Análisis Matemático II
Presentaciones en el Aula

TEMA 8

Cálculo en campos vectoriales

Autor: Gustavo Lores

2013

Introducción

Una cantidad escalar queda determinada por su magnitud, es decir su número de unidades medida en una escala adecuada. Por ejemplo longitud, temperatura, precio son escalares. Pueden ser constantes o variables. Si varían, pueden ser *"funciones escalares"*.

Un **vector** es una cantidad que queda determinada tanto por su magnitud como por su dirección, es decir que se puede representar mediante una flecha o un segmento dirigido. Puede ser representada por sus componentes. Velocidad y fuerza son ejemplos de vectores.

Si los vectores varían por alguna causa que se pueda expresar analíticamente, surgen las ***"funciones vectoriales"*** dependientes de una o más variables reales.

Los conocimientos previos necesarios para este Tema son: componentes de un vector, propiedades de los vectores, norma de un vector, cosenos directores, producto interior, vectores perpendiculares y ortogonales, producto vectorial y triple producto escalar son requeridos para este capítulo.

Funciones vectoriales, funciones escalares, campos vectoriales.

El cálculo vectorial involucra dos clases de funciones, *funciones vectoriales*, cuyos valores son vectores, como ser

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(P) = \left(u_1(P), u_2(P), u_3(P)\right)$$

y que dependen del valor de que toma el punto variable P y *funciones escalares* cuyos valores son números (escalares), como ser

