Análisis Matemático II
Presentaciones en el Aula

TEMA 7

Integrales Múltiples

Autor: Gustavo Lores

2013

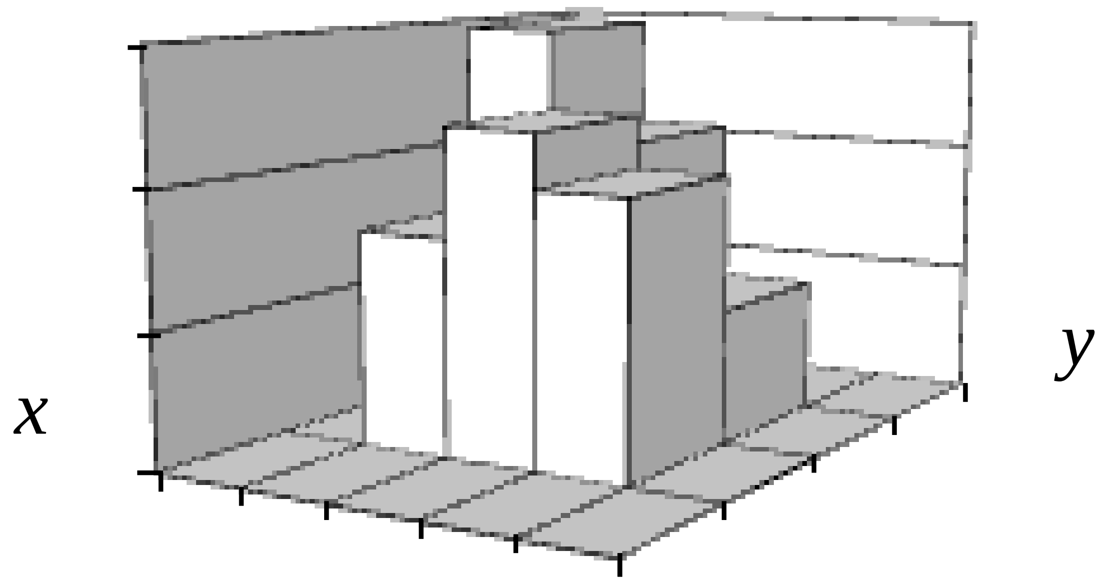
Introducción

En este capítulo se extiende el concepto de integral definida de una función de una variable $\int_a^b f(x)dx$, a funciones de varias variables.

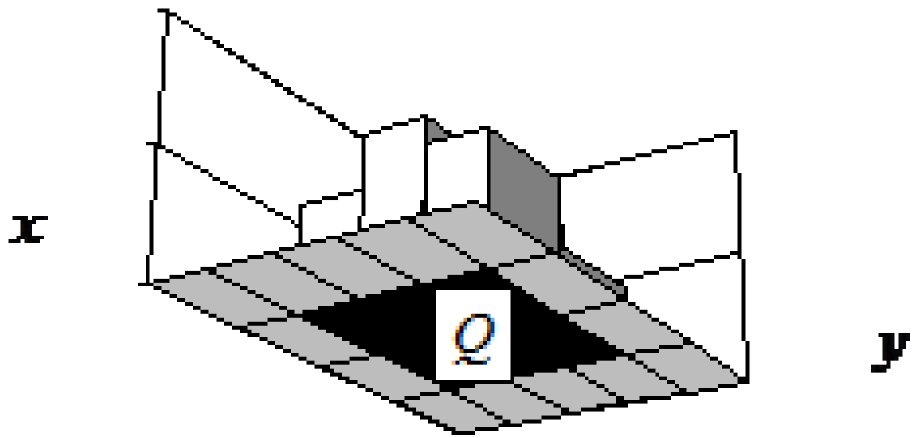
Se comienza por analizar el caso de funciones de dos variables que se integran sobre regiones en el plano, transformándose el intervalo de integración $x \in [a,b]$ unidimensional en un conjunto de puntos pertenecientes a una región $(x,y) \in S \subseteq \mathbb{R}^2$ que se denominará *región de integración*.

Se verán aplicaciones de las integrales dobles y se presentarán los conceptos fundamentales que son necesarios para el manejo de las integrales triples.

Sea una función $f(x,y)$ escalonada en determinada región rectangular $Q \subseteq \boldsymbol{R}^2$, esto es la función es constante en cada partición de Q.



La misma gráfica se puede observar desde otra perspectiva:



Integral doble de una función escalonada sobre una región rectangular

Definición:

Sea $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_1 \times \boldsymbol{P}_2$ una partición de Q en $n \cdot m$ subrectángulos y f una función escalonada. Sea Q_{ij} el subrectángulo determinado por $\left[x_i - x_{i-1}\right] \times \left[y_j - x_{j-1}\right]$ y sea c_{ij} el valor constante que toma f en cada punto de Q_{ij}. Si f es positiva, el volumen de la caja rectangular con base Q_{ij} y altura c_{ij} es el producto

$$c_{ij} \cdot (x_i - x_{i-1}) \cdot (y_j - x_{j-1})$$

Para toda función escalonada f, positiva o no, se define como ***integral doble de la función escalonada f extendida a la región Q*** a:

$$\iint_Q f \, dx \, dy = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} \cdot (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

o, utilizando una notación simplificada

$$\iint_Q f(x,y) \, dx \, dy = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} \cdot \Delta x \cdot \Delta y$$

