

TEMA 9: INTEGRALES DE LÍNEA

Contextualización

01-C Hallar el trabajo realizado por el campo de fuerzas $F(x, y) = (x^2 - y^2)\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j}$, al mover una partícula en el sentido contrario al de las agujas del reloj, siguiendo el contorno del cuadrado limitado por los ejes coordenados y las rectas $x = a$ e $y = a$, con $a > 0$.

Observación Reflexiva

01-R ¿Qué interpretación le da a usted al resultado de la integral de línea de una función escalar de dos variables sobre un camino que está ubicado en el plano x, y ? ¿Podría hacer un esquema visual con esa interpretación?

02-R Explique la diferencia que existe entre un campo vectorial conservativo y uno no conservativo. ¿Cómo repercute esa diferencia al momento de calcular las integrales de línea de estos campos a lo largo de caminos cerrados?

Conceptualización

01-T Defina conceptualmente camino de integración para una integral de línea.

02-T Cómo se define la longitud de una curva en un espacio multidimensional.

03-T ¿Qué es un camino regular? ¿Qué es un camino regular a trozos?

04-T Defina integral de línea de un campo vectorial.

Experimentación Activa

01-E Calcular $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, siendo:

a) $F(x, y) = xy\mathbf{i} + (x^2 - y^2)\mathbf{j}$; siendo C: $y = -x^2$ desde $A(0, 0)$ hasta $B(1, 3)$.

b) $F(x, y) = x\mathbf{i} - 3y^2\mathbf{j}$; siendo C: $y = x$ desde $A(0, 0)$ hasta $B(-3, 0)$.

c) $F(x, y, z) = (y - z)\mathbf{i} + (z - x)\mathbf{j} + (x - y)\mathbf{k}$; siendo C una espira de hélice circular parametrizada por $\vec{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ con $t \in [0, 2\pi]$.

02-E Calcular las siguientes integrales curvilíneas:

a) $\int_C z dx + y dy - x dz$, siendo C la hélice de ecuaciones $x = \cos t$; $y = t$; $z = 3 \sin t$ con $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

b) $\oint x^2 dx + xy dy$, siendo C el perímetro del cuadrado unitario orientado en el sentido positivo con vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ y $(0, 1)$.

03-E Calcular

a) $\int_C (2 + x^2 y) ds$, donde C es la curva $x^2 + y^2 = 1$ para $y \geq 0$.

b) $\int_C z ds$, donde C es la curva parametrizada por $\vec{r}(t) = t \cos t \mathbf{i} + t \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$ con $t \in [0, 2\pi]$.

c) $\int_C (x^2 + yz) ds$ donde C es el segmento de recta que va desde el punto $A(-1, -3, 0)$ hasta el punto $B(1, 1, -4)$.



04-E Analizar si los campos vectoriales admiten función potencial, en caso afirmativo hallarla.

a) $F(x, y) = (3 + 2xy)\mathbf{i} + (x^2 - 3y^2)\mathbf{j}$

b) $F(x, y) = 2y\mathbf{i} - x^2\mathbf{j}$

c) $F(x, y) = (y^2 + 2\text{sen } x \cos x - e^{y^2})\mathbf{i} + (2xy - 2xye^{y^2})\mathbf{j}$

d) $F(x, y, z) = y^2\mathbf{i} + (2xy + e^{3z})\mathbf{j} + 3ye^{3z}\mathbf{k}$

e) $F(x, y, z) = (2xyz + z^2 - 2y^2)\mathbf{i} + (x^2z - 4xy)\mathbf{j} + (x^2y + 2xz)\mathbf{k}$

05-E a) Verificar si $\int_{(0,0)}^{(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} (y \cos x \, dx + \text{sen } x \, dy)$ es independiente de la trayectoria; en caso afirmativo, hallar la función potencial y el valor de la integral.

06-E Resolver $\int_{(1,2)}^{(3,4)} (6x^2y - 3xy^2)dy + (6xy^2 - y^3)dx$

07-E Hallar el trabajo realizado por el campo de fuerzas $F(x, y) = (x^2 + 2xy, y^2 - 2xy)$ al desplazar una partícula a lo largo de la parábola de ecuación $y = x^2$ desde $(-1,1)$ hasta $(1,1)$. ¿Es posible asegurar el mismo resultado si manteniendo dichos puntos se utiliza otra curva?

08-E Usar el teorema de Green para calcular, mediante una integral doble:

a) $\oint_C y^3 dx + (x^3 + 3xy^2)dy$, donde C es la circunferencia con centro en el origen y radio 3 recorrida en sentido antihorario.

b) $\oint_C x^2 y dx + y^3 dy$, donde C es la curva cerrada formada por $y = x, y^3 = x^2$.

09-E Usar el teorema de Green para calcular, mediante integrales de línea, el área encerrada por:

a) $y = x^2$ e $y = x + 2$.

b) $x = 1, y = 2, x + y = 5$.