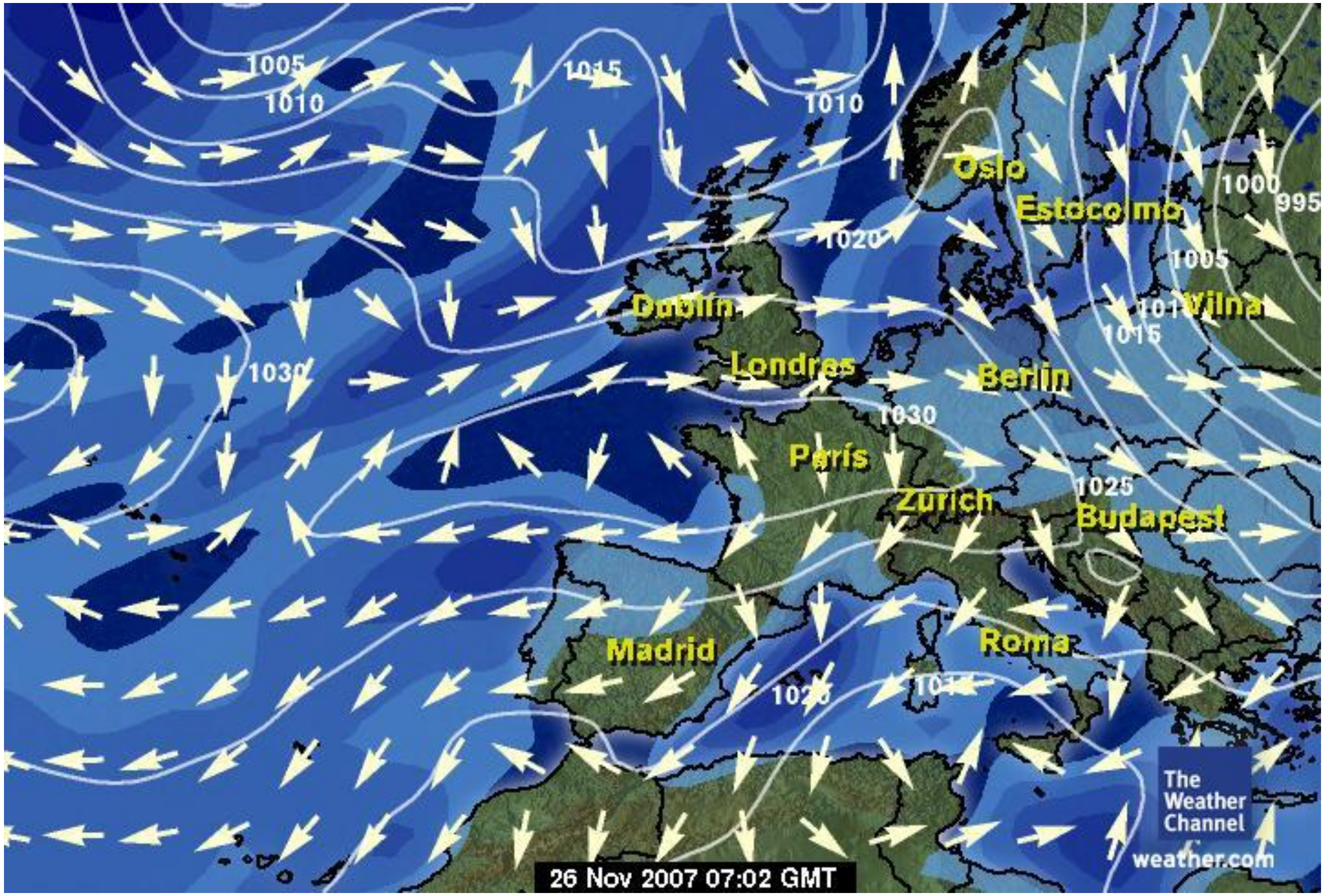
$$f = f(P)$$

que dependen del valor de un punto variable P.

Se dice que una función vectorial define un **campo vectorial** en una región determinada.

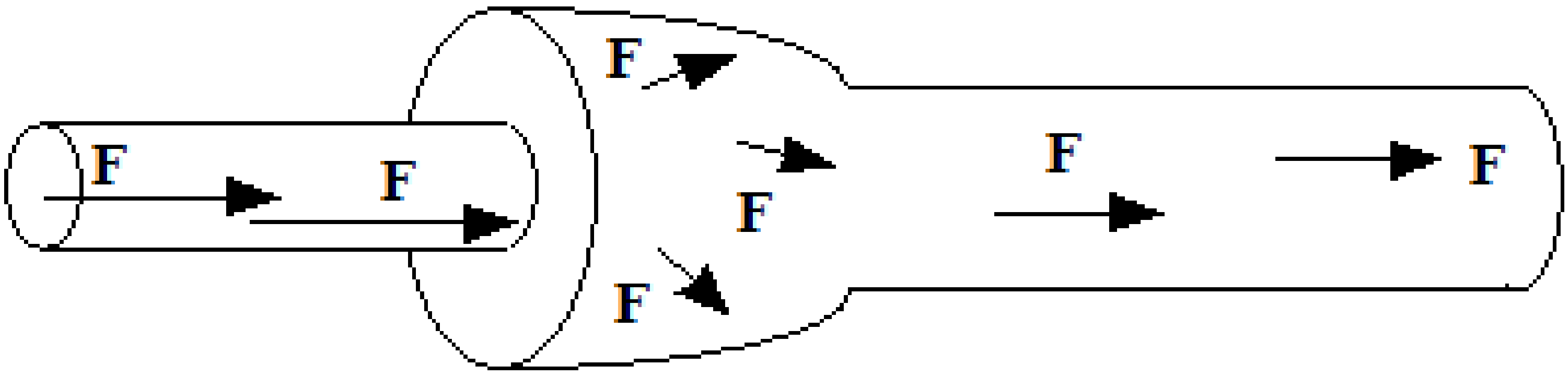
Campos vectoriales: algunos ejemplos.

Distribución de velocidades en el aire, o viento, que en cada punto de la atmósfera posee tanto una intensidad como una dirección y un sentido.



