

Tema 8: Cálculo en campos vectoriales

Contextualización

- 01-C. Representar gráfica y analíticamente la intersección de $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = z$ con $z = 4$.
- 02-C. Exprese cuáles serían sus motivos para optar por uno de estos puntos de partida para llegar al encuentro de Virgen de Copacabana de Punta Corral si ésta se encuentra en el Santuario del mismo nombre: a) Tunalito; b) Tumbaya; c) Tilcara. Explique cuáles son, a su criterio, las ventajas y desventajas.

Observación Reflexiva

- 01-R. Distinga un campo escalar de uno vectorial.
- 02-R. Interprete qué es la representación paramétrica de una curva en el espacio R^3 .

Conceptualización

- 01-T. Mencione dos ejemplos de campos vectoriales.
- 02-T. Defina a través de gráficos el concepto de derivada de la función vectorial $\mathbf{u}: R^1 \rightarrow R^3$.
- 03-T. Defina a través de gráficos el concepto de derivada parcial de la función vectorial $\mathbf{u}: R^2 \rightarrow R^3$. Relacione este concepto con el del problema 02-T.
- 04-T. ¿Cómo puede determinar el vector tangente a una curva definida paramétricamente en un espacio tridimensional?
- 05-T. Defina el gradiente de un campo escalar. ¿Conoce alguna de sus propiedades?
- 06-T. Establezca la relación entre el vector gradiente de un campo escalar y su derivada direccional.

Experimentación Activa

- 01-E. Encontrar, aplicando la definición, la derivada de los siguientes campos escalares, con las condiciones que se indican:
- a) $f(x, y) = x^2 - y$, en el punto $A(4,5)$ y en la dirección del vector $\vec{y} = (2,1)$.
 - b) $f(x, y, z) = xy + y^2z^2$, en el punto $A(2,2,-3)$ y en la dirección del vector $\vec{y} = i + k$.
 - c) $f(x, y, z) = x^3 - 3yz + 5$, en el punto $A(2,1,3)$ y en la dirección que va desde A hasta el punto $B(5,5,15)$.
- 02.- Calcule el gradiente de las siguientes funciones escalares en los puntos indicados
- a) $f(x, y) = xy^2 + y \cos(x)$, $P(0,5)$
 - b) $f(x, y, z) = xe^{y^2} + x^2z - 3yz$, $P(-2,0,3)$
 - c) $f(x, y, z) = \ln(x^2y) + yz^2$, $P(-1,1,4)$
- 03-E. Encontrar, aplicando las propiedades del vector gradiente, la derivada direccional de los siguientes campos escalares, con las condiciones que se indican:

- a) $f(x, y) = x^2y + \sin(xy)$, en el punto $P\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ y en la dirección que forma ángulos iguales con los ejes coordenados.
- b) $f(x, y, z) = xy + yz + xz$, en el punto $P(2, 1, 3)$ y en la dirección del vector que va desde P hasta el punto $Q(3, 5, 10)$.
- c) $f(x, y, z) = x \sin(yz) - y^2$, en el punto $P(1, 3, 0)$ y en la dirección del vector $\vec{u} = i + 2j - k$.
- d) $f(x, y, z) = xe^{y+2z}$, en el punto $P(3, -4, 2)$ y en la dirección que forma un ángulo de 60° con el gradiente.
- 04-E. A partir del punto $A(2, -1, 3)$, ¿hacia qué dirección hay que dirigirse para que aumente lo más rápidamente posible la función $f(x, y, z) = 2y^2 + (x^2 - z)^2 - xz$?
- 05-E. Suponga que una persona quiere subir una colina cuya forma está dada por la ecuación $z = 1000 - 0,01x^2 - 0,02y^2$, donde x, y, z se miden en metros, y que se encuentra en el punto de coordenadas $(50, 80, 847)$.
- a) Si camina hacia el sur, ¿comenzara a ascender o a descender? ¿A qué razón?
- b) Si camina al noroeste, ¿comenzara a ascender o a descender? ¿A qué razón?
- c) ¿En qué dirección la pendiente es mayor? ¿Cuál es la razón de ascenso en esa dirección?
- 06-E. Suponga que, en cierta región del espacio, el potencial eléctrico V está dado por: $V(x, y, z) = x^3 - 3yz + 2xyz$. Encuentre la razón de cambio de esté en el punto $P(-2, 1, 5)$ y en la dirección del vector $\vec{u} = 2i + 2j - k$. ¿Cuál es su máxima variación?
- 07-E. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $x^2\sqrt{yz} + 2xy = 0$ en el punto $A(-1, 2, 8)$.
- 08-E. Encuentra la ecuación del plano tangente y de la recta normal a la superficie de ecuación $x^2 - 2y^2 - 3z^2 + xyz - 4 = 0$ en el punto $A(3, -2, 1)$.
- 09-E. Representar paramétricamente las siguientes curvas:
- a) Segmento de recta que une los puntos $A(3, -1, 4)$ y $B(-2, -4, 5)$
- b) Sector de parábola de ecuación: $y = x^2 - 2x$ entre los puntos $A(1, -1)$ y $B(2, 0)$
- c) Sector de elipse de ecuación $x^2 + 2y^2 = 8$ con $y \geq 0$
- 10-E. ¿Qué curvas definen las siguientes representaciones paramétricas?
- a) $\vec{r}(t) = (2t - t^2, t - 1), 1 \leq t \leq 2$
- b) $\vec{r}(t) = (\cos t + 2, \sin t - 1), 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$
- c) $\vec{r}(t) = (2\cosh t, 2\sinh t), t \in \mathbb{R}$