TEMA 9: INTEGRALES DE LÍNEA

Contextualización

01-C. Hallar el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\boldsymbol{F}(x,y) = (x^2 - y^2)\boldsymbol{\breve{\imath}} + 2xy\boldsymbol{\breve{\jmath}}$, al mover una partícula en el sentido contrario al de las agujas del reloj, siguiendo el contorno del cuadrado limitado por los ejes coordenados t las rectas $x = a$ e $y = a$, con $a > 0$.

Observación Reflexiva

01-R. ¿Qué interpretación le da a usted al resultado de la integral de línea de una función escalar de dos variables sobre un camino que está ubicado en el plano x, y? ¿Podría hacer un esquema visual con esa interpretación?

02-R. Explique la diferencia que existe entre un campo vectorial conservativo y uno no conservativo. ¿Cómo repercute esa diferencia al momento de calcular las integrales de línea de estos campos a lo largo de caminos cerrados?

Conceptualización

01-T. Defina conceptualmente camino de integración para una integral de línea.

02-T. Cómo se define la longitud de una curva en un espacio multidimensional.

03-T. ¿Qué es un camino regular? ¿Qué es un camino regular a trozos?

04-T. Defina integral de línea de un campo vectorial.

Experimentación Activa

01-E. Calcular $\int_C \vec{F} \bullet d\vec{r}$, siendo:

a) $F(x,y) = (x+y)\,\breve{\imath} + 2y\breve{\jmath}$; siendo C el segmento de recta que va desde el punto $A(0,1)$ hasta el punto $B(2,3)$.

b) $F(x,y) = x^2\,\breve{\imath} + 2xy\breve{\jmath}$; siendo C el arco de circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ que va desde el punto (0, 3) hasta el punto (-3, 0).

c) $F(x,y) = (x^2 + y^2)\,\breve{\imath} + (x+y)\breve{\jmath}$; siendo C el contorno del triángulo de vértices (1, 1); (2, 2); (1, 3) recorrido en sentido positivo.

d) $F(x,y,z) = (y^2 - x^2, 2z, x^2)$ siendo C la curva parametrizada por $\vec{r}(t) = (t^2, 2t, 4t^3)$ con $t \in [0,1]$.

e) $F(x,y,z) = (x^2y, x - z, -xyz)$ siendo C la intersección del cilindro parabólico $y = x^2$ con el plano z = 2, desde (0,0,2) hasta (1,1,2).

02-E. Calcular:

a) $\int_C xy\,ds$; siendo C el arco de circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ en el segundo cuadrante.

b) $\int_C (x^2 + y^2)\,ds$; siendo C la curva parametrizada por $\vec{r}(t) = 2(\cos t + \mathrm{t sen}\, t)\breve{\imath} +$

$2(\operatorname{sen} t - t\cos t)\check{j}$ con $t \in [0,2\pi]$.

c) $\int_C 3(x^2+y^2)\,ds$ siendo C el segmento de recta que va desde el punto $A(-1,-2,0)$ hasta el punto $B(1,2,3)$.

d) $\int_C (x^2+y^2+z)\,ds$; siendo C el sector de la hélice parametrizada por $\vec{r}(t) = (\cos 2t, sen\, 2t, t)$ con $t \in [0,\pi]$.

03-E. Analizar si los campos vectoriales admiten función potencial, en caso afirmativo hallarla

a) $F(x,y) = (x - 2xy)\check{\imath} + (y^2 - x^2)\check{\jmath}$

b) $F(x,y) = (6xy^2 - y^3)\check{\imath} + (6x^2y - 3xy^2)\check{\jmath}$

c) $F(x,y,z) = (4xy - z^3, 2x^2, -3xz^2)$

d) $F(x,y,z) = 2xy^3\,\check{\imath} + x^2z^3\check{\jmath} + 3x^2yz^2\check{k}$

e) $F(x,y,z) = (2xyz + z^2 - 2y^2 + 1)\check{\imath} + (x^2z - 4xy)\check{\jmath} + (x^2y + 2xz - 2)\check{k}$

04-E Calcular:

a) La longitud de la cicloide descripta por la parametrización $\vec{r}(t) = (t + \operatorname{sen} t)\check{\imath} + (1 + \cos t)\check{\jmath}$ con $t \in [0,\pi]$.

b) La longitud de la curva intersección de la esfera $x^2+y^2+z^2=1$ con el plano $x+z=0$.

05-E Calcular:

a) $\int_C x^2y^2dx + xy^2dy$ siendo C el sector de parábola $x = y^2$ que va desde el punto $A(1,-1)$ hasta el punto $B(1,13)$.

b) $\oint \frac{2x}{x^2-y^2}dx - \frac{2y}{x^2-y^2}dy$ siendo C el camino cerrado descripto por la circunferencia $x^2+y^2=16$.

c) $\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)} xdx + y^2ydy - z^3dz$

06-E. Calcular el trabajo realizado por el campo de fuerzas $F(x,y) = (x^2y, y)$ al desplazar una partícula a lo largo de la elipse de ecuación $2x^2 + y^2 - 4x = 0$.

07-E. Calcule el trabajo realizado por el campo de fuerzas $F(x,y,z) = (y,z,yz)$ al desplazar una partícula a lo largo de la curva parametrizada por $\vec{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, e^t)$, $t \in [0,\pi]$ ¿Cuáles son los puntos inicial y final del recorrido? ¿Es posible asegurar el mismo resultado si manteniendo dichos puntos se utiliza otra curva?

08-E. Usando el teorema de Green para calcular

a) $\oint_C xydy + x^4dx$ siendo C el contorno del triángulo de vértices (0, 0); (0, 1); (1, 0) recorrido en sentido positivo).

b) $\oint_C y^3dx + (x^3 + 3xy^2)dy$ siendo C la circunferencia con centro en el origen y radio 3 recorrida en sentido antihorario.

c) $\oint_C \left(\sqrt{x^2+9} + y\right)dx + \left(\sqrt{x^2+9} - 3xy\right)dy$ siendo C el arco de circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ con $y \geq 0$ unida al segmento que va desde $(-1, 0)$ hasta $(1, 0)$.

09-E. Usar el teorema de Green para calcular el área encerrada por:

a) $y^2 = x \;\; e \;\; y = x^3$.

b) $x + y^2 - 4 = 0$ y $4x + y^2 - 4 = 0$.

10-E. Usar el teorema de Green para calcular el área de la región limitada por la hipocicloide parametrizada por $\vec{r}(t) = (\cos^3 t,\ \mathrm{sen}^3\, t)$ con $t \in [0,2\pi]$.

----ooo0ooo----