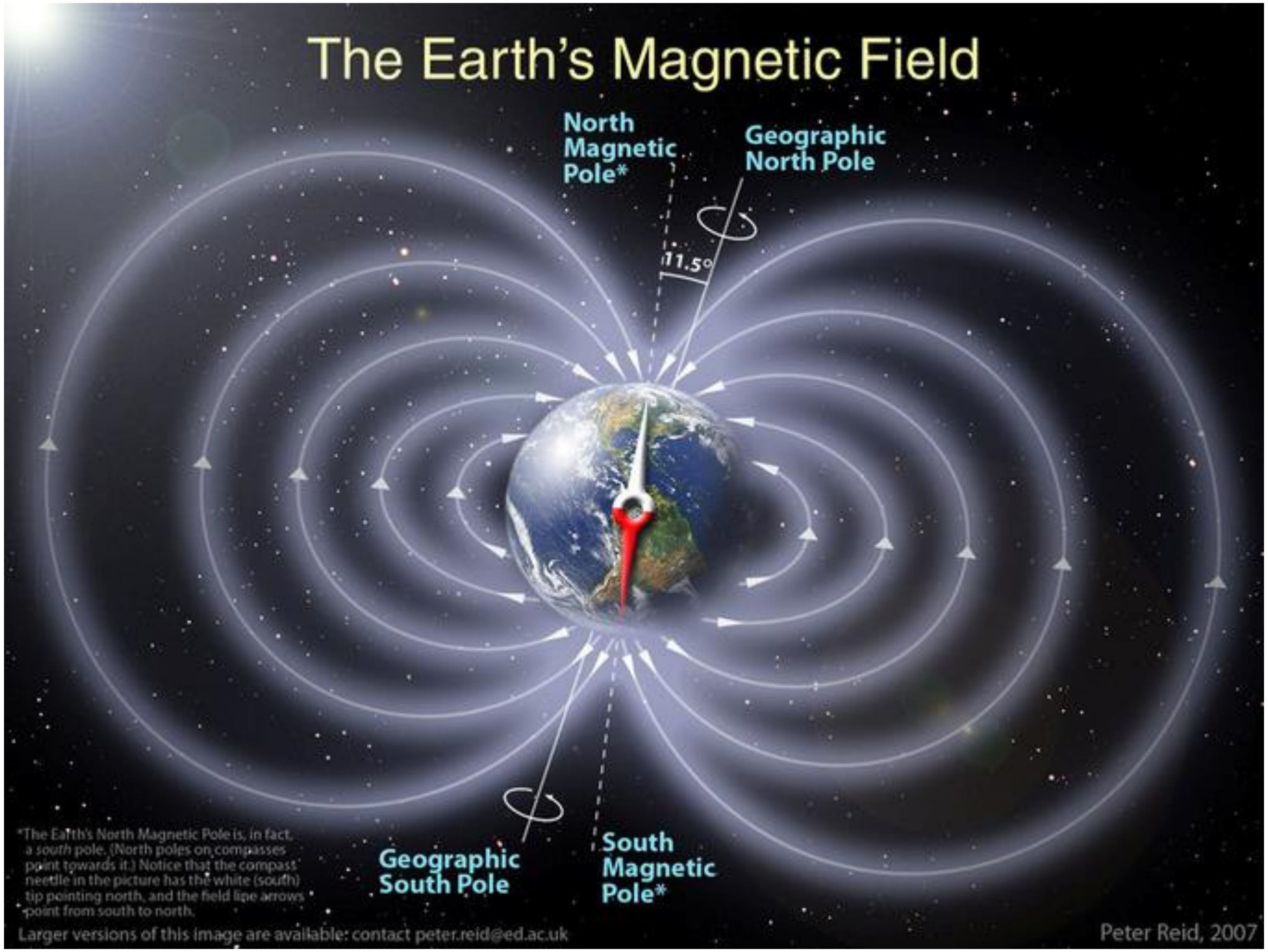
Campos vectoriales: algunos ejemplos.

Distribución de velocidades en un líquido, o flujo del fluido, que en cada punto de la cañería posee tanto una intensidad como una dirección y un sentido.



Campos vectoriales: algunos ejemplos.

El campo magnético de La Tierra, que en cada punto del espacio puede actuar sobre una carga magnética.



Límites y continuidad para una función vectorial.

Sea $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{P}) = \left[u_1(\mathbf{P}),\ldots,u_m(\mathbf{P})\right]$ una aplicación de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, y además $\mathbf{P} \in S \subset \mathbb{R}^n$. Entonces:

$$\lim_{\mathbf{P}\to\mathbf{P}_0} \mathbf{u}(\mathbf{P}) = \mathbf{L} \Leftrightarrow \lim_{\mathbf{P}\to\mathbf{P}_0} \left|\mathbf{u}(\mathbf{P}) - \mathbf{L}\right| = 0$$

La definición es análoga a la del caso de las funciones escalares y la generaliza: dada una función vectorial $\mathbf{u}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{P}_0 \in S \subset \mathbb{R}^n$ un punto de acumulación en S y $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^m$, se dice que $\mathbf{L}$ es el límite de $\mathbf{u}$ cuando $\mathbf{P}$ tiende a $\mathbf{P}_0$ si se puede comprobar que si para cada $\varepsilon > 0$ (no importa cuán pequeño) existe un correspondiente $\delta > 0$ tal que $\left|\mathbf{u}(\mathbf{P}) - \mathbf{L}\right| < \varepsilon$ siempre que $0 < \left\|\mathbf{P} - \mathbf{P}_0\right\| < \delta$. Es decir, $\mathbf{u}(\mathbf{P})$ se puede acercar arbitrariamente a $\mathbf{L}$ haciendo $\mathbf{P}$ suficientemente cercano a $\mathbf{P}_0$.

