

TEMA 7: INTEGRALES MÚLTIPLES

Contextualización

01-C. Dada una lámina delgada triangular de vértices (0,0), (0,3) y (2,3) cuya densidad en cada punto (x, y) viene dada por $\rho(x, y) = 2x + y$, determinar el punto de tal lámina en donde debe apoyarse sobre un cono metálico para que se mantenga en equilibrio.

Observación Reflexiva

01-R. Encuentre algún significado a la relación que existe entre las integrales dobles y las integrales definidas de funciones de una sola variable.

02-R. Relacione los conceptos de área y de volumen con el de integral doble.

03-R. Imagínese en qué situación, una vez recibido, podría necesitar utilizar sus conocimientos sobre este tema al desempeñar su profesión.

Conceptualización

01-T. Defina la integral doble de una función escalonada e interprete geoméricamente el resultado de la definición.

02-T. ¿Por qué en la bibliografía se acostumbra a clasificar las regiones de integración, para las integrales dobles, en “regiones tipo 1” y “regiones tipo 2”?

03-T. ¿Qué entiende por “fórmula de transformación de coordenadas” o “cambio de variables” en una integral doble? ¿Qué es un Jacobiano?

Experimentación Activa

01-E. Colocar los límites de integración en uno y otro orden de la $\iint_R f(x, y) dx dy$ siendo R la región que queda determinada por las siguientes curvas:

a) $x = 0, y = 0, x + y = 1, x + y = 2$

b) $y^2 = 4 - x, y^2 = 4 - 4x$

c) $x = 1, x = 2, y = x, x = y^2$

02-E. Dadas las siguientes integrales: i) Dibujar la región de integración, ii) cambiar el orden de integración, iii) resolver la integral para $f(x, y) = 1$

a) $\int_{-2}^0 \left[\int_{y-1}^{1-y^2} f(x, y) dx \right] dy$

b) $\int_0^3 \left[\int_{\frac{4}{3}y}^{\sqrt{25-y^2}} f(x, y) dx \right] dy$

c) $\int_0^1 \left[\int_{-x^2}^x f(x, y) dy \right] dx + \int_1^4 \left[\int_{x-2}^x f(x, y) dy \right] dx$

03-E Resolver:

a) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{3 \cos y} x^2 \sin^2 y dx \right] dy$

b) $\int_1^2 \left[\int_{\sqrt{x}}^x (x + 2y) dy \right] dx$



04-E Resuelva los siguientes ejercicios usando el cambio de coordenadas indicado.

- $\iint_R (6 - x + y)^{-1} dx dy$, en donde R es la región limitada por las rectas $x + y = -2$, $x = 0$ e $y = x + 2$ usando la transformación $(x, y) = (u, u - v)$.
- $\iint_R (y^2 - x^2) e^{x^2 + y^2} dx dy$, en donde R es la región limitada por las rectas: $y = 4 + x$, $y = 4 - x$, $y = x$ e $y = -x$, usando la transformación $(x, y) = \left(\frac{v-u}{2}, \frac{u+v}{2}\right)$.
- $\iint_R \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, en donde R es la región limitada por $4 \leq x^2 + y^2 \leq 9$, usando coordenadas polares.
- $\iint_R \frac{x^3}{x^2 + y^2} dx dy$, en donde R es la región del primer cuadrante limitada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, usando coordenadas polares.

05-E Hallar el área de la región limitada por:

- $y = x^2 + 2x$, $y = 3$, $y \leq 3x + 6$, $y = 0$
- $x^2 \leq y \leq \sqrt{2 - x^2}$
- $x^2 + y^2 = 4$ con $|x| \leq y$
- exterior a $x^2 + y^2 = 9$ e interior a $x^2 + y^2 = 6y$

06-E Usando integrales dobles, calcular el volumen del sólido del 1^{er} octante, limitado por:

- los planos: $x = 1$, $x = 5$ y el cilindro $y^2 + z^2 = 16$.
- el plano $x + y + z = 5$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 4$.
- el plano $x = 5$ y el paraboloides $y^2 + z^2 = 4x$.

07-E Calcular $\iiint_T x \cos(y + z) dx dy dz$, donde T es el sólido limitado por: $y + z = \pi$, $y = x$, $x = 0$, $z = 0$.

08-E Calcular, usando coordenadas cilíndricas:

- el volumen encerrado por $3(x^2 + y^2 - 1) + z^2 = 0$.
- $\iiint_T \sqrt{(x^2 + y^2)z^2} dx dy dz$, donde T es el sólido limitado por: $x^2 + y^2 = 2x$, $z = 0$, $z = 3$.

09-E Hallar, usando coordenadas esféricas:

- el volumen encerrado por $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = x^2 + y^2 + z^2$.
- la masa del sólido determinado por $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $z^2 = 3(x^2 + y^2)$ sabiendo que su densidad viene dada por la función $f(x, y, z) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.