \partial x$ o bien f_x . Se tiene, por definición de derivada,

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

En forma similar se define la derivada parcial de $z = f(x, y)$ respecto de y ; ahora se mantiene x constante, es decir igual a x_0 , y derivando $f(x_0, y)$ respecto de y . Entonces

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

Derivadas Parciales de Funciones Reales de dos variables



Derivadas Parciales sucesivas

Para un campo escalar dependiente de dos variables, las derivadas parciales $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ se llaman derivadas parciales primeras, o derivadas parciales de primer orden. Si estas funciones de (x,y) son derivadas una vez más, se obtienen las cuatro derivadas parciales segundas o derivadas parciales de segundo orden. La notación utilizada es

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = f_{xx}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = f_{yx}$$

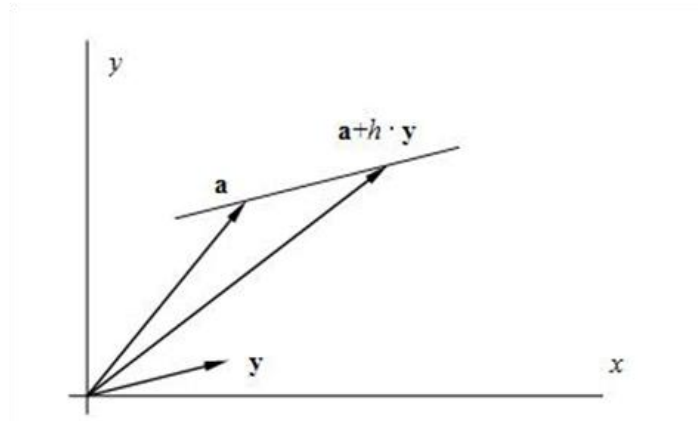
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = f_{xy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = f_{yy}$$

Se puede demostrar que si todas las derivadas involucradas son funciones continuas, entonces las dos *derivadas parciales cruzadas* son iguales, de manera que no es problema el orden de derivación, o sea que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Concepto de Derivada Direccional



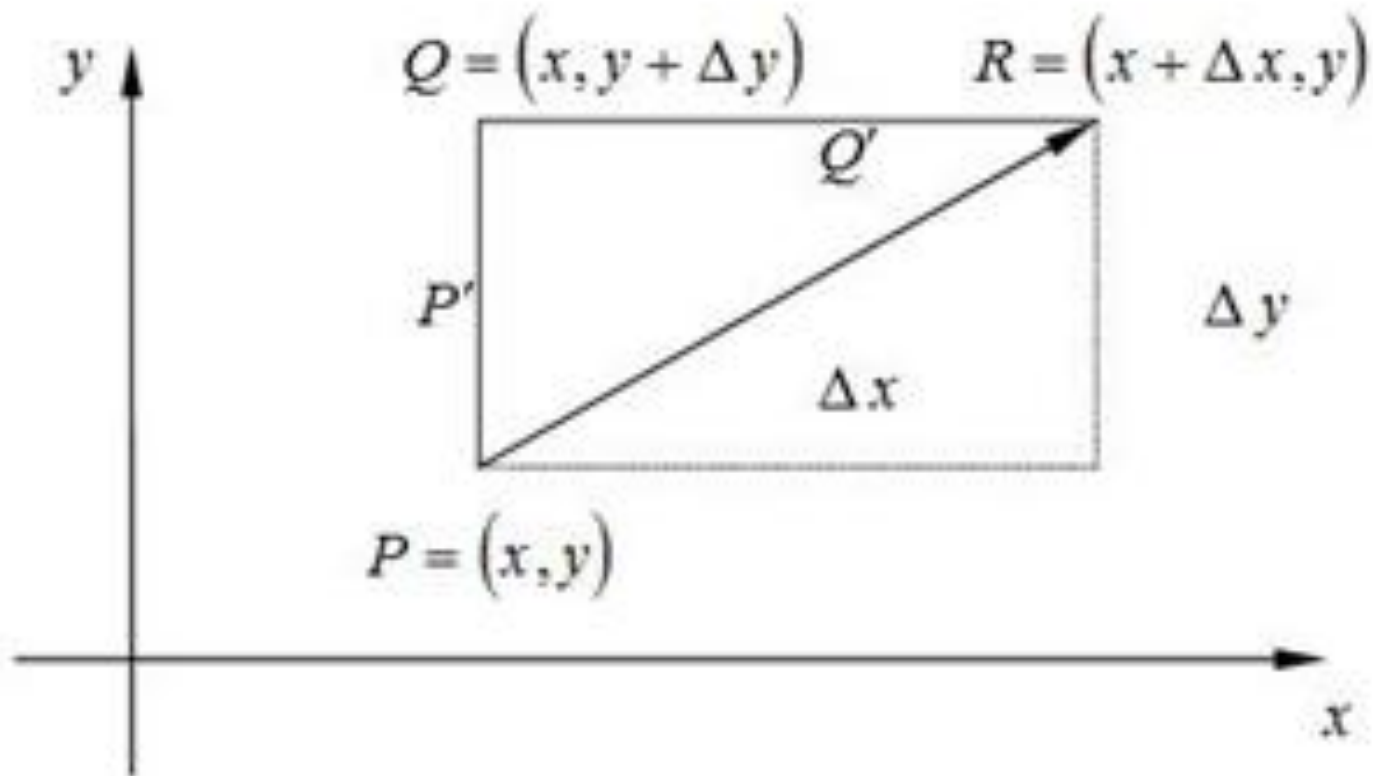
Dado un campo escalar $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, donde $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Sean \mathbf{a} un punto interior a S e \mathbf{y} un vector unitario en \mathbb{R}^n . La derivada de f en \mathbf{a} en la dirección de \mathbf{y} se representa con el símbolo $f'(\mathbf{a}; \mathbf{y})$ y se define

$$f'(\mathbf{a}; \mathbf{y}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + h \cdot \mathbf{y}) - f(\mathbf{a})}{h} \text{ cuando este límite existe.}$$

En el caso de que \mathbb{R}^n sea \mathbb{R}^2 , la expresión anterior se puede reescribir teniendo en cuenta que las variables son x, y , la distancia $h = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, las componentes del vector \mathbf{y} , unitario, son sus cosenos directores, $\cos \alpha \wedge \sin \alpha$, las componentes de \mathbf{a} son $\mathbf{a} = (a, b)$

$$f'((a, b); (\cos \alpha, \sin \alpha)) = \lim_{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \rightarrow 0} \frac{f((a + x \cos \alpha, b + y \sin \alpha)) - f(a, b)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}}$$

Diferencial de una función de dos variables





Análisis Matemático II

Facultad de Ingeniería



Análisis Matemático II

Presentaciones en el Aula

TEMA 5

Cálculo en campos escalares