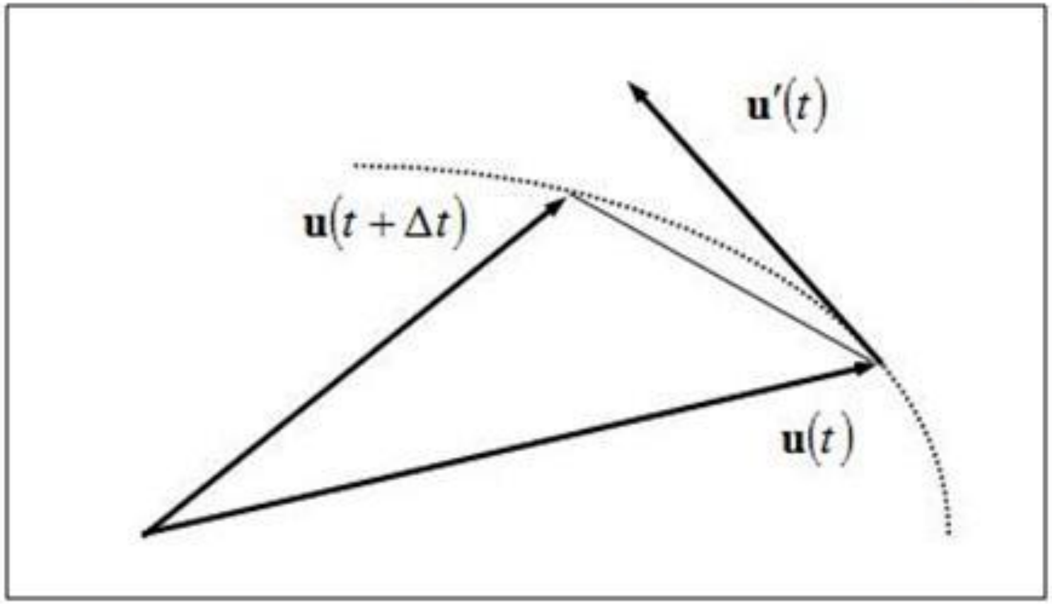
La continuidad de un campo vectorial se puede definir a partir del vector en su conjunto: se dice que $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{P}) = \left[u_1(\mathbf{P}),\ldots,u_m(\mathbf{P})\right]$ es continua en $\mathbf{P} = \mathbf{P}_0$ si existe el límite $\lim_{\mathbf{P}\to\mathbf{P}_0} \mathbf{u}(\mathbf{P})$ y coincide con $\mathbf{u}(\mathbf{P}_0) = \left[u_1(\mathbf{P}_0),\ldots,u_m(\mathbf{P}_0)\right]$

Si el valor de $\mathbf{P}$ depende de una sola variable real, por ejemplo t, se dice que $\mathbf{u}(t)$ es función de una variable real, t, y tiene como límite $\mathbf{L}$ a medida que t se aproxima a t_0, si $\mathbf{u}(t)$ está definida en algún entorno de t_0.

Derivada de una función vectorial.

Una función vectorial $\mathbf{u}(t)$ es derivable en un punto t si existe el límite $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\mathbf{u}(t+\Delta t)-\mathbf{u}(t)}{\Delta t}$

El vector $\mathbf{u}'(t)$ se denomina la **derivada** de $\mathbf{u}(t)$ y es: $\mathbf{u}'(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\mathbf{u}(t+\Delta t)-\mathbf{u}(t)}{\Delta t}$



En términos de las componentes de un vector en un sistema dado de coordenadas cartesianas, $\mathbf{u}(t)$es diferenciable en un punto t sí y sólo sí sus componentes son diferenciables en t, y, entonces la derivada $\mathbf{u}'(t)$ se obtiene por la derivación de cada componente en forma separada: $\mathbf{u}'(t) = [u_1'(t), u_2'(t), \cdots, u_n'(t)]$

Derivada parcial de una función vectorial.

