Tema 5. Cálculo en campos escalares

1. Conceptos para iniciar el capítulo

1.1. Campo escalar

En física, geometría y sus aplicaciones en ingeniería, se utilizan dos clases de cantidades: escalares y vectoriales.

Una cantidad escalar queda determinada por su magnitud, es decir su número de unidades medida en una escala adecuada. Por ejemplo longitud, temperatura y precio son escalares.

El concepto de campo escalar data del siglo XIX y su aplicación está orientada a la descripción de fenómenos relacionados con la distribución de temperaturas dentro de un cuerpo, las presiones en el interior de fluidos, el potencial electrostático, la energía potencial en un sistema gravitacional, las densidades de población o de cualquier magnitud cuya naturaleza pueda aproximarse a una distribución continua.

Los campos escalares se representan, básicamente, mediante la **función** que los define. También se pueden emplear, para describirlos, líneas o superficies equipotenciales.

La función que define un campo escalar se denomina **función real**.

1.2. Variables

Independientemente de su naturaleza, cada variable $x_1, x_2, \ldots, x_n$, se considera como la coordenada de un punto en un espacio $n-$dimensional. Cada uno de estos puntos se puede indicar como $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

1.3. Conjunto de puntos

El espacio n-dimensional $\mathbb{R}^n$ contiene todos los puntos $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ posibles, por lo que es el conjunto universal en este caso. Si se definen subconjuntos de puntos en tal espacio, se designarán con el símbolo S , siendo $S \subseteq \mathbb{R}^n$.

Se define a un conjunto de puntos S como **conectado** si cada par de puntos en S puede ser unido mediante una línea ininterrumpida consistente de un número finito de segmentos, cada uno contenido enteramente en S .

Se dice que un punto $\mathbf{x}$ es un **punto frontera** de un conjunto de puntos S si cada entorno $N(\mathbf{x}; r)$ contiene tanto puntos en S como puntos que no están en S.

Se dice que un punto $\mathbf{x}$ es un **punto interior** de un conjunto de puntos S si existe un entorno $N(\mathbf{x}; r)$ que contiene todos puntos en S.

Se dice que S es una **región abierta** si no contiene ninguno de sus puntos frontera. Por otra parte, S es una **región cerrada** si contiene todos sus puntos frontera.

1.4. Distancia entre 2 puntos pertenecientes a $\mathbb{R}^n$

Sean $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{x}^\bullet = (x^\bullet{}_1, x^\bullet{}_2, \ldots, x^\bullet{}_n)$ tales puntos, entonces la expresión

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{x}^\bullet) \equiv \sqrt{(x_1 - x^\bullet{}_1)^2 + (x_2 - x^\bullet{}_2)^2 + \cdots + (x_n - x^\bullet{}_n)^2}$$

define la distancia entre ellos.

La Tabla 1 muestra la forma que toma $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}^\bullet)$ para distintos valores de n.

Tabla 1

n	$d(\mathbf{x},\mathbf{x}^\bullet)$
1	$\lvert x_1 - x^\bullet{}_1 \rvert$
2	$\sqrt{(x_1 - x^\bullet{}_1)^2 + (x_2 - x^\bullet{}_2)^2}$
3	$\sqrt{(x_1 - x^\bullet{}_1)^2 + (x_2 - x^\bullet{}_2)^2 + (x_3 - x^\bullet{}_3)^2}$

1.5. Entorno de un punto perteneciente a $\mathbb{R}^n$

Se define entorno de radio r de un punto $\mathbf{x}^\bullet$, $N(\mathbf{x}^\bullet; r)$, al conjunto de todos los puntos $\mathbf{x}$ más cercanos a $\mathbf{x}^\bullet$ que r, es decir tales que $d(\mathbf{x},\mathbf{x}^\bullet) < r$.

1.6. Funciones de valor real dependientes de varias variables reales

Se define una función real de n variables reales como una aplicación $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que asigna a cada punto $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ perteneciente al conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un único valor real y que pertenece a $\mathbb{R}$. El elemento $y \in \mathbb{R}$, que se escribe $y = f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, es la imagen de $\mathbf{x}$ por f y el conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ es el dominio de la función f.

Una función real es una transformación de un punto $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sobre un eje f en $\mathbb{R}^1$.

<u>*Ejemplo 1:*</u>

Determinar la expresión que da el volumen V de una pirámide cuadrangular regular en función de su altura x y de su arista lateral y.

<u>*Resolución:*</u>

Si fuera necesario expresar el volumen V de una pirámide cuadrangular regular en función de su altura x y de su arista lateral y, deberíamos establecer la relación entre el campo escalar V y estas dos variables, que son independientes entre sí, ya que se le pueden asignar a cada una valores específicos sin importar los de la otra.

Esta relación queda representada por la función real *f*, dependiente de dos variables independientes, *x* e *y*.

Se dice, en este caso, que *f* es una función real de dos variables reales, *x* e *y* que quedará definida para un determinado conjunto de puntos $\mathbf{x} = (x, y)$ que pertenezcan a $\mathbb{R}^2$.

Más precisamente, es el campo escalar que representa a los volúmenes de todas las pirámides cuadrangulares regulares.

Por ejemplo, la función *V* en tanto volumen del prisma, no lo representará para valores como *(-1, 3)*.

La expresión resultante es el campo escalar o función real de dos variables reales:

$V = \dfrac{[2 \cdot (y^2 - x^2) \cdot x]}{3}$ válida para $0 \le x \le \infty \wedge 0 \le y \le \infty$

1.7. Dominio de un campo escalar

Una función de varias variables existe, en general, sólo para determinados valores de dichas variables, los que conforman el *dominio* de la función..

En el Ejemplo 1, hemos hecho referencia al *dominio* de un campo escalar pero sin establecer previamente una definición rigurosa. La misma es:

$S \subseteq \mathbb{R}^n$ es el dominio de $f \Leftrightarrow \forall \mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in S : f(x_1, x_2, ..., x_n) = y / y \in \mathbb{R}$

El dominio de una función real de varias variables reales es el conjunto de puntos $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ para los que el valor de dicha función resulta real.

Este concepto se precisa aún más en los problemas aplicados, en donde se puede agregar que el dominio de una función real de varias variables reales es el conjunto de puntos $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ para los que el valor de dicha función cobra sentido razonable.

Los dominios de los campos escalares se representan como un conjunto de puntos, como por ejemplo

$$S = \left\{ (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \,/\, f(x_1, x_2, ..., x_n) = y \right\}$$

O, para el caso particular de una función de dos variables, donde $n = 2$:

$$S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, f(x, y) = z, \; con \; z \in R \right\}$$

Es habitual la siguiente denominación para las variables en los dominios, según sea n:

n	Denominación de las variables	Denominación de la función
1	x	y
2	x, y	z
3	x, y, z	f
n	$x_1, x_2, ..., x_n$	f

La representación gráfica de los dominios se desarrolla habitualmente en ejes cartesianos. A cada eje le corresponde una variable independiente.

<u>*Ejemplo 2:*</u>

Determinar y graficar el dominio de la función que representa el volumen de una semiesfera de radio a.

<u>*Resolución:*</u>

La función que representa la superficie de una semiesfera de radio a con centro en el origen por encima del plano x, y es

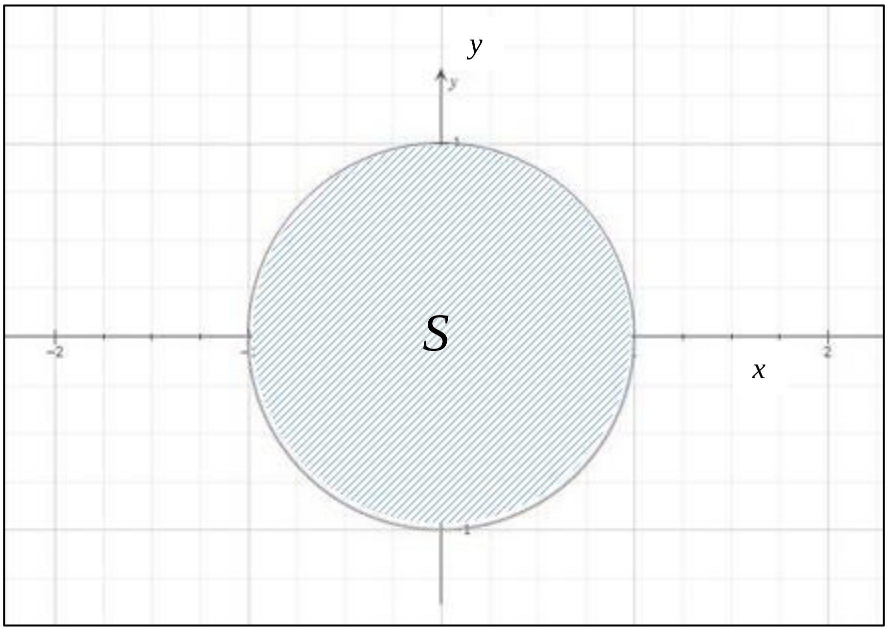
$$z(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \qquad [1]$$

y está definida para el conjunto de puntos

$$S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 \le 1 \right\} \qquad [2]$$

La función z será real en la medida que el argumento de la raíz no sea negativo. Entonces, estará definida en el dominio cuya representación se observa en la Figura 1

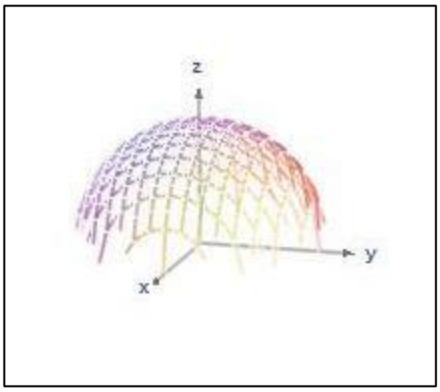
Figura 1



En este caso, para representar gráficamente la función se debe agregar una dimensión al sistema de ejes cartesianos.

