Tema 4. Introducción a los sistemas de EDO de primer orden

1. Conceptos previos y objetivo del capítulo

De la misma manera que los sistemas de ecuaciones algebraicas pueden determinar los valores únicos para un conjunto de incógnitas que lo satisfacen, los sistemas de ecuaciones diferenciales pueden definir varias funciones desconocidas satisfagan cada una de las ecuaciones diferenciales que lo componen.

Problemas simples como por ejemplo ¿qué cantidad de gaseosa de 7 pesos el litro y de soda de 2,5 pesos el litro se deben mezclar para que resulten 200 litros de una nueva gaseosa de 6 pesos el litro? se resuelven rápidamente si se logra formar el sistema de ecuaciones algebraicas que lo representa.

Trasladando este razonamiento al campo de las ecuaciones diferenciales, resulta posible comprender que en diversos procesos pueden coexistir funciones diferentes de la misma o de distintas variables.

Por ejemplo, un problema típico que se modela y se resuelve a través de la formación de ecuaciones diferenciales es aquel que representa la variación en el tiempo de la cantidad de animales de dos especies, una depredadora y otra presa. Esas dos cantidades son funciones desconocidas del tiempo, pero sus respectivas variaciones respecto de éste puede ser propuesta en forma de ecuaciones diferenciales, que no resultan independientes una de la otra. Se forma en consecuencia un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias que permitirá encontrar el modelo matemático que representa la situación analizada.

El objetivo de este tema es introducir el concepto de sistema de ecuaciones diferenciales y mostrar con cierto detalle el caso más simple de todos, un sistema de EDO de primer orden, lo que se hará a través de un ejemplo. También se presentan dos métodos para su resolución.

2. Definiciones

Un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias es un conjunto de ecuaciones en las que aparecen las derivadas de dos o más funciones desconocidas y pueden incluir a éstas y a la variable independiente y a funciones conocidas.

Por ejemplo, las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d^2x(t)}{dt^2}+x(t)\cdot z(t)=y(t)+4e^{-2t} \\ \dfrac{d^2y(t)}{dt^2}+\cos t\,\dfrac{dy(t)}{dt}+\dfrac{dz(t)}{dt}=x-e^{-2t} \\ \dfrac{dx(t)}{dt}+\dfrac{dy(t)}{dt}+e^{y(t)}\dfrac{dz(t)}{dt}=z(t)^2+x(t)^{y(t)} \end{array}\right\} \qquad [1]$$

forman un sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias donde las incógnitas son las funciones $x(t);\, y(t);\, z(t)$.

El orden del sistema de ecuaciones diferenciales está dado por el orden de la derivada de mayor orden de cualquiera de las funciones desconocidas.

Los sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden pueden escribirse de la siguiente manera, si se utiliza la notación $x_1(t)$; $x_2(t)$; ...; $x_i(t)$; ...; $x_n(t)$ para definir a n funciones desconocidas que dependen de t:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=F_1(x_1\,,x_2\,,\dots,x_n\,,t) \\ \dfrac{dx_2}{dt}=F_2(x_1\,,x_2\,,\dots,x_n\,,t) \\ \qquad\qquad \dots \\ \dfrac{dx_n}{dt}=F_n(x_1\,,x_2\,,\dots,x_n\,,t) \end{cases} \qquad [2]$$

y, dentro de estos sistemas, el caso más estudiado es el de los sistemas lineales, que son de la forma

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)\cdot x_1 + a_{12}(t)\cdot\ x_2\ + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)\cdot x_1 + a_{22}(t)\cdot\ x_2\ + \cdots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)\cdot x_1 + a_{n2}(t)\cdot\ x_2\ + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{cases} \qquad [3]$$

3. Formación de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias

Un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias se forma cuando se ponen en juego al menos dos funciones desconocidas, a través de la relación entre sus derivadas.

Ejemplo 1

Una partícula, inicialmente en el origen y en reposo, se mueve en el plano xy debido a una fuerza que actúa sobre ella. La dirección, variable, de la fuerza está en el plano xy, y su magnitud depende sólo de la posición instantánea de la partícula en el plano y del tiempo t, es decir que $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x,y,t) = F_1(x,y,t)\mathbf{i} + F_2(x,y,t)\mathbf{j}$, con $F_1 = y + 4e^{-2t}$ y $F_2 = x - e^{-2t}$. La masa de la partícula es $m = 1$. Interesa conocer dónde estará la partícula en un tiempo posterior.

Formulación matemática

Aplicando la ley de Newton se tiene

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_1(x,y,t) \quad ; \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = F_2(x,y,t) \qquad [4]$$

donde $\frac{d^2x}{dt^2}$; $\frac{d^2y}{dt^2}$ son las componentes de la *aceleración* en las direcciones positivas de x e y, respectivamente.

Además, se tiene que $x = 0$; $y = 0$; $dx/dt = 0$; $dy/dt = 0$; en $t = 0$, de acuerdo a las *condiciones iniciales* del problema.