Sea que las componentes de una función vectorial $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n) = u_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_1 + u_2 \cdot \hat{\mathbf{e}}_2 + \cdots + u_n \cdot \hat{\mathbf{e}}_n$ son funciones diferenciables de n variables $t_1, t_2, \ldots, t_n$.

Entonces la **derivada parcial** de $\mathbf{u}$ respecto de t_1 se indica mediante $\partial \mathbf{u} / \partial t_1$ y se define mediante la función vectorial $\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t_1} = \dfrac{\partial u_1}{\partial t_1} \cdot \hat{\mathbf{e}}_1 + \dfrac{\partial u_2}{\partial t_1} \cdot \hat{\mathbf{e}}_2 + \cdots + \dfrac{\partial u_n}{\partial t_1} \cdot \hat{\mathbf{e}}_n$

Del mismo modo, las derivadas parciales de orden superior, por ejemplo con respecto a las variables t_i y t_j, se obtienen de acuerdo a:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t_i \partial t_j} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial t_i \partial t_j} \cdot \hat{\mathbf{e}}_1 + \frac{\partial^2 u_2}{\partial t_i \partial t_j} \cdot \hat{\mathbf{e}}_2 + \cdots + \frac{\partial^2 u_n}{\partial t_i \partial t_j} \cdot \hat{\mathbf{e}}_n$$

y así sucesivamente, se pueden determinar las posibles derivadas parciales de orden superior.

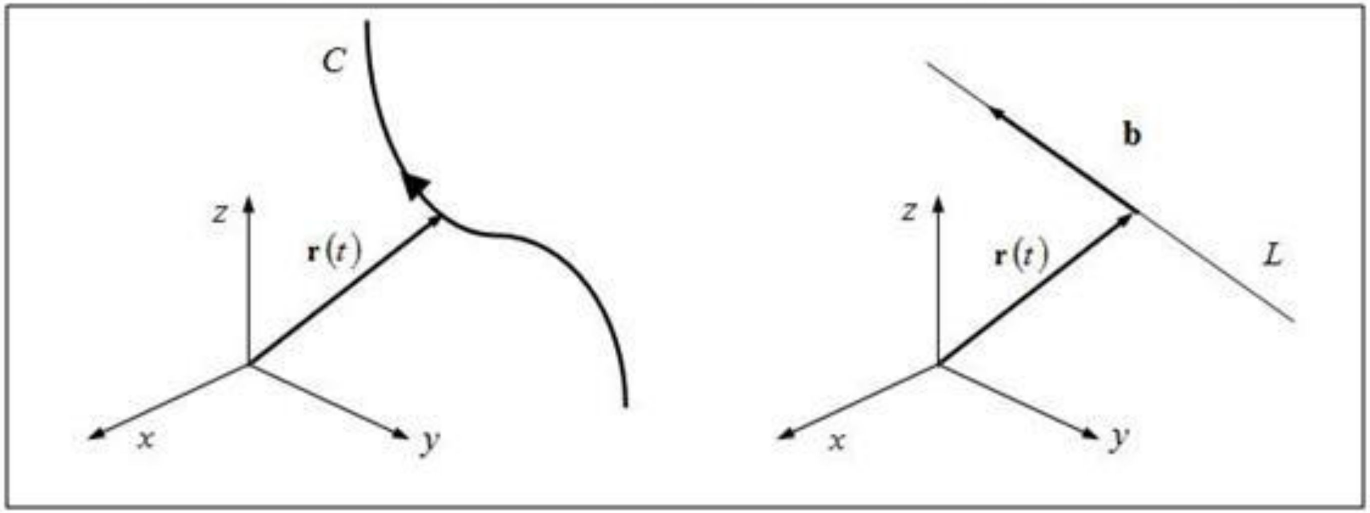
Representación paramétrica de curvas en el espacio

Una curva C (ó una recta L) en el espacio $\mathbb{R}^3$ se puede representar mediante una función vectorial de una variable real, proponiendo: $\mathbf{r}(t) = \left(x(t), y(t), z(t)\right) = x(t)\cdot\mathbf{i} + y(t)\cdot\mathbf{j} + z(t)\cdot\mathbf{k}$.