El eje z, normal al plano x, y, permite indicar los valores que toma la función, en el espacio $\mathbb{R}^3$, como se ve en la Figura 2:

Figura 2



El dominio de una superficie representada en un espacio de tres dimensiones, se presenta como la proyección de dicha superficie sobre el plano x, y.

A continuación se presentan las gráficas de varias superficies en tres dimensiones, realizadas con diferentes programas en computadora.

1.8. Representación gráfica de campos escalares. Imagen de la función

Como se vio en el ejemplo anterior, para visualizar gráficamente el comportamiento de una función de dos variables se hace necesaria una representación en 3D.

A cada punto (x_0, y_0) del plano x, y le corresponde un único punto z_0 en el espacio. El conjunto de todos los puntos z así formados constituye la imagen de la función $z = z(x, y)$.

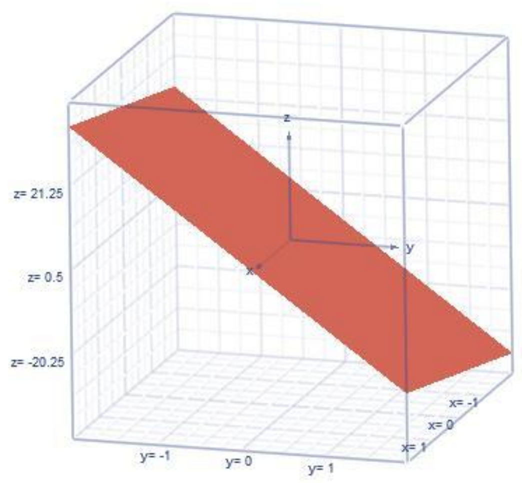
Resulta evidente que no podremos observar la imagen de una función de tres variables, ya que los tres ejes en $\mathbb{R}^3$ están ocupados por las respectivas variables independientes.

Esto es, la representación gráfica de funciones, tal como se la comprende, es posible hasta el caso de funciones de dos variables independientes.

Ejemplo 3

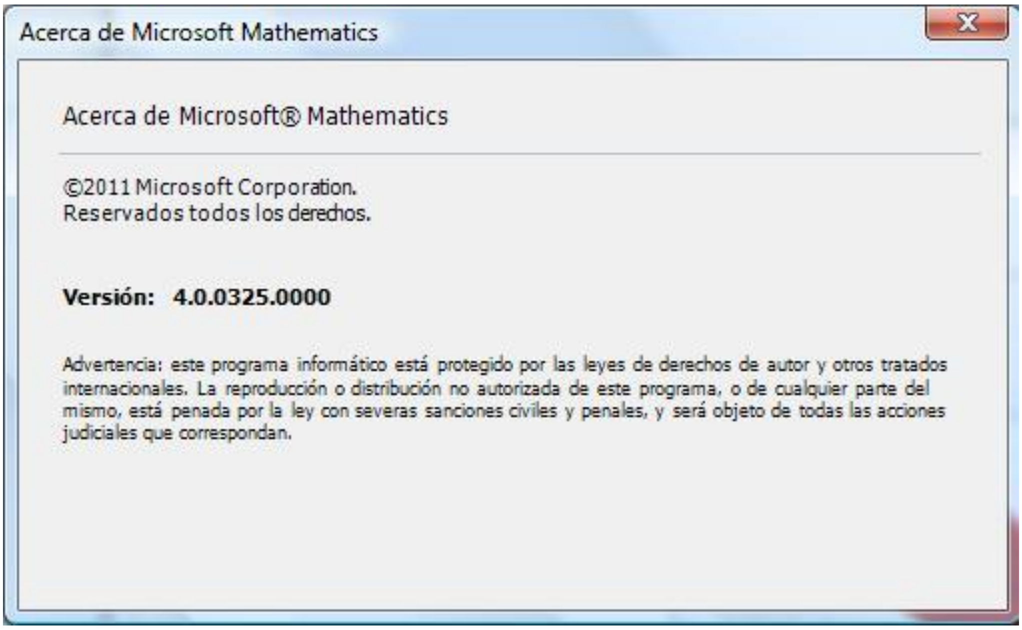
Representación gráfica de algunas funciones de dos variables

Figura 3 Representación de $z = 3x - 15y$



Se dispone de diversas aplicaciones informáticas que permiten el desarrollo de las representaciones gráficas y el análisis de funciones de varias variables, con mayor o menor grado de herramientas, que permiten desde una simple visualización hasta la rotación de las imágenes, la personalización de los parámetros gráficos y de su diseño.

Un software que ofrece las utilidades elementales, sencillo de manejar y compatible con el sistema operativo Windows es Microsoft Mathematics:



que utilizado para el ejemplo anterior se observa como se muestra en la Figura 4:

Figura 4 Representación de $z = 3x - 15y$ en Microsoft Mathematics

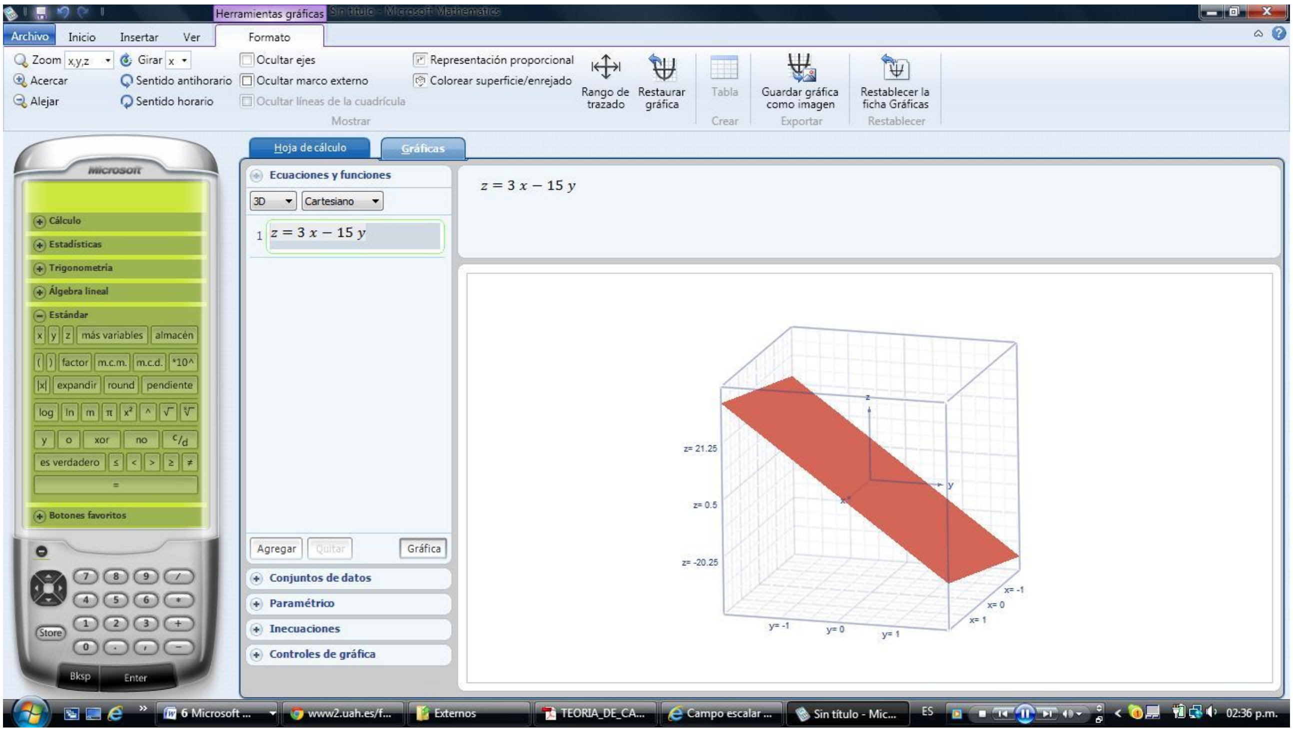
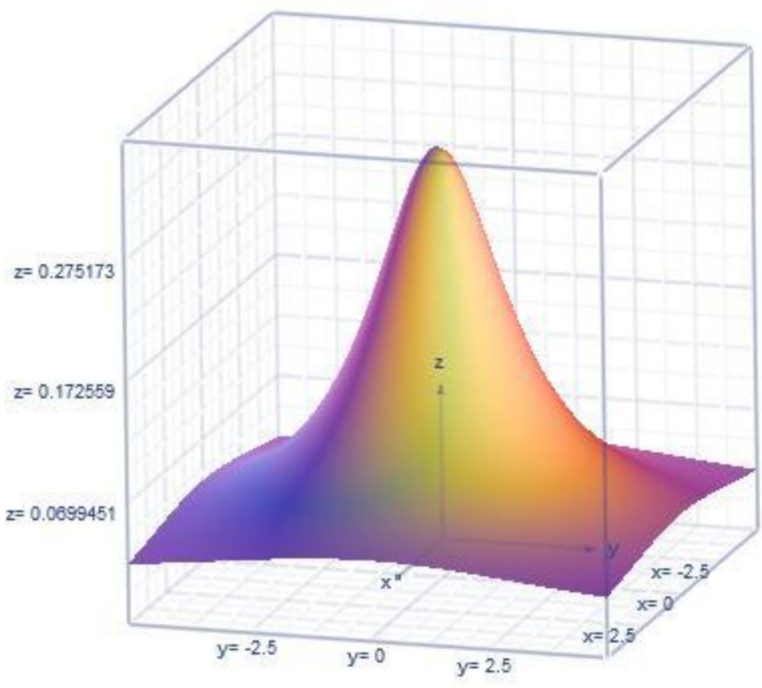