Reemplazando el valor de la masa y de las componentes de las fuerzas en las ecuaciones [4], se tiene que

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= y + 4e^{-2t} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= x - e^{-2t} \end{aligned}\right\} \qquad [5]$$

El sistema de ecuaciones [5] involucra un par de funciones desconocidas, x e y, de t que se deben determinar y las deben satisfacer simultáneamente. Es un *sistema de ecuaciones diferenciales*.

Resolución:

De la primera ecuación se resuelve y, en términos de x y t, resultando

$$y = \frac{d^2x}{dt^2} - 4e^{-2t} \qquad [6]$$

y, sustituyendo y operando en la segunda ecuación de [5] se obtiene

$$\frac{d^4x}{dt^4} - x = 15e^{-2t} \qquad [6]$$

que es una ecuación diferencial ordinaria lineal en la que x es la función desconocida.

Para resolver ésta, se plantea la solución $x(t) = h(t) + z(t)$, donde h representa la función que satisface la ecuación diferencial lineal homogénea asociada a [6] y z es cualquier solución sin constantes de la misma.

La ecuación característica correspondiente a [6] es $\lambda^4 - 1 = 0$ y los valores de λ que la satisfacen son $i, -i, 1, -1$, por lo que resulta $h(t) = C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t + C_3 e^t + C_1 e^{-t}$.

Para determinar z se propone la solución $z(t) = Ae^{-2t}$, que al reemplazarla en [6] define el valor del coeficiente indeterminado dando $A = 1$, por lo que $z(t) = e^{-2t}$.

Entonces

$$x(t) = C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t + C_3 e^t + C_1 e^{-t} + e^{-2t} \qquad [7]$$

Reemplazando [5] en [3] y operando se obtiene el valor de $y(t)$ requerido, que es:

$$y(t) = -C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t + C_3 e^t + C_4 e^{-t} \qquad [8]$$

que junto con la ecuación [7] constituyen la *solución general* del sistema de ecuaciones diferenciales.

Para determinar las constantes C_1, C_2, C_3 y C_4 se aplican las condiciones iniciales a la solución general, produciendo el siguiente sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas:

$$\left.\begin{array}{ll}
x(0) = C_1 \cos 0 + C_2 \operatorname{sen} 0 + C_3 e^0 + C_4 e^{-0} + e^{-2\cdot 0} = 0 & \Rightarrow C_1 + C_3 + C_4 = -1 \\
x'(0) = -C_1 \operatorname{sen} 0 + C_2 \cos 0 + C_3 e^0 - C_4 e^{-0} - 2e^{-2\cdot 0} = 0 & \Rightarrow C_2 + C_3 - C_4 = 2 \\
y(0) = -C_1 \cos 0 - C_2 \operatorname{sen} 0 + C_3 e^0 + C_4 e^{-0} = 0 & \Rightarrow -C_1 + C_3 + C_4 = 0 \\
y'(0) = C_1 \operatorname{sen} 0 - C_2 \cos 0 + C_3 e^0 - C_4 e^{-0} = 0 & \Rightarrow -C_2 + C_3 - C_4 = 0
\end{array}\right\}$$

del cual surge

$$C_1 = -\tfrac{1}{2}\,;\ C_2 = 1\,;\ C_3 = \tfrac{1}{4}\,;\ C_4 = -\tfrac{3}{4}$$

por lo cual, la solución particular del problema es

$$\left.\begin{array}{l}
x(t) = -\tfrac{1}{2}\cos t + \operatorname{sen} t + \tfrac{1}{4} e^t - \tfrac{3}{4} e^{-t} + e^{-2t} \\
y(t) = \tfrac{1}{2}\cos t - \operatorname{sen} t + \tfrac{1}{4} e^t - \tfrac{3}{4} e^{-t}
\end{array}\right\}$$

4. Herramientas básicas para hallar soluciones de sistemas lineales

Los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales son de la forma:

$$\left.\begin{array}{l}
\phi_1(D)x + \psi_1(D)y = F_1(t) \\
\phi_2(D)x + \psi_2(D)y = F_2(t)
\end{array}\right\} \qquad [9]$$

donde $\phi(D)$ y $\psi(D)$ son *operadores diferenciales lineales* en $D \equiv d/dt$. Se asume que los *operadores* son polinomios en D con coeficientes constantes.

La interpretación de esta notación es la que sigue:

$$Dx = dx/dt$$

$$Dy = dy/dt$$

$$D^2 x = d^2 x/dt^2$$

$$D^3 y = d^3 y/dt^3$$

$$(D-5)x = dx/dt - 5x$$

$$(3D^2 + 2D - 1)y = 3d^2 y/dt^2 + 2\,dy/dt - y$$

y por ejemplo, en las últimas dos expresiones se tiene que

$$\phi(D) = (D-5) \quad ; \quad \psi(D) = (3D^2 + 2D - 1)$$

Esta notación no sólo simplifica la escritura sino que también proporciona un código sencillo para la resolución de problemas.