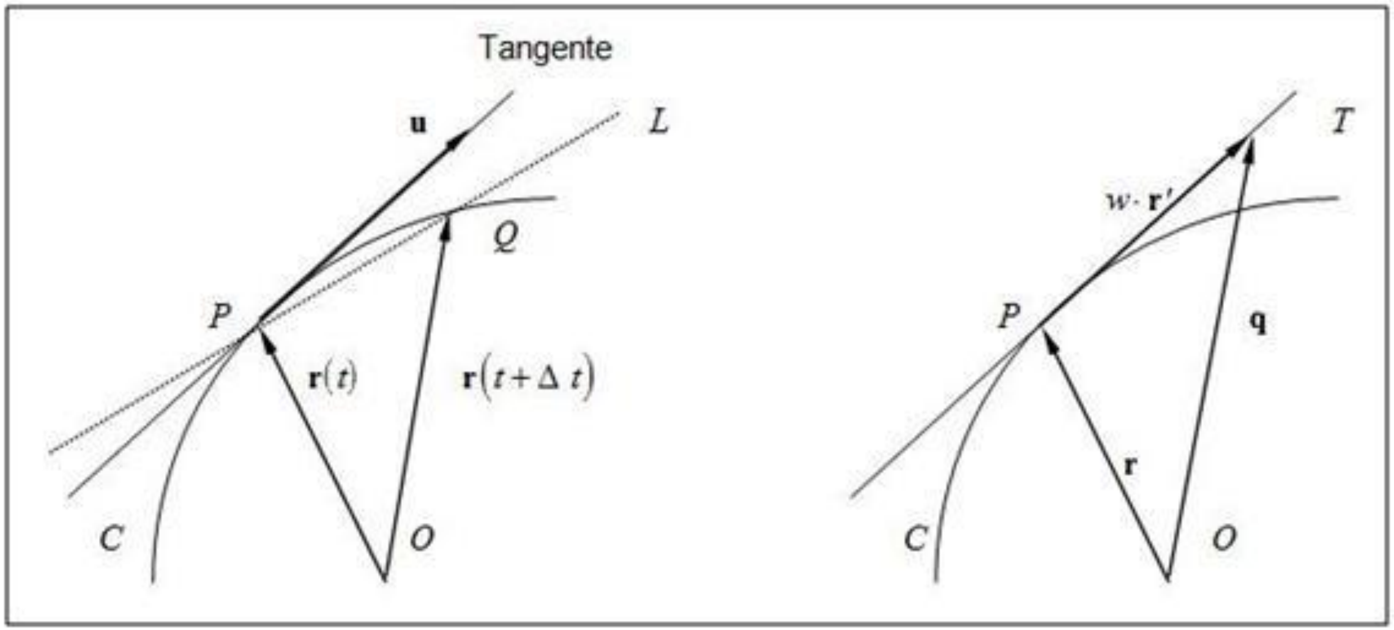
Para cada valor t_0 de la variable real t corresponde un punto de C (ó de L) que está dado por el vector posición $\mathbf{r}(t_0)$, de coordenadas $x(t_0)$, $y(t_0)$, $z(t_0)$.

Son las **representaciones vectoriales paramétricas** de C (ó de L), y t es el parámetro.

t define el sentido positivo de la curva C (ó de la recta L), que se indica con una flecha.



Función vectorial tangente a una curva



$$C:\mathbf{r}(t)\ \ ;\ \ \mathbf{r}(t)=\mathbf{P}\ \ ;\ \ \mathbf{r}(t+\Delta t)=\mathbf{Q}\ \ ;\ \ \mathbf{r}'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\ \frac{1}{\Delta t}\cdot\left[\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)\right]$$

$\mathbf{r}'(t)$ es un ***vector tangente*** a C en P.