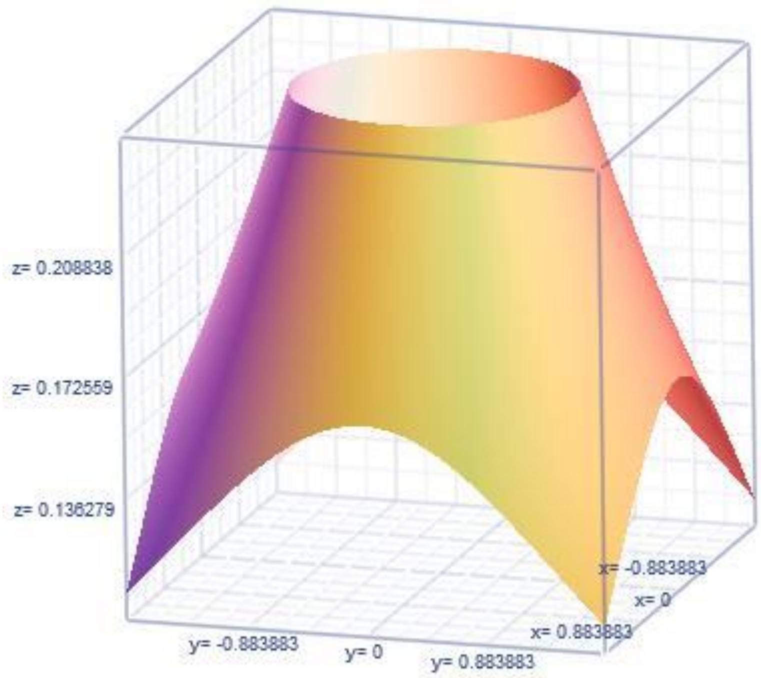
Figura 5: Representación de $z = \frac{\cos\left(\frac{x^2+y^2}{4}\right)}{3+x^2+y^2}$



Los rangos de variación de las variables pueden, en función de las condiciones que representa la función, limitarse dentro del dominio de la definición de la imagen real.

Si en el caso anterior fuera necesario restringir el análisis se la función a determinados valores, como ser: $-1{,}768 \leq x \leq 1{,}768 \ \wedge \ -1{,}768 \leq y \leq 1{,}768$, el resultado de la representación gráfica será el de la Figura 5:

Figura 6: Representación de $z = \frac{\cos\left(\frac{x^2+y^2}{4}\right)}{3+x^2+y^2}$ en un subespacio de su dominio

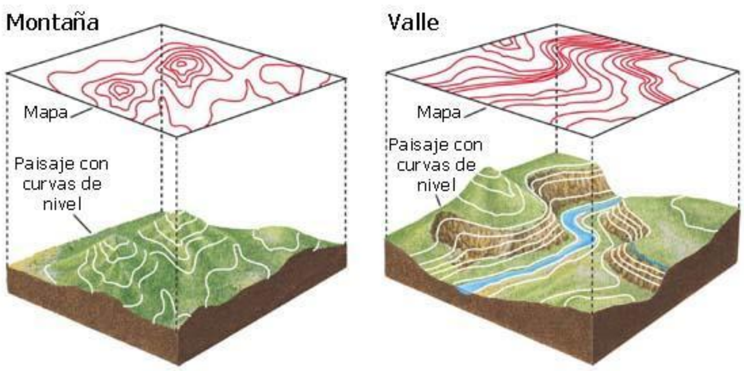


1.9. El uso de curvas de nivel para representar superficies en un plano

En cartografía se utilizan las curvas de nivel para incorporar a un mapa o plano alguna información tridimensional del relieve que corresponde a la zona representada. En la Figura 6 se muestra una imagen en la que hay dos cubos.

En el primero, la base representa un terreno montañoso y en el segundo un valle. En la cara superior de ambos cubos se observan las líneas de nivel. Son precisamente eso: líneas que, en un plano, unen puntos que, en las respectivas superficies, están a la misma altura.

Figura 7: el uso de curvas de nivel en cartografía



Comparando la apariencia de las figuras 4, 5 y 6, no resulta difícil vincular a la superficie que en el espacio representa a una función de dos variables con la superficie de un terreno.

Con el mismo criterio simplificador, la gráfica de tal función puede ser cortada por planos horizontales, paralelos al plano *x, y* que definirán, cada una, una curva de nivel para un determinado valor de *z,* que se mantiene constante a lo largo de la curva de nivel.

Un plano horizontal tiene por ecuación: $z = c$ con c constante. La intersección de la gráfica de f con el plano horizontal son por tanto los puntos (x, y, z) tales que $z = f(x, y) = c$.

La proyección de este conjunto sobre el plano (x, y) ayuda a entender cómo es la gráfica de f en el espacio.

La curva de nivel c de la función $z = f(x, y)$ queda definida por el conjunto de puntos (x, y) del plano que cumplen la condición $z = f(x, y) = c$.

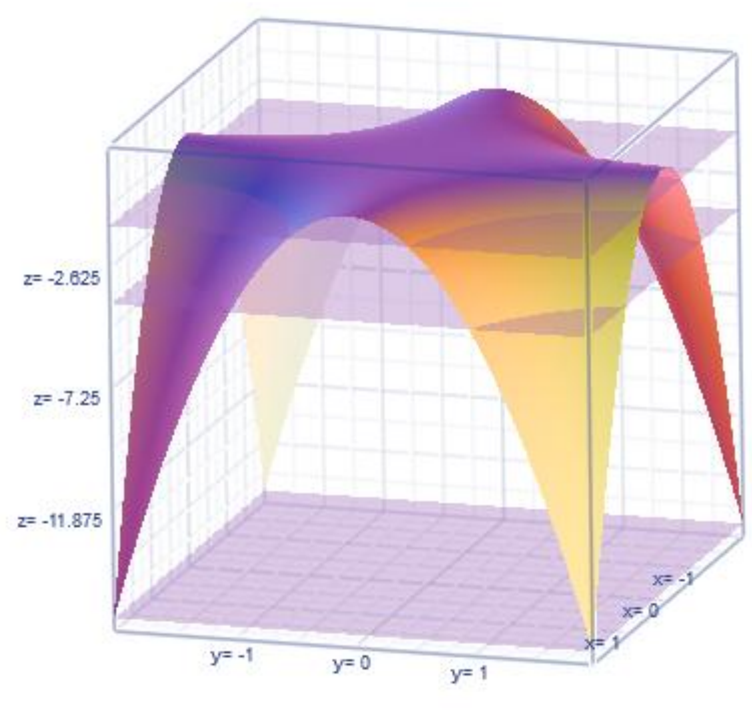
Esta definición se extiende a funciones de un número n de variables, generalizando la denominación de estos puntos como conjuntos de nivel.

Sea la función $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, el conjunto de puntos $x_1, x_2, ..., x_n$ que satisfacen la condición de hacer $f(x_1, x_2, ..., x_n) = c$ es un conjunto de nivel.

Ejemplo 4

Representar gráficamente la función $z = -x^2 \cdot y^2$ y algunas de sus curvas de nivel

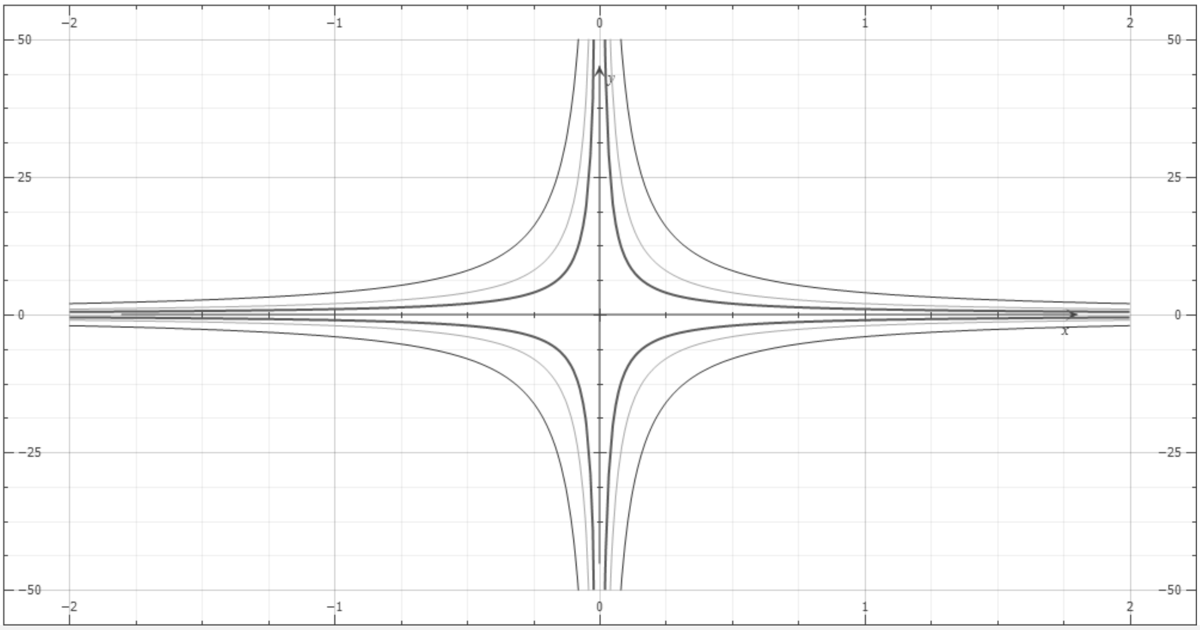
Figura 8: representación gráfica de $z = -x^2 \cdot y^2$



Teniendo en cuenta que z toma sólo valores negativos se le puede asignar, por ejemplo, los valores $z=-1$, $z=-4$ y $z=-16$ a los planos horizontales que definirán tres curvas de nivel.

Las mismas se observan en la Figura 8:

Figura 9: algunas curvas de nivel de $z = -x^2 \cdot y^2$



2. Límites y continuidad

Los conceptos de límite y continuidad se pueden extender fácilmente a funciones de varias variables.

