

Tema 9: Integrales de línea
Contextualización

01-C. Obtenga el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 - y^2)\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j}$, al mover una partícula en el sentido contrario al de las agujas del reloj, siguiendo el contorno del cuadrado limitado por los ejes coordenados y las rectas $x = a$ e $y = a$, con $a > 0$.

Observación Reflexiva

01-R. ¿Qué interpretación le da a usted al resultado de la integral de línea de una función escalar de dos variables sobre un camino que está ubicado en el plano x, y ? ¿Podría hacer un esquema visual con esa interpretación?

02-R. Explique la diferencia que existe entre un campo vectorial conservativo y uno no conservativo. ¿Cómo repercute esa diferencia al momento de calcular las integrales de línea de estos campos a lo largo de caminos cerrados?

Conceptualización

01-T. Defina conceptualmente camino de integración para una integral de línea.

02-T. Cómo se define la longitud de una curva en un espacio multidimensional.

03-T. ¿Qué es un camino regular? ¿Qué es un camino regular a trozos?

04-T. Defina integral de línea de un campo vectorial.

Experimentación Activa

01-E. Calcule la integral de línea $\int_C \vec{F} d\vec{r}$

a) $\vec{F}(x, y) = (5x + y)\mathbf{i} + (y - 5x)\mathbf{j}$; C: es el segmento de recta desde el punto A(0,6) hasta el punto B(3,0)

b) $\vec{F}(x, y) = (x^2y, x)$; C: parábola $y = 2(x - 2)^2$ con $2 \leq x \leq 4$

c) $\vec{F}(x, y, z) = (2x^2, z, y^2)$; C:
$$\begin{cases} x(t) = 5\cos t \\ y(t) = 5\sin t \\ z(t) = t \end{cases} \quad \text{con } 0 \leq t \leq \pi/3$$

d) $\vec{F}(x, y, z) = (x^2z)\mathbf{i} + (z^2)\mathbf{j} + (yz)\mathbf{k}$; C: Segmento de recta desde el punto A(2,0,2) hasta el punto B(2,9,0)

02-E Calcule la integral de línea de un campo vectorial dado en su expresión diferencial

a) $\int_C x^2 dx + 2xy dy + 4y^2 dz$. Siendo C la curva determinada por la intersección de la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ con el plano $z = 4$ con $\pi/6 \leq t \leq \pi/4$

b) $\int_C x dx + (x + z^2) dy + y dz$. Si $C = C_1 + C_2$ Siendo C la curva determinada por la

intersección de las superficies $z^2 = 12y$; $x = 2y + 4$ desde $A(4,0,0)$ hasta $B(10,3,6)$

- c) $\int_C (y + z) dx + (y - z) dy + z dz$. Siendo C la curva determinada por la intersección de las superficies $x^2 + y^2 + z^2 = 4$; $z = y - 2$

03-E Calcule la integral de línea $\int_C f dS$; de un campo escalar f definido por:

- a) $f(x, y) = 2y - 2$ Siendo C el camino determinado por la parábola $(y - 1)^2 = 2(x - 1)$ desde el punto $A(3,3)$ hasta el punto $B(9,5)$
- b) $f(x, y) = xy$ Siendo C el camino determinado por las rectas: $C_1: x - 10y = 4$; $C_2: x + 6y = 12$ y $C_3: x + 2y = 4$ en sentido de C_1, C_2, C_3
- c) $f(x, y, z) = z + x^2 + y^2$ Con $0 \leq t \leq \pi/2$. Siendo $C: \begin{cases} x(t) = 2 + 2\cos t \\ y(t) = 2\sin t \\ z(t) = 12t \end{cases}$

04-E Determine si el campo vectorial $\vec{F}$ es igual al gradiente de un campo escalar f

En caso de que $\vec{F}$ sea conservativo encuentre la función potencial.

- a) $\vec{F}(x, y) = (4y^3 + 3xy^2)\vec{i} + (12y^2x + 3x^2y)\vec{j}$
- b) $\vec{F}(x, y) = (2y^3x, 3y^2x^2 + 3y)$
- c) $\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{y^2}{1+x^2}\right)\vec{i} + (2y \arctan(x))\vec{j}$

05-E Determine el trabajo efectuado por el campo de fuerzas

- a) $\vec{F}(x, y) = (4xy, y + 6x)$, al mover una partícula a lo largo de una parábola $y = (x - 3)^2$ entre los puntos $A(3,0)$ y $B(6,9)$
- b) $\vec{F}(x, y, z) = (e^x, y - 3x^2, \cos z)$, cuando mueve una partícula por $C: \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \\ z(t) = t \end{cases}$

con $0 \leq t \leq \pi$

- c) $\vec{F}(x, y) = \left(y^2 - x, \frac{(y-2)^2}{x}\right)$; siendo el camino C el segmento de recta $y = x + 2$; desde el punto $A(2,4)$ hasta el punto $B(4,6)$

06-E Verifique que la integral dada es independiente de la trayectoria y en caso de tener función potencial calcule la integral empleando la función potencial.

- a) $\vec{F}(x, y) = (x^2, y^2)$, C : el arco de parábola $x^2 = 8(y - 3)$ con: $4 \leq x \leq 8$
- b) $\vec{F}(x, y) = (x^2y^3 + e^x)dx + (e^y + x^3y^2)dy$, C el segmento de recta desde $(1,2)$ hasta $(2,1)$
- c) $\vec{F}(x, y, z) = (e^xy - 3x^2 \cos z)dx + (e^x)dy + (x^3 \sin z) dz$,

C es la hélice: $x = \cos t$; $y = \sin t$; $z = t$ desde $(1,0,0)$ hasta $(-1,0,\pi)$

07-E Verifique el teorema de Green en el plano para

- a) $\oint_C (y^2 \sin x, x^2) d\vec{r}$, siendo C el triángulo determinado por los puntos $A(0,2)$; $B(2,2)$ y $C(2,6)$
- b) $\oint_C (x \ln x) dx + (x^4 + 2x^2 y^2) dy$, C el límite de la región entre las circunferencias $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$
- c) $\oint_C (x^2 - yx) dx + (y^2 - yx) dy$, siendo C el triángulo determinado por las rectas $y = 2x$; $x + y = 3$; $y = 0$

08-E Aplicando integrales de línea calcule el área de:

- a) Triángulo determinado por las rectas: $x - 2y + 3 = 0$; $x + y - 6 = 0$; $x + 4y - 6 = 0$
- b) Región determinada por: $4 \leq x^2 + y^2 \leq 25$; $y \geq 0$
- c) Región determinada por: $y^2 = 2x$; $y = 0$; $2x + y - 20 = 0$

-----0000-----