Normalizando $\mathbf{r}'(t)$ se obtiene el ***vector tangente unitario*** a la curva C en P: $\mathbf{u}=\dfrac{1}{|\mathbf{r}'|}\cdot\mathbf{r}'$

Para cualquier valor del parámetro w la función vectorial $\mathbf{q}(w)$ se expresa $\mathbf{q}(w)=\mathbf{r}+w\cdot\mathbf{r}'$

Vector Gradiente de un campo escalar

Dado un campo escalar $f(x_1, \ldots, x_n)$, diferenciable, se define al gradiente como el vector

$$\boxed{\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\,\mathbf{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\,\mathbf{e}_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\,\mathbf{e}_n}$$

Se define el operador diferencial nabla

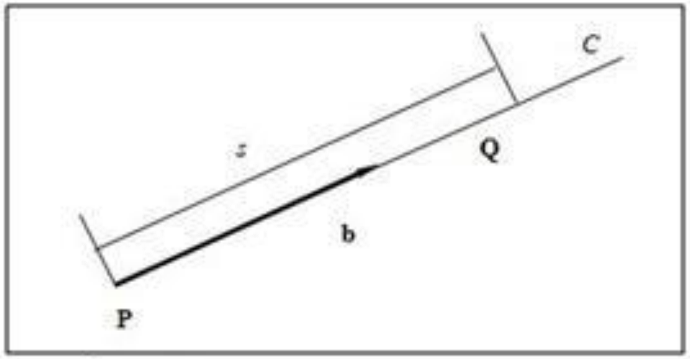
$$\boxed{\nabla = \frac{\partial}{\partial x_1}\,\mathbf{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\,\mathbf{e}_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}\,\mathbf{e}_n}$$

y entonces:

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\,\mathbf{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\,\mathbf{e}_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\,\mathbf{e}_n$$

Relación entre la derivada direccional de un campo escalar y su gradiente

$n = 3$, C: $\mathbf{r}(s) = x(s)\hat{\mathbf{i}} + y(s)\hat{\mathbf{j}} + z(s)\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{p_0} + s \cdot \mathbf{b}$



$\mathbf{r}' = x'\,\mathbf{i} + y'\,\mathbf{j} + z'\,\mathbf{k} = \mathbf{b}$ [1]

$s \geq 0$, $\|\mathbf{b}\| = 1$ y $\mathbf{p_0}$ la posición del vector $\mathbf{P}$.

$$f(x,y,z) = f[x(s), y(s), z(s)] = F(s)$$

$$f'(\mathbf{P};\mathbf{b}) = D_{\mathbf{b}}F = \frac{dF}{ds} = \lim_{s \to 0} \frac{F(\mathbf{Q}) - F(\mathbf{P})}{s} = \frac{\partial f}{\partial x}x' + \frac{\partial f}{\partial y}y' + \frac{\partial f}{\partial z}z' \quad [2]$$

Teniendo en cuenta [1] y la definición de gradiente: $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}$ [2]

[2] resulta del producto interior del grad f por de $\mathbf{b}$, entonces, finalmente:

$$f'(\mathbf{P};\mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \operatorname{grad} f$$

Divergencia de un campo vectorial

Sea $\mathbf{v}(x,y,z)$ un campo vectorial derivable, donde x,y,z son coordenadas cartesianas, y sean v_1 ; v_2 ; v_3 las componentes de $\mathbf{v}$. Entonces se define la función

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}$$

Que se llama ***divergencia*** de $\mathbf{v}$, o la ***divergencia del campo vectorial*** definido por $\mathbf{v}$. Una notación común para la divergencia de $\mathbf{v}$ es $\nabla \cdot \mathbf{v}$.

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\,\mathbf{k} \right) \cdot \left(v_1\,\mathbf{i} + v_2\,\mathbf{j} + v_3\,\mathbf{k} \right) =$$

$$= \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}$$

Rotor de un campo vectorial

Sea un sistema de coordenadas cartesianas, se establece $\mathbf{v}(x,y,z) = v_1\ \mathbf{i} + v_2\ \mathbf{j} + v_3\ \mathbf{k}$ una función vectorial derivable. Entonces la función

$$\text{rotor}\ \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

se llama ***rotor*** de *la función vectorial* $\mathbf{v}$ o ***rotor*** *del campo vectorial definido por* $\mathbf{v}$.

Interpretación de la Divergencia y del Rotor de un campo vectorial

Divergencia

http://camposeci.blogspot.com.ar/2011/06/significado-de-la-divergencia-de-un.html

Rotor

http://camposeci.blogspot.com.ar/2011/06/significado-del-rotacional-de-un-campo.html