Sea la función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(\mathbf{x})$. Se dice que $f(\mathbf{x})$ tiene un **límite** L cuando $\mathbf{x} = x_1, x_2, \ldots, x_n$ tiende a $\mathbf{x}^\bullet = x^\bullet{}_1, x^\bullet{}_2, \ldots, x^\bullet{}_n$, y se escribe

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^\bullet} f(\mathbf{x}) = L \qquad [3]$$

si para cada $\varepsilon > 0$ (no importa cuán pequeño) existe un correspondiente $\delta(\varepsilon, \mathbf{x}^\bullet) > 0$ tal que $|f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon$ siempre que $0 < |\mathbf{x} - \mathbf{x}^\bullet| < \delta$. Es decir, $f(\mathbf{x})$ se puede acercar arbitrariamente a L haciendo $\mathbf{x}$ suficientemente cercana a $\mathbf{x}^\bullet$

Sea la función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(\mathbf{x})$. Se dice que $f(\mathbf{x})$ es continua en $\mathbf{x}^\bullet$ si

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^\bullet} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^\bullet) \qquad [4]$$

En términos de ε y δ, $f(\mathbf{x})$ es continua en $\mathbf{x}^\bullet$ si para cada $\varepsilon > 0$ (no importa cuán pequeño) existe un correspondiente $\delta(\varepsilon, \mathbf{x}^\bullet) > 0$ tal que $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^\bullet)| < \varepsilon$ siempre que $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}^\bullet) < \delta$, definiendo $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}^\bullet)$ como en [445]. Si $f(\mathbf{x})$ no es continua, entonces es discontinua.

2.1. Propiedades del límite de funciones de varias variables

Si $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^\bullet} f(\mathbf{x}) = L$, $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^\bullet} g(\mathbf{x}) = M$ y λ es un escalar, entonces

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^\bullet} [f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})] = L + M \qquad \text{(límite de una suma)} \qquad [5]$$

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^\bullet} [\lambda \cdot f(\mathbf{x})] = \lambda \cdot L \qquad \text{(límite del producto por una constante)} \qquad [6]$$

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^*}\left[f(\mathbf{x})\cdot g(\mathbf{x})\right]=L\cdot M \qquad \text{(límite de un producto)} \qquad [7]$$

Ejemplo 4:

Si $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$ y si existen los límites $\lim\limits_{x\to a} f(x,y)\wedge\lim\limits_{y\to b} f(x,y)$, demostrar que

$$\lim_{x\to a}\left[\lim_{y\to b} f(x,y)\right]=\lim_{y\to b}\left[\lim_{x\to a} f(x,y)\right] \qquad [8]$$

Resolución:

Por la definición de límite de una función definida en $\mathbb{R}^2$, se tiene

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L \quad\Rightarrow\quad \left|f(x,y)-L\right|<\varepsilon \text{ si } \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta \qquad [9]$$

Haciendo tender primero $x\to a$, manteniendo y constante, se obtiene en general una función sólo de la variable y, en este caso se la indica con $g(y)$, que debe cumplir con la definición de límite para el caso de una variable independiente.

$$\lim_{x\to a} f(x,y)=g(y) \quad\Rightarrow\quad \left|f(x,y)-g(y)\right|<\varepsilon \quad \text{si} \quad |x-a|<\delta^* \qquad [10]$$

el número ε es arbitrariamente pequeño y positivo, mientras que δ^* se determina en función de ε.

Si se calcula ahora el límite de $g(y)$ cuando $y\to b$, se tiene

$$\lim_{y\to b} g(y)=L_1 \quad\Rightarrow\quad \left|g(y)-L_1\right|<\varepsilon \quad \text{si} \quad |y-b|<\delta^* \qquad [11]$$

sumando [10 y [11], se tiene

$$\left|f(x,y)-g(y)\right|+\left|g(y)-L_1\right|<2\cdot\varepsilon \quad \text{si} \quad |x\text{-}a|<\delta^*\wedge|y\text{-}b|<\delta^* \qquad [12]$$

y, operando

$$\left|f(x,y)-L_1\right|<2\cdot\varepsilon \quad \text{si} \quad |x\text{-}a|<\delta^*\wedge|y\text{-}b|<\delta^* \qquad [13]$$

Como

$$|x\text{-}a|<\delta^*\wedge|y\text{-}b|<\delta^*\Rightarrow\sqrt{(x\text{-}a)^2+(y\text{-}b)^2}<\delta \quad \text{si} \quad \delta^*<\sqrt{\delta^2/2} \qquad [14]$$

entonces siempre se puede encontrar un valor de δ^* que satisfaga [10] y [11], afirmando que [13] implica que $L_1=L$.

Procediendo de la misma manera, pero cambiando el orden, se tiene

$$\lim_{y\to b} f(x,y)=h(x) \quad\Rightarrow\quad \left|f(x,y)-h(x)\right|<\varepsilon \quad \text{si} \quad |y-b|<\delta^* \qquad [15]$$

$$\lim_{x\to a} h(y)=L_2 \quad\Rightarrow\quad \left|h(x)-L_2\right|<\varepsilon \quad \text{si} \quad |x-a|<\delta^* \qquad [16]$$

$$\left|f(x,y)-h(y)\right|+\left|h(y)-L_2\right|<2\cdot\varepsilon \qquad [17]$$

$$\left|f(x,y)-L_2\right|<2\cdot\varepsilon \qquad [18]$$

y entonces siempre se puede encontrar un valor de δ^* que satisfaga [15] y [16], afirmando que [18] implica que $L_2 = L$.

Por lo tanto resulta $L_1 = L_2 = L$, que es lo que se quería demostrar.

3. Derivadas Parciales

3.1. Derivadas Parciales de Funciones Reales de dos variables

Sea $f(x,y)$ una función real de dos variables reales independientes, x e y, definida en un entorno de un punto $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$.

Si se mantiene y constante, es decir $y = y_0$, entonces $f(x,y) = f(x,y_0)$ depende sólo de x.

Si existe la derivada de $f(x,y_0)$ respecto de x para un valor $x = x_0$, entonces el valor de esta derivada se denomina derivada parcial de $f(x,y)$ respecto de x en el punto (x_0, y_0) y la notación que se emplea generalmente es $\partial f / \partial x$ o bien f_x.

Se tiene, por definición de derivada,

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \qquad [19]$$

En forma similar se define la derivada parcial de $z = f(x,y)$ respecto de y; ahora se mantiene x constante, es decir igual a x_0, y derivando $f(x_0, y)$ respecto de y. Entonces

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta x) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} \qquad [20]$$

Queda claro que los valores de estas dos derivadas parciales dependen, en general, del punto (x_0, y_0). Por consiguiente, las derivadas parciales $\partial f / \partial x$ y $\partial f / \partial y$ en un punto variable (x, y) son funciones de x y de y.

La función $\partial f / \partial x$ se obtiene como en el cálculo ordinario de una variable derivando $z = f(x,y)$ respecto de x, tratando a y como a una constante.

Asimismo $\partial f / \partial y$ es el resultado de derivar $z = f(x,y)$ respecto de y, tratando a x como a una constante.

Ejemplo 5:

Determinar $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ si $f(x,y) = x^2 y + x \cdot \operatorname{sen} y$

Resolución:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + \operatorname{sen} y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + x \cdot \cos y$$

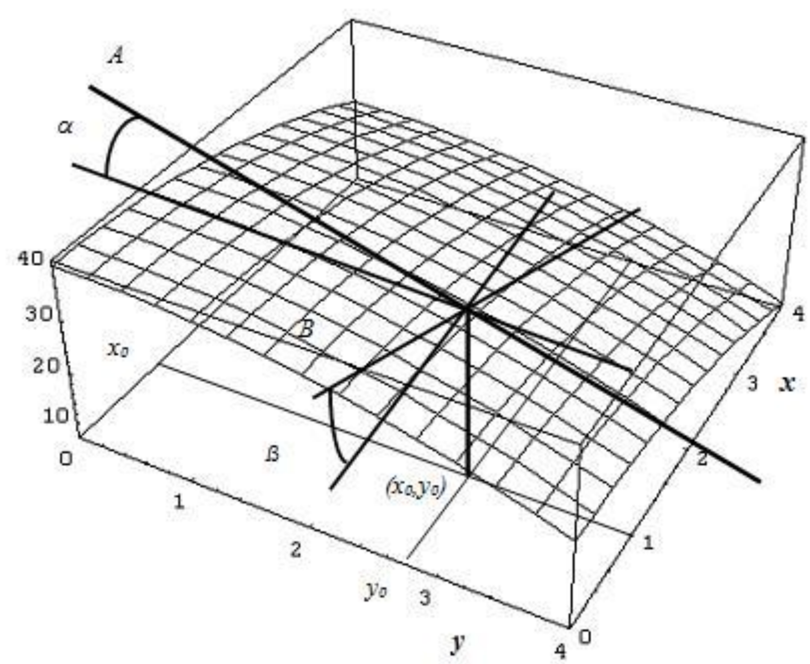
3.2. Interpretación Geométrica

La función $f(x,y)$ puede representarse mediante una superficie en el espacio. La ecuación $x = x_0$ representa entonces un plano vertical cuya intersección con dicha superficie determina una curva.

La derivada parcial f_y en el punto $\left(x_0, y_0\right)$ es la pendiente de la línea A, tangente a la curva, que forma un ángulo α con la horizontal, y está dada por la ecuación [20]. Ver figura 9.

De modo similar, la derivada parcial f_x en $\left(x_0, y_0\right)$ es la pendiente de la línea B, tangente a la curva que resulta de la intersección de la superficie con el plano $y = y_0$, en $\left(x_0, y_0\right)$.

Figura 10: representación geométrica de las derivadas parciales



3.3. Funciones escalares de más de dos variables independientes

Si se considera una función $f\left(x,y,z\right)$ de tres variables independientes, entonces existirán tres derivadas parciales de primer orden, $f_x\left(x,y,z\right)$, $f_y\left(x,y,z\right)$, $f_z\left(x,y,z\right)$.

En este caso, f_x se obtiene derivando f respecto de x tratando tanto a y como a z constantes.

