

Tema 7: Integrales Múltiples

Contextualización

- 01-C. Dada una lámina delgada triangular de vértices $(0,0)$, $(0,3)$ y $(2,3)$ cuya densidad en cada punto (x, y) viene dada por $\rho(x, y) = 2x + y$, determinar el punto de tal lámina en donde debe apoyarse sobre un cono metálico para que se mantenga en equilibrio.

Observación Reflexiva

- 01-R. Encuentre algún significado a la relación que existe entre las integrales dobles y las integrales definidas de funciones de una sola variable.
- 02-R. Relacione los conceptos de área y de volumen con el de integral doble.
- 03-R. Imagínese en qué situación, una vez recibido, podría necesitar utilizar sus conocimientos sobre esta tema al desempeñar su profesión.

Conceptualización

- 01-T. Defina la integral doble de una función escalonada e interprete geométricamente el resultado de la definición.
- 02-T. ¿Por qué en la bibliografía se acostumbra a clasificar las regiones de integración, para las integrales dobles, en “regiones tipo I” y “regiones tipo 2”.
- 03-T. ¿Qué entiende por “fórmula de transformación de coordenadas” o “cambio de variables” en una integral doble? ¿Qué es un Jacobiano?

Experimentación Activa

01-E. Coloque los límites de integración en uno y otro orden de la integral $\iint_R f(x,y) dx dy$ siendo R la región determinada por las siguientes curvas:

- a) $x = \frac{5}{3}(y - 2)$ $y = 2$ $y = 10 - x$
b) $y = \ln(x - 4)$ $x = 6$ $y = 0$
c) $y^2 = 24x$ $y \leq -\frac{3}{4}(x - 6)$ $y = \frac{3}{2}x$

02-E. Calcule el área de la región limitada por:

- a) $R\{(x,y) \in R^2 / y \leq 5 - x; x \geq -3; (x + 3)^2 + 16 \geq 8y\}$
b) $R\{(x,y) \in R^2 / x = 0; x \geq 6 - 3y; x \leq (6y + 9) / 5\}$
c) $R\{(x,y) \in R^2 / y \leq \ln(x - 2) + 3; x \leq 6; y \geq 3\}$

03-E. Dadas las siguientes integrales: a) Grafique la región de integración, b) cambie el orden de integración c) resuelva la integral en la forma más conveniente.

- a) $\int_0^2 \int_0^{6-3y} 9 - \frac{x^2}{4} dx dy$
b) $\int_0^6 \int_{y/3}^{3-y/6} 6 - 2x - \frac{y}{3} dx dy$
c) $\int_0^{\sqrt{3}} \int_{y/\sqrt{3}}^{\sqrt{4-y^2}} 6x - y dx dy$

04-E. Grafique la región de integración y calcule el área empleando coordenadas polares

- a) $R\{(x,y) \in R^2 / x^2 + y^2 - 12x = 0\}$
b) $R\{(x,y) \in R^2 / x^2 + y^2 - 4y = 0; y \leq \sqrt{3}x\}$

05-E. Calcule las siguientes integrales realizando cambio de variables

- a) $\iint_R 3y^2 dx dy$ Donde R es la región acotada por las rectas $y = x + 2$; $y = 4 - x$; $y = -4 - x$ e $y = x + 6$
Emplee el cambio de variables: $x = \frac{u-v}{2}$ $y = \frac{u+v}{2}$
b) $\iint_R \frac{y^2}{18} + \frac{y^2}{9} + 2 dx dy$ Donde R es acotada por las rectas $y + x = 4$ y $x = 0$; $y = 0$
Emplee el cambio de variables: $x = \frac{u-v}{-2}$ $y = \frac{u+v}{2}$

06-E. Dadas las siguientes integrales, grafique la región de integración y resuelva empleando coordenadas polares

- $\iint_R y^2 - 2 \, dx \, dy$ siendo $R \left\{ (x, y) \in R^2 / x^2 + y^2 \leq 25; y = 0; y = \frac{1}{\sqrt{3}}x \right\}$
- $\iint_R x - y \, dx \, dy$ siendo R la región comprendida entre: $4x^2 + y^2 = 16$; $y = x$; $x = 0$
- $\iint_R 12 - \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{25} \, dx \, dy$ siendo $R \{ (x, y) \in R^2 / 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4; y \leq 0 \}$

07-E. Calcule el volumen de los cuerpos delimitados por las siguientes superficies, en el primer octante:

- $6x + 3y + z - 18 = 0$; $z = 0$
- $2x + 2y + z - 8 = 0$; $x + 3y = 3$; $z = 0$
- $z = 6 - x^2$; $z = 2 - \frac{x^2}{2}$; $0 \leq y \leq 2$

08-E. Emplee coordenadas cilíndricas para calcular el volumen de un sólido que se encuentra limitado por las siguientes superficies:

- $z = x^2 + y^2$; $z = 9$
- $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$; $x^2 + y^2 = 81$
- $z = \frac{x^2 + y^2}{4}$; $z = 2x$

09-E. Emplee coordenadas esféricas para calcular el volumen de un sólido, donde V se encuentra ubicado en el primer octante

- $x^2 + y^2 + z^2 = z$
- $x^2 + y^2 + z^2 = 9$; $x^2 + y^2 + z^2 = 36$; $x^2 + y^2 = 3z^2$

10-E. Calcule la masa del sólido limitado por la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ y por el cono $x^2 + y^2 = 3z^2$. Sabiendo que la densidad de masa en cada punto es $\delta(x, y, z) = 2\rho$

-----ooo0ooo-----