4.1. Método de eliminación

Este método es formalmente similar al método de igual nombre utilizado para resolver sistemas de ecuaciones algebraicas.

Consiste en eliminar todas excepto una de las funciones desconocidas. Esto conduce a una ecuación diferencial lineal individual, con una función desconocida y una variable independiente. Si esta ecuación diferencial se resuelve, luego por sustitución se calculan les restantes funciones desconocidas.

Ejemplo 2:

Resolver el sistema

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dy}{dt}-3x=y \qquad (\mathrm{a}) \\ \frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dx}{dt}+4x+2y=0 \qquad (\mathrm{b}) \end{aligned}\right\} \qquad [10]$$

Resolución:

Diferenciando (a), se tiene

$$\frac{d^3x}{dt^3}+\frac{d^2y}{dt^2}-3\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dt} \qquad [11]$$

y sustrayendo (b) de [11] se elimina d^2y/dt^2 resultando

$$\frac{d^3x}{dt^3}-4\frac{dx}{dt}-4x-2y=\frac{dy}{dt} \qquad [12]$$

y sustituyendo dy/dt de [12] en (a) se encuentra

$$\frac{d^3x}{dt^3}+\frac{d^2x}{dt^2}-4\frac{dx}{dt}-7x-3y=0 \qquad [13]$$

ahora, se resuelve y en [13],

$$y=\frac{x'''+x''-4x'-7x}{3} \qquad [14]$$

derivando [14] se tiene

$$y'=\frac{x^{\mathrm{IV}}+x'''-4x''-7x'}{3} \qquad [15]$$

y, por último, reemplazando [14] y [15] en (a) se llega a la siguiente ecuación para x.

$$\frac{d^4x}{dt^4}-2\frac{d^2x}{dt^2}-3\frac{dx}{dt}-2x=0 \qquad [16]$$

A partir de este punto se resuelve x, se calculan sus derivadas, se reemplazan en [13] para determinar y.

4.2. Solución de sistemas lineales por transformadas de Laplace

El método de las transformadas de Laplace se puede utilizar para resolver ecuaciones diferenciales lineales simultáneas con condiciones iniciales o de contorno establecidas.

Ejemplo 3

Resolver el sistema $$\left.\begin{aligned} &\frac{dy}{dt} + 6y = \frac{dx}{dt} \qquad (\text{a}) \\ &3x - \frac{dx}{dt} = 2\frac{dy}{dt} \qquad (\text{b}) \end{aligned}\right\} \qquad [17]$$

con las condiciones iniciales $x(0) = 2 \quad ; \quad y(0) = 3$

Resolución

En primer lugar, se adecua la notación a la empleada convencionalmente para el empleo de transformadas, resultando:

$$\left.\begin{aligned} &y' + 6y = x' \qquad (\text{a}) \\ &3x - x' = 2y' \qquad (\text{b}) \end{aligned}\right\} \text{con } x(0) = 2 \quad ; \quad y(0) = 3 \qquad [18]$$

Entonces

$$\mathscr{L}\{x\} = X \text{ y } \mathscr{L}\{y\} = Y$$

reemplazando en [18] y aplicando las condiciones iniciales dadas se tiene que

$$\left.\begin{aligned} &\{sY - y(0)\} + 6Y = \{sX - x(0)\} \\ &3X - \{sX - x(0)\} = 2\{sY - y(0)\} \end{aligned}\right\}$$

operando resulta

$$\left.\begin{aligned} &sX - (s+6)Y = 1 \\ &(3-s)X - 2sY = -8 \end{aligned}\right\}$$

Se resuelve el sistema para X e Y; se tiene

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{2s+16}{(s-2)(s+3)} = \frac{4}{s-2} - \frac{2}{s+3} \\ Y &= \frac{3s-1}{(s-2)(s+3)} = \frac{1}{s-2} + \frac{2}{s+3} \end{aligned}\right\}$$

y, entonces

$$x = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s-2} - \frac{2}{s+3}\right\} = 4e^{2t} - 2e^{-3t}$$

$$y = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2} + \frac{2}{s+3}\right\} = e^{2t} + 2e^{-3t}$$

5. Comentarios para el final del tema

Con esta breve síntesis que presentamos en el Tema 4 pretendemos dar una visión muy general y básica de la formación de sistemas de ecuaciones diferenciales como herramienta para proponer modelos matemáticos que representen problemas cada vez más cercanos a la realidad no simplificada.

Así como, en términos generales, resulta difícil encontrar problemas cuya representación algebraica se pueda plantear a través de la resolución de una sola incógnita aislada del resto del Mundo, de la misma manera los fenómenos que implican variaciones de funciones respecto de variables independientes implican, por lo general, la interacción de funciones de los alcances.

En estos casos se presenta la necesidad de plantear y resolver sistemas de ecuaciones diferenciales, de mayor o menor grado de complejidad según el fenómeno que se analice.