Así, en analogía con [19], se tiene

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\left(x_0,y_0,z_0\right)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(x_0 + \Delta x , y_0 , z_0\right) - f\left(x_0,y_0,z_0\right)}{\Delta x} \qquad [21]$$

y el mismo razonamiento se puede continuar extender un número de n variables.

La noción de derivada parcial de una función escalar de varias variables asocia la rapidez con la que varía una función con el cambio en sólo una de las variables independientes.

<u>*Ejemplo 6:*</u>

Una Empresa de Mudanzas calcula el costo del flete mediante la siguiente fórmula :

$$f = l \cdot s \cdot p + t \cdot \left(m + a\right) + i \qquad [22]$$

donde

$f[\$]$	costo de flete
$l[\text{km}]$	recorrido (habitual $=1200$)
$s[\text{litro / km}]$	consumo específico de combustibles y lubricantes $=0.05$
$p[\$ / \text{litro}]$	precio de combustibles y lubricantes $=2.0$
$t[\text{horas}]$	duración prevista para el transporte, a razón de $50\ \text{km / hora}$
$m[\$ / \text{hora}]$	costo horario del conductor $=6$
$a[\$ / \text{hora}]$	costo horario del vehículo, amortización $=3.50$
$i[\$]$	permiso de la Dirección de Transportes por cada viaje $=250$

El Gobierno ha dispuesto aumentar su recaudación impositiva y, entre otras cosas, está analizando, en el rubro transportes, si aplicará un incremento del orden del 10% sobre los combustibles y lubricantes o bien sobre los permisos por viaje.

Recomendar a los accionistas de la Empresa de Mudanzas que decisión deben apoyar. Verificar las conclusiones.

Resolución:

Las derivadas parciales miden la velocidad de variación de una función respecto del cambio en una variable.

En este caso, se tiene la función $f(l,s,p,t,m,a,i)$, donde variarán p e i, manteniéndose constante el resto.

Los valores las derivadas se deben determinar en el punto P_0, que es la referencia a partir de la cual se analizarán las variaciones.

En este caso, $P_0=(1200, 0.05, 2.0, 36, 6, 3.5, 250)$.

$$f_p(P_0)=l_0\cdot s_0=1200\cdot 0.05=60 \qquad [23]$$

$$f_i(P_0)=1 \qquad [24]$$

Estos resultados muestran la variación absoluta del costo de la mudanza por cada unidad de variación de las variables independientes, en este caso p e i.

Se analizará ahora el significado del incremento del 10% en las variables. Para el caso de p, esto representa 0.2 unidades, mientras que para i, representa 25 unidades. En definitiva, midiendo la variación parcial que provoca cada incremento, se tiene

$$\Delta\ f_{p10\%}(P_0)=60\cdot 0.2=12 \qquad [25]$$

$$\Delta\ f_{i10\%}(P_0)=1\cdot 25=25 \qquad [26]$$

Para las condiciones habituales, para la Empresa será menos perjudicial un aumento en el precio de los combustibles.

Si se profundiza el análisis, a partir de la fórmula [23] se puede establecer una relación entre el recorrido de la mudanza y la variación en el costo debida al incremento, ya sea en los combustibles y lubricantes o bien sobre los permisos por viaje. Se establecen las ecuaciones

$$\Delta\ f_{p10\%}(P_0)=l\cdot 0.05\cdot 0.2=l\cdot 0.01 \qquad [27]$$

$$\Delta\ f_{i10\%}(P_0)=25 \qquad [28]$$

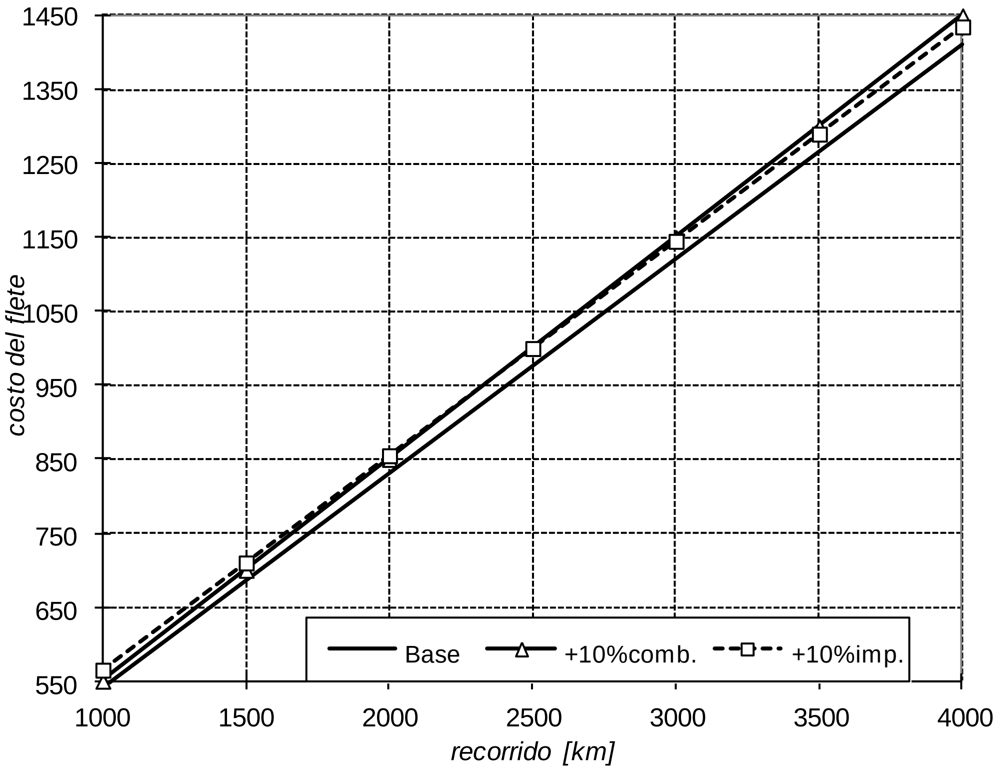
Si se comparan, se llega a la conclusión de que para recorridos de hasta $2500\,\text{km}$ se mantiene la conclusión anterior.

Para verificar, se tabula y representa gráficamente la evolución del costo en función de la distancia, para el costo base como así también con la aplicación de los aumentos. Tabla 2 y figura 10.

Tabla 2. Problema de la compañía de mudanzas

l_0	$f(P_0)$	$f(P_0)p+$	$f(P_0)i+$	s	p	t	m	a	I	$p+10\%$	$i+10\%$
1000	26,87	27,20	27,70	0,05	2,00	20	6,00	3,50	250	2,20	275
1500	28,53	29,03	29,37	0,05	2,00	30	6,00	3,50	250	2,20	275
2000	30,20	30,87	31,03	0,05	2,00	40	6,00	3,50	250	2,20	275
2500	31,87	32,70	32,70	0,05	2,00	50	6,00	3,50	250	2,20	275
3000	33,53	34,53	34,37	0,05	2,00	60	6,00	3,50	250	2,20	275
3500	35,20	36,37	36,03	0,05	2,00	70	6,00	3,50	250	2,20	275
4000	36,87	38,20	37,70	0,05	2,00	80	6,00	3,50	250	2,20	275

Figura 11. Problema de la compañía de mudanzas



Finalmente, la recomendación será que si la Empresa habitualmente transporta en distancias de hasta $2500\,\text{km}$, le convendrá defender la posición del aumento de combustibles y lubricantes.

Ejemplo 7:

La función demanda de la gaseosa nº 1 viene dada por

$$D_1 = 1000 - 10 \cdot p^2{}_1 + 10 \cdot p^2{}_2 \qquad [29]$$

en la que $p_1 = 1.25$ es el precio actual de la botella de un litro y medio de la gaseosa nº 1 y $p_2 = 1.05$ corresponde al precio de la gaseosa n° 2, en igual presentación.

Bajo estas condiciones: ¿qué afectará más a la demanda D_1: una leve disminución en el precio p_2 o un leve aumento en el precio p_1?

Resolución:

Se calculan las derivadas parciales de D_1, y se evalúan para los valores actuales de p_1 , p_2 y D_1 resultando

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial D_1}{\partial p_1} &= -2\cdot 10\cdot p_1 = -25 \\ \frac{\partial D_1}{\partial p_2} &= 2\cdot 10\cdot p_2 = 21 \end{aligned}\right\} \qquad [30]$$

El significado de estos resultados se interpreta de la siguiente manera :

- ✓ Si $p_1 = 1.25$ y $p_2 = 1.05$, la demanda D_1 es de 995.4 unidades.
- ✓ Una leve disminución en el precio p_2 hará caer la demanda en 19 unidades.
- ✓ Un leve aumento en el precio p_1 hará caer la demanda en 25 unidades.
- ✓ Conclusión: esta última situación afectará más la demanda D_1.

Corresponde el siguiente comentario: los signos de las derivadas parciales indican en qué sentido, con respecto a la variación de cada variable, variará la función. Si el signo de la derivada parcial es positivo, la función crece y decrece junto con la variable. Si es negativo, cuando la variable crece la función decrece y viceversa.

3.4. Derivadas sucesivas

Para un campo escalar dependiente de dos variables, las derivadas parciales $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ se llaman derivadas parciales primeras, o derivadas parciales de primer orden. Si estas funciones de (x, y) son derivadas una vez más, se obtienen las cuatro derivadas parciales segundas o derivadas parciales de segundo orden. La notación utilizada es

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f_{xx} \qquad [31]$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f_{yx} \qquad [32]$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f_{xy} \qquad [33]$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f_{yy} \qquad [34]$$

Se puede demostrar que si todas las derivadas involucradas son funciones continuas, entonces las dos *derivadas parciales cruzadas* son iguales, de manera que no es problema el orden de derivación, o sea que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} \qquad [35]$$

Por definición, resulta

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \qquad [36]$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y} \qquad [37]$$

aplicando a estas expresiones una nueva derivada parcial, se tiene

$$\left.\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right|_{(x_0,y_0)} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)}{\Delta x}-\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}}{\Delta y} \qquad [38]$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right|_{(x_0,y_0)} = \lim_{\substack{\Delta y\to 0\\ \Delta x\to 0}}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,y_0)+f(x_0,y_0)}{\Delta y\cdot\Delta x} \qquad [39]$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right|_{(x_0,y_0)} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,y_0)}{\Delta y}-\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}}{\Delta x} \qquad [40]$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right|_{(x_0,y_0)} = \lim_{\substack{\Delta y\to 0\\ \Delta x\to 0}}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0+\Delta y)+f(x_0,y_0)}{\Delta x\cdot\Delta y} \qquad [41]$$

siendo iguales las expresiones [40] y [41], que es lo que se quería demostrar

Ejemplo 8:

Determinar f_{xx} , f_{yy} , f_{xy} , f_{yx} si $z = f(x,y) = x^2 y + x\cdot\operatorname{sen} y$

Resolución:

$$\left.\begin{aligned} f_{xx} &= 2y\\ f_{yy} &= -x\cdot\operatorname{sen} y\\ f_{xy} &= 2x+\cos y\\ f_{yx} &= 2x+\cos y \end{aligned}\right\} \qquad [42]$$

En el caso de tres variables independientes, diferenciando f_x , f_y y f_z nuevamente en esta forma, se obtienen las derivadas parciales segundas de f , y así sucesivamente.

Ejemplo 9:

Determinar las derivadas parciales de primer y segundo orden de

$$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+xy\cdot e^z$$

Resolución:

$$\left.\begin{aligned} &f_x = 2x+y\cdot e^z \quad , \quad f_y = 2y+x\cdot e^z \quad , \quad f_z = 2z+xy\cdot e^z\\ &f_{xx} = 2 \quad , \quad f_{yy} = 2 \quad , \quad f_{zz} = 2+xy\cdot e^z\\ &f_{xy} = f_{yx} = e^z \quad , \quad f_{xz} = f_{zx} = y\cdot e^z \quad , \quad f_{yz} = f_{zy} = x\cdot e^z \end{aligned}\right\} \qquad [43]$$

4. Concepto de derivada direccional

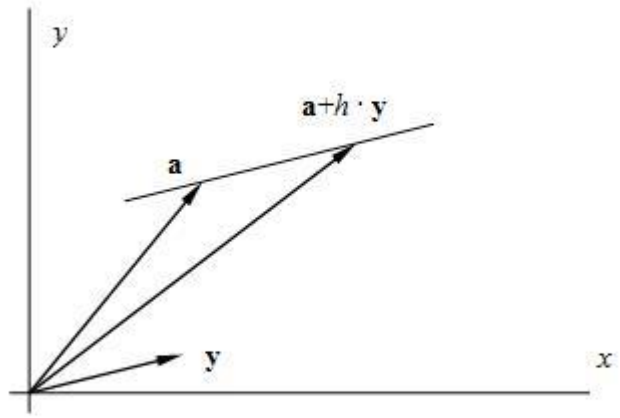
Sea f un campo escalar definido en un conjunto S de $\mathbb{R}^n$. Sea $\mathbf{a} = x_1, \dots, x_n$ un punto interior a S. El análisis de la variación de f cuando las variables se desplazan hacia puntos próximos a $\mathbf{a}$ lleva al concepto de derivada de un campo escalar respecto con respecto a una dirección.

En general, la variación de los valores del campo dependerá de la dirección en que nos movamos a partir de $\mathbf{a}$.

Si esta dirección se representa mediante otro vector, $\mathbf{y}$ cuyo módulo sea unitario, se puede ver en la figura 11 como las variables se desplazan desde el punto $\mathbf{a}$ hacia otro punto $\mathbf{a}+\mathbf{y}$ siguiendo el segmento de recta que une $\mathbf{a}$ con $\mathbf{a}+\mathbf{y}$. Cada punto de este segmento tiene la forma $\mathbf{a}+h\cdot\mathbf{y}$, donde h es un número real.

La distancia desde $\mathbf{a}$ hasta $\mathbf{a}+h\cdot\mathbf{y}$ es $\|h\cdot\mathbf{y}\|=|h|\cdot\|\mathbf{y}\|$.

Figura 12. Concepto de derivada direccional de un campo escalar



Si se elige h de tal forma que sea $h\neq 0$, $\mathbf{a}+h\cdot\mathbf{y}$ pertenezca a S se puede construir el siguiente cociente de diferencias :

$$\frac{f(\mathbf{a}+h\cdot\mathbf{y})-f(\mathbf{a})}{h} \qquad [44]$$

El numerador de este cociente pone de manifiesto es cambio en el valor de f cuando las variable independientes se mueven desde $\mathbf{a}$ hasta $\mathbf{a}+h\cdot\mathbf{y}$.

4.1. Definición

Dado un campo escalar $f:S\to\mathbb{R}$, donde $S\subseteq\mathbb{R}^n$. Sean $\mathbf{a}$ un punto interior a S e $\mathbf{y}$ un vector unitario en $\mathbb{R}^n$. La *derivada* de f en $\mathbf{a}$ *en la dirección de* $\mathbf{y}$ se representa con el símbolo $f'(\mathbf{a};\mathbf{y})$ y se define

$$f'(\mathbf{a};\mathbf{y})=\lim_{h\to 0}\frac{f(\mathbf{a}+h\cdot\mathbf{y})-f(\mathbf{a})}{h} \qquad [45]$$

cuando este límite existe.

En el caso de que $\mathbb{R}^n$ sea $\mathbb{R}^2$, la expresión [45] se puede reescribir teniendo en cuenta que las variables son x,y , la distancia $h=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$, las componentes del vector $\mathbf{y}$, unitario, son sus cosenos directores, $\cos\alpha \wedge \operatorname{sen}\alpha$, las componentes de $\mathbf{a}$ son $\mathbf{a}=(a,b)$

$$f'((a,b);(\cos\alpha,\operatorname{sen}\alpha))=\lim_{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\to 0}\frac{f((a+x\cos\alpha\,,b+y\operatorname{sen}\alpha))-f(a,b)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} \qquad [46]$$

5. Teorema del Valor Medio para funciones de dos variables. Diferencial

Sean $f(x,y)$ y sus derivadas parciales de primer orden continuas en una región abierta, S y sean (a,b) y (x,y) puntos de S tal que la línea recta que une estos puntos se ubica totalmente dentro de S. Entonces existe un punto (ξ,η), perteneciente a esta línea, entre sus extremos, tal que

$$f(x,y)=f(a,b)+f_x(\xi,\eta)\cdot(x-a)+f_y(\xi,\eta)\cdot(y-b) \qquad [47]$$

Sea

$$g(t)=f\left(a+t\cdot(x-a),b+t\cdot(y-b)\right)$$

$$x=a+t\cdot(x-a) \qquad [48]$$

$$y=b+t\cdot(y-b)$$

derivando como función compuesta a $g(t)$

$$\frac{dg}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot(y-b) \qquad [49]$$

Aplicando el teorema del valor medio para funciones de una variable independiente a $g(t)$ en el intervalo $[0,1]$, se tiene

$$g(1)-g(0)=g'(t_1)\cdot(1-0) \qquad [50]$$

donde $0<t_1<1$.

Haciendo $\xi=a+t_1\cdot(x-a)$ y $\eta=b+t_1\cdot(y-b)$ y de acuerdo a [48]

$$g(1)=f(x,y)$$

$$g(0)=f(a,b) \qquad [51]$$

$$g'(t_1)=f_x(\xi,\eta)\cdot(x-a)+f_y(\xi,\eta)\cdot(y-b)$$

y reemplazando [51] en [50] se obtiene [47], que es lo que se quería demostrar.

Comentario 1: El Teorema del Valor Medio se puede extender a funciones de varias variables en general, resultando, si se trata de $f(x_1,\ldots,x_n)$

$$f(x_1,\ldots,x_n)=f(x_{1_0},\ldots,x_{n_0})+f_{x_1}(\theta_1,\ldots,\theta_n)\cdot(x_1-x_{1_0})+\cdots+f_{x_n}(\theta_1,\ldots,\theta_n)\cdot(x_n-x_{n_0}) \qquad [52]$$

Comentario 2: El Teorema del Valor Medio se puede expresar

$$\Delta f(x_1,\ldots,x_n)=\sum_1^n\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_{1_0},\ldots,x_{n_0})\cdot(x_i-x_{i_0}) \qquad [53]$$

Comentario 3: El Teorema del Valor Medio permite establecer que "calculada una magnitud en función de otras, los errores en las medidas de éstas producen un error en aquella, el cual es igual a la suma de los productos de los errores multiplicados por las respectivas derivadas".

Ejemplo 12:

Se conocen los valores aproximados de los lados de un triángulo $a\cong 100\text{ m}$, $b\cong 200\text{ m}$ y el ángulo comprendido $\alpha=30^\circ$. Se sabe que el error cometido al medir cada lado es menos de 0.01 m por medición, y menos de 10 minutos al medir el ángulo. Determinar el máximo error con el que se calculará el área del triángulo con la fórmula $A=(1/2)\cdot a\cdot b\cdot \operatorname{sen}\alpha$.

Resolución:

Aplicando el Teorema del valor Medio a la función $A(a,b,\alpha)$ alrededor del punto $\left(100,200,\frac{\pi}{6}\right)$, se tiene que

$$|\Delta A| \le \left|\Delta a \cdot \frac{\partial A}{\partial a}\right| + \left|\Delta b \cdot \frac{\partial A}{\partial b}\right| + \left|\Delta \alpha \cdot \frac{\partial A}{\partial \alpha}\right|$$

$$\le \left|\Delta a \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot b \cdot \operatorname{sen}\alpha\right)\right| + \left|\Delta b \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot \operatorname{sen}\alpha\right)\right| + \left|\Delta \alpha \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \cos\alpha\right)\right|$$

$$\le \left|0.01 \cdot \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot \frac{1}{2}\right| + \left|0.01 \cdot \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot \frac{1}{2}\right| + \left|0.003 \cdot \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 200 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right|$$

por lo que resulta $|\Delta A| \le 26.73$ metros cuadrados.

6. Diferencial de una función de dos variables

Para el caso de una función de una variable, se define su derivada en un punto como

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad [54]$$

o, de otra forma

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a) \cdot (x - a)}{x - a} = 0 \qquad [55]$$

El numerador, escrito de la forma

$$f(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a) \qquad [56]$$

es la mejor aproximación lineal de la función $f(x)$ en el punto *a*.

Es la recta tangente a la función en el punto. Cuando existe la derivada $f'(a)$ tal que se satisfaga [55], se dice que $f(x)$ es diferenciable en a y su diferencial es $df(a) = f'(a)\,dx$.

Para generalizar este concepto al ámbito de las funciones de dos variables, se propone un planteo similar, a partir de la definición de derivada direccional dada por [46]:

$$\lim_{(x,y) \to (a,b)} \frac{f(x,y) - f(a,b) - f_x(a,b) \cdot (x - a) - f_y(a,b) \cdot (y - b)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} = 0 \qquad [57]$$

Esta última ecuación significa geométricamente que existe una entorno del punto (a,b) tal que la expresión $f(a,b) + f_x(a,b) \cdot (x - a) + f_y(a,b) \cdot (y - b)$ es una buena aproximación al valor de la función $f(x,y)$ en todo punto (x,y) del entorno.

En efecto, $f(a,b) + f_x(a,b) \cdot (x - a) + f_y(a,b) \cdot (y - b)$ es la mejor aproximación lineal de la función en el entorno, y es la ecuación del plano tangente a la superficie $f(x,y)$ en $\mathbf{a} = (a,b)$

Cuando tanto *x* como *y* tienden a *a* y a *b*, respectivamente, se define al diferencial de *f* como:

$$df(a,b) = f_x(a,b) \cdot dx + f_y(a,b) \cdot dy \qquad [58]$$

7. Derivadas de funciones compuestas. Regla de la cadena

Sean $f(x,y)$, $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ continuas en cada punto de una región abierta S en el plano x,y. Sean $x(t)$, $y(t)$ funciones diferenciables de t sobre algún intervalo abierto T sobre el eje t, tal que el punto $(x(t), y(t))$ pertenece a S cualquiera sea el valor de t en T.

Entonces la función compuesta

$$f\left(x(t),y(t)\right) \equiv F(t) \qquad [59]$$

es una función diferenciable de t para todo t en T, y

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} \qquad [60]$$

Demostración

Sea $t \in T$ y sea Δt lo suficientemente pequeño como para que también $t + \Delta t \in T$. Se definen

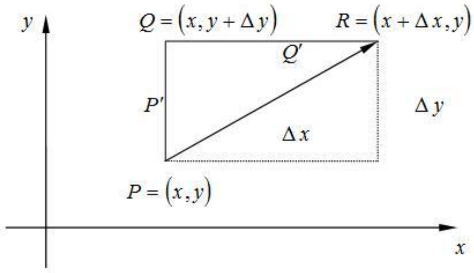
$$\left.\begin{array}{l} \Delta x \equiv x\left(t+\Delta t\right) - x(t) \\ \Delta y \equiv y\left(t+\Delta t\right) - y(t) \end{array}\right\} \qquad [61]$$

entonces

$$\begin{aligned} \Delta F &= F\left(t+\Delta t\right) - F(t) \\ &= f\left(x\left(t+\Delta t\right), y\left(t+\Delta t\right)\right) - f\left(x(t),y(t)\right) \\ &= f\left(x+\Delta x, y+\Delta y\right) - f\left(x,y\right) \\ &= \left[f\left(x,y+\Delta y\right) - f\left(x,y\right)\right] + \left[f\left(x+\Delta x,y+\Delta y\right) - f\left(x,y+\Delta y\right)\right] \\ &= f\Big|_P^Q + f\Big|_Q^R \end{aligned} \qquad [62]$$

donde P, Q, R son puntos que se muestran en la figura 11

Figura 12. Derivación de funciones compuestas



Aplicando el Teorema del Valor Medio[1], a cada término de [62], se tiene:

$$\Delta F = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P'} \Delta y \quad + \quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{Q'} \Delta x \qquad [63]$$

donde Q' es algún punto entre Q y R, mientras que P' es algún punto entre P y Q.

Dividiendo [63] por Δt y haciendo $\Delta t \to 0$, lo que, de acuerdo a [61] implica que

$$\left.\begin{array}{l} \Delta x \to 0 \quad , \quad Q' \to P \\ \Delta y \to 0 \quad , \quad P' \to P \end{array}\right\} \qquad [64]$$

[1] **Teorema del Valor Medio:** Si $f(x)$ es continua en $a \le x \le b$, y existe $f'(x)$ en $a \le x \le b$, entonces existe por lo menos un punto x_1 entre a y b tal que $f(b) - f(a) = f'\left(x_1\right)\cdot(b-a)$.

resulta que

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{Q'} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{P'} \frac{\Delta y}{\Delta t} \right) \qquad [65]$$

se convierte en

$$\frac{dF}{dt} = \left(\lim_{Q' \to P} \frac{\partial f}{\partial x} \right) \frac{dx}{dt} + \left(\lim_{P' \to P} \frac{\partial f}{\partial y} \right) \frac{dy}{dt} \qquad [66]$$

y como las derivadas parciales f_x, f_y son continuas, el límite de f_x cuando $Q' \to P'$ es igual a f_x en P, y de manera similar para f_y. De esta manera, [51] resulta en

$$\frac{dF}{dt} = f_x(x,y) \cdot \frac{dx}{dt} + f_y(x,y) \cdot \frac{dy}{dt} \qquad [67]$$

que es lo que se quería demostrar.

<u>*Ejemplo 10:*</u>

Determinar (dR/dt) si $R(t) \equiv r(x(t), y(t))$, donde $r(x,y) = x^2 y - e^{2y}$, $x = 3t^2$, $y = \operatorname{sen} t$.

<u>*Resolución:*</u>

Aplicando [52], se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= \frac{\partial r}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial r}{\partial y}\frac{dy}{dt} \\ &= (2xy)(6t) + (x^2 - 2e^{2y})(\cos t) \\ &= 36t^3 \operatorname{sen} t + (9t^4 - 2e^{2\operatorname{sen} t})\cos t \end{aligned}$$

<u>*Ejemplo 11:*</u>

Determinar (dF/dx) si $f(u,v) = f(u(x,y), v(x,y)) \equiv F(x,y)$, donde $f(u,v) = uv^2$, con $u = 3x - y$ $v = x^2 y$.

<u>*Resolución:*</u>

Utilizando [52]

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \\ &= (v^2)(3) + (2uv)(2xy) \\ &= 3x^4 y^2 + 4x^3 y^2 \cdot (3x - y) \\ &= 15x^4 y^2 - 4x^3 y^3 \end{aligned}$$

Comentario 1: La regla de la cadena se aplica también en este caso en que u y v son funciones de más de una variable (x e y) debido a que y se mantiene fija mientras se calcula $(\partial F/\partial x)$ de manera que $u(x,y)$ y $v(x,y)$ son, por el momento, consideradas funciones sólo de x.

Comentario 2: Hay dos juegos de variables: $\{x,y\}$ y $\{u,v\}$; $\partial/\partial x$ significa la derivada respecto de x con todas las otras variables del juego al que pertenece x, fijas; $\partial/\partial u$ significa la derivada respecto de u con todas las otras variables del juego al que pertenece u, fijas y así sucesivamente.

Comentario 3: La extensión a más variables resulta evidente. Si $f\left[x_1(t),\ldots,x_n(t)\right] \equiv F(t)$ entonces [52] se convierte en

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt} \qquad [68]$$

sujeta a las mismas condiciones que las impuestas en el caso de dos variables.

Comentario 4: Se discute la notación utilizada.

Si f es una función de x y, a su vez, x es una función de t, entonces se diferenciará $f(x)$ de $f(x(t))$ representando a esta última como $F(t)$. Es decir que es necesario introducir una nueva función, en este caso F debido a que las funciones f y F son, en general, distintas. Simplemente para ilustrarlo, sea $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $x = t^2$. Entonces $F(t) = \operatorname{sen}(t^2)$ y, por ejemplo $f(3) = \operatorname{sen} 3$, mientras que $F(3) = \operatorname{sen} 9$, y estos valores no son iguales.

8. Derivadas de funciones definidas en forma implícita

8.1. Funciones Implícitas y Jacobianos

Se dice que una ecuación $f(x,y) = 0$ [69]

constituye una relación sobre x e y.

Dependiendo del contexto, puede ser aconsejable cambiar el punto de vista y considerar a [69] a una ecuación que define implícitamente a y como función de x (o viceversa).

En este caso, se puede reformular [70] como

$$f(x, y(x)) = 0 \qquad [70]$$

porque ahora x es ahora la variable independiente e y la variable dependiente.

Ejemplo 12:

Considerar la relación $x^2 + 4y^2 - 4 = 0$ [71]

y reformularla para que defina a y como función implícita de x.

Resolución:

Se puede resolver algebraicamente la relación, que resulta en

$$y = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} \qquad [72]$$

En el ejemplo 12, es posible resolver [71].

En otros casos no es posible, como por ejemplo en la ecuación trascendental $2xy + \operatorname{sen} y = 3$. El siguiente teorema establece las condiciones suficientes para que exista una función $y(x)$ definida implícitamente por la relación $f(x,y) = 0$.

8.2. Teorema de la Función Implícita

Sea $f(x,y) = 0$ y además un par de números reales x_0, y_0 que la satisfacen, de manera que $f(x_0, y_0) = 0$. Sea $f(x,y)$ continua, junto con sus primeras derivadas, en algún intervalo de (x_0, y_0) con $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Entonces $f(x,y)=0$ implica unívocamente una función $y(x)$ en un entorno N de x_0 tal que $y(x_0)=y_0$, donde $y(x)$ es diferenciable en N. [2]

Ejemplo 13:

Considerar la relación $(y-2x)\cdot e^{y}-x^{2}+1=0$ y determinar si define a una función $y(x)$ en forma implícita cerca del punto $(1,2)$.

Resolución:

Las derivadas $\left.\begin{array}{l} f_x=-2e^{y}-2x \\ f_y=(y-2x+1)\cdot e^{y} \end{array}\right\}$ son continuas en todo el plano x,y.

Además $f_y(1,2)=e^{2}\neq 0$. Por lo tanto, de acuerdo al teorema de la función implícita existe la función $y(x)$ cerca de $(1,2)$.

Cómo obtener la función $y(x)$ es otra cuestión, ya que como la ecuación dada es trascendental, no puede ser resuelta algebraicamente.

8.3. Teorema de la Función Implícita. Caso multivariable

Sea el sistema de n ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} f_1(x_1,\dots,x_m,u_1,\dots,u_n)=0 \\ \vdots \\ f_n(x_1,\dots,x_m,u_1,\dots,u_n)=0 \end{array}\right\} \qquad [73]$$

que se satisface para los números reales $x_{1_0},\dots,x_{m_0},u_{1_0},\dots,u_{n_0}$.

Sean las funciones $f_1(x_1,\dots,x_m,u_1,\dots,u_n)$ hasta $f_n(x_1,\dots,x_m,u_1,\dots,u_n)$ continuas, junto con sus primeras derivadas en algún entorno de $x_{1_0},\dots,x_{m_0},u_{1_0},\dots,u_{n_0}$, con

$$\left.\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial u_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_n} \end{vmatrix}\right|_{x_{1_0},\dots,x_{m_0},u_{1_0},\dots,u_{n_0}} \neq 0 \qquad [74]$$

Entonces [73] define unívocamente a las funciones $u_1(x_1,\dots,x_m)$, $u_n(x_1,\dots,x_m)$ en algún entorno N de $(x_{1_0},\dots,x_{m_0})$, tal que $u_1(x_{1_0},\dots,x_{m_0})=u_{1_0},\dots,u_n(x_{1_0},\dots,x_{m_0})=u_{n_0}$, donde $u_1(x_1,\dots,x_m),\dots,u_n(x_1,\dots,x_m)$ son continuas, junto a sus primeras drivadas, en N.

8.4. Jacobianos

El determinante [74] se conoce como el Jacobiano de $f_1,\dots,f_n$ con respecto a $u_1,\dots,u_n$. Para representarlo se utiliza la notación

---

[2] Que $f(x,y)$ sea C^{1} significa que las derivadas parciales de primer orden f_x, f_y son continuas. En general, que $f(x,y)$ sea C^{n} significa que las derivadas parciales de orden n son continuas.

$$J(u_1,\ldots,u_n) \equiv \frac{\partial(f_1,\ldots,f_n)}{\partial(u_1,\ldots,u_n)} \qquad [75]$$

8.5. Derivadas parciales de funciones definidas en forma implícita por una ecuación

Sea $y(x_1,\ldots,x_m)$ definida por la función $f(x_1,\ldots,x_m,y) \equiv F(x_1,\ldots,x_m) = 0$ en forma implícita. Las derivadas parciales de la función y respecto de las variables independientes $x_1,\ldots,x_m$ serán

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}} \quad \forall\, i = 1,\ldots,m \qquad [76]$$

A este resultado se llega derivando la función F respecto de x_i aplicando la regla de la cadena. Al ser $F = 0$ cualquiera de sus derivadas es 0. Entonces

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\underbrace{\frac{\partial x_1}{\partial x_i}}_{=0} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_i}\underbrace{\frac{\partial x_i}{\partial x_i}}_{=1} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m}\underbrace{\frac{\partial x_m}{\partial x_i}}_{=0} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_i} = 0 \qquad [77]$$

por lo tanto

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_i} = 0 \qquad [78]$$

de donde surge [76].

8.6. Derivadas parciales de funciones definidas en forma implícita por un sistema de ecuaciones. Deducción para el caso de 2 ecuaciones con 3 variables

Sea el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} f_1(x,y,z) &= 0 \\ f_2(x,y,z) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad [79]$$

si se verifica que

$$J_{(x_0,y_0,z_0)} = \frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(y,z)} \neq 0 \qquad [80]$$

y que tanto las funciones dadas como sus derivadas primeras son continuas en una región $S \subseteq \mathbb{R}^2$, entonces quedan definidas las funciones

$$\begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$$

y se puede escribir

$$\left.\begin{aligned} f_1(x,y(x),z(x)) &= F(x) = 0 \\ f_2(x,y(x),z(x)) &= F(x) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad [81]$$

y derivando cada ecuación como función compuesta, se obtiene

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial x} &= \frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{dz}{dx} = 0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} &= \frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f_2}{\partial z}\frac{dz}{dx} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad [82]$$

de donde

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\begin{vmatrix}-\frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial z}\\ -\frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial z}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z}\\ \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z}\end{vmatrix}}=-\frac{\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x,z)}}{\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(y,z)}} \qquad [83]$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\begin{vmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial y} & -\frac{\partial f_1}{\partial x}\\ \frac{\partial f_2}{\partial y} & -\frac{\partial f_2}{\partial x}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z}\\ \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z}\end{vmatrix}}=-\frac{\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(y,x)}}{\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(y,z)}} \qquad [84]$$

Para un sistema más general, con n funciones F_n y n funciones u_n definidas en forma implícita como funciones de m incógnitas x_m, se tiene

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=-\frac{\frac{\partial\left(f_1,\ldots,f_n\right)}{\partial\left(u_1,\ldots,u_i\leftarrow x_j,\ldots,u_n\right)}}{\frac{\partial\left(f_1,\ldots,f_n\right)}{\partial\left(u_1,\ldots,u_i,\ldots,u_n\right)}} \qquad [85]$$

en la que $y_i \leftarrow x_j$ se interpreta que el Jacobiano del numerador se obtiene partiendo del correspondiente al denominador, y reemplazando la función implícita que se deriva (genéricamente y_i) por la variable independiente respecto de la cual se deriva (genéricamente x_j).

8.7. Los casos más generales

En general, si $n=m$, se puede interpretar que el juego de funciones u_i queda definido en forma implícita como función de las variables independientes x_j o, viceversa, que el juego de funciones x_j queda definido en forma implícita como función de las variables independientes u_i.

Sin embargo, en este caso, para las derivadas parciales de funciones definidas en forma implícita, se cumple en general que

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\neq\frac{1}{\frac{\partial x_j}{\partial u_i}} \quad , \text{ mientras que } \quad \frac{\partial(u_1,\ldots,u_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}=\frac{1}{\frac{\partial(x_1,\ldots,x_n)}{\partial(u_1,\ldots,u_n)}} \qquad [86]$$

<u>*Ejemplo 14:*</u>

Sea el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} x=r\cdot\cos\phi \\ y=r\cdot\operatorname{sen}\phi \end{array}\right\} \qquad [87]$$

determinar $x_r, x_\phi, y_r, y_\phi, r_x, r_y, \phi_x, \phi_y$.

Resolución:

Las primeras cuatro derivadas parciales se calculan directamente, ya que x e y están definidas en forma explícita como funciones de r y de ϕ :

$$x_r = \cos\phi \quad , \quad x_\phi = -r\cdot \operatorname{sen}\phi \quad , \quad y_r = \operatorname{sen}\phi \quad , \quad y_\phi = r\cdot\cos\phi \qquad [88]$$

Para calcular las restantes derivadas parciales, se puede despejar del sistema de ecuaciones a r y ϕ como funciones de x y de y, o bien resolver mediante las técnicas de funciones implícitas, que es el camino que se seguirá en este ejemplo.

El sistema de ecuaciones que define a r y ϕ como funciones de x y de y es

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x,y,r,\phi) = x - r\cdot\cos\phi = 0 \\ f_2(x,y,r,\phi) = y - r\operatorname{sen}\phi = 0 \end{array}\right\} \qquad [89]$$

aplicando [83], se tiene, para la función r :

$$\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x,\phi)}}{\dfrac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(r,\phi)}} = -\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial \phi} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial \phi}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial r} & \dfrac{\partial f_1}{\partial \phi} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial r} & \dfrac{\partial f_2}{\partial \phi}\end{vmatrix}}$$

$$= -\frac{1\cdot(-r\cdot\cos\phi) - 0\cdot(r\cdot\operatorname{sen}\phi)}{-\cos\phi\cdot(-r\cdot\cos\phi) - (-\operatorname{sen}\phi)\cdot r\cdot\operatorname{sen}\phi} = \frac{r\cdot\cos\phi}{r\cdot(\cos^2\phi + \operatorname{sen}^2\phi)} = \cos\phi$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial y} & \dfrac{\partial f_1}{\partial \phi} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial y} & \dfrac{\partial f_2}{\partial \phi}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial r} & \dfrac{\partial f_1}{\partial \phi} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial r} & \dfrac{\partial f_2}{\partial \phi}\end{vmatrix}} = \frac{r\cdot\operatorname{sen}\phi}{r\cdot(\cos^2\phi + \operatorname{sen}^2\phi)} = \operatorname{sen}\phi$$

De la misma forma, para ϕ resulta

$$\phi_x = -\frac{\operatorname{sen}\phi}{r}$$

$$\phi_y = \frac{\cos\phi}{r}$$

9. Comentario para el final del tema

En este capítulo se generaliza el concepto de función real de variable real (campo escalar) al problema multivariable.

Se establecen en primer lugar los elementos topológicos como conjunto, distancia, entorno, dominio, representación gráfica y curvas de nivel para luego definir límite, continuidad, derivación, diferenciación.

Finalmente se proponen recursos para interpretar estos conceptos y herramientas que permiten aplicarlos en la resolución de problemas.