La integral doble como integrales unidimensionales reiteradas

Como f es constante en cada subrectángulo Q_{ij}, se tiene que

$$\iint_{Q_{ij}} f = c_{ij} \cdot (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

y como

$$x_i - x_{i-1} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \quad ; \quad y_j - x_{j-1} = \int_{y_{j-1}}^{y_j} dx$$

resulta

$$\iint_{Q_{ij}} f = \int_{y_{j-1}}^{y_j} \left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} c_{ij}\, dx \right] dy = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\int_{y_{j-1}}^{y_j} c_{ij}\, dy \right] dx$$

Sumando respecto de i y j aplicando

$$\iint_{Q} f\, dx\, dy = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} \cdot (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

se tiene

$$\iint_{Q} f = \int_{c}^{d} \left[\int_{a}^{b} f(x,y)\, dx \right] dy = \int_{a}^{b} \left[\int_{c}^{d} f(x,y)\, dy \right] dx$$

Integral doble: función continua y acotada definida en un rectángulo

Si $f = f(x,y)$ es una función integrable, definida y acotada en un rectángulo $Q = [a,b]\times[c,d]$ y para cada valor de y fijo en $[c,d]$ existe $\int_a^b f(x,y)\,dx = A(y)$ entonces, si existe la integral $\int_c^d A(y)\,dy$, es igual a la integral doble $\iint_Q f$, y se expresa mediante:

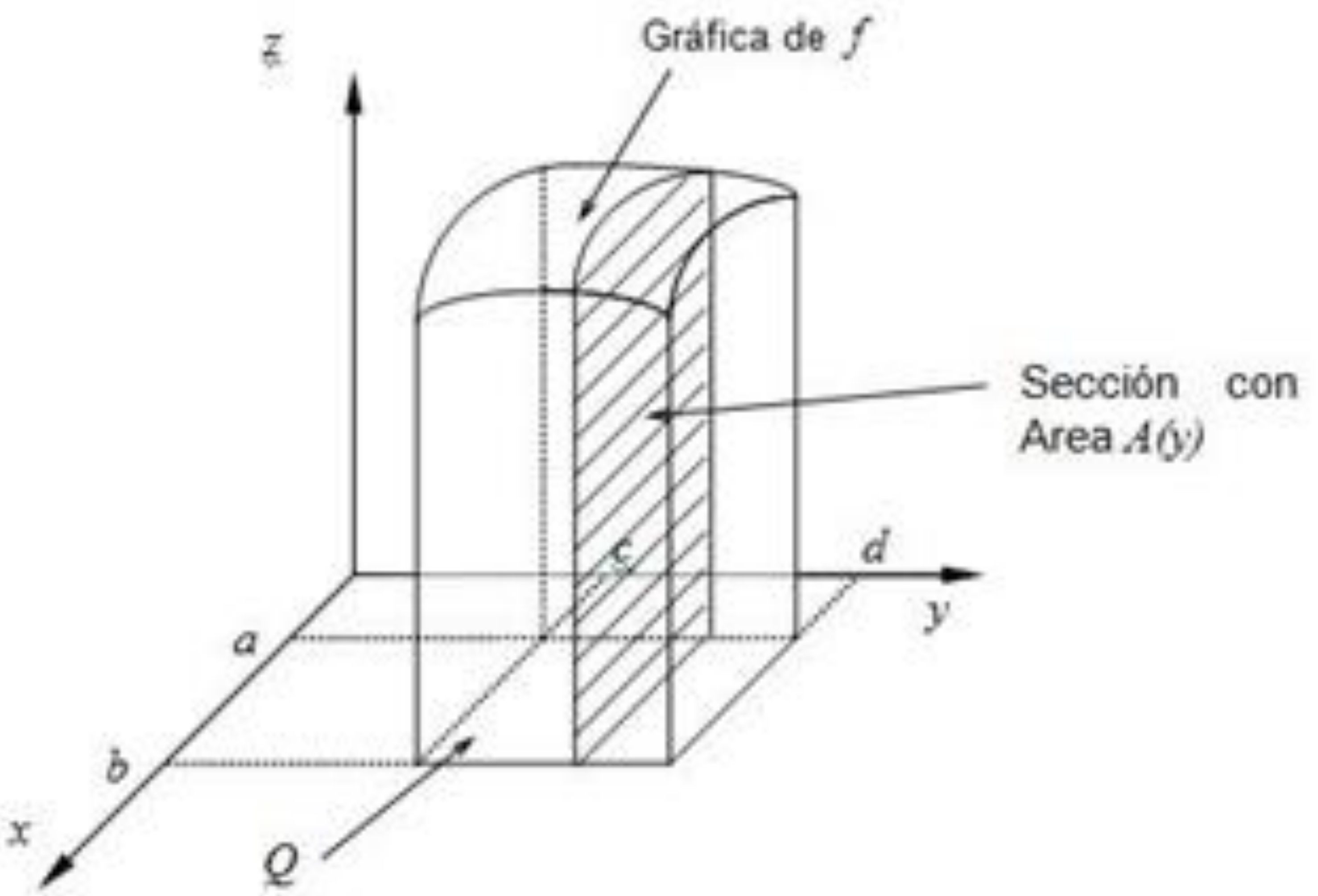
$$\boxed{\iint_Q f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right] dy}$$

Si se invierte el orden de integración, se obtiene una fórmula similar

$$\boxed{\iint_Q f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right] dx}$$

en la medida que se verifique que $\int_c^d f(x,y)\;dy$ existe para cada x fija en $[a,b]$ y que sea integrable en $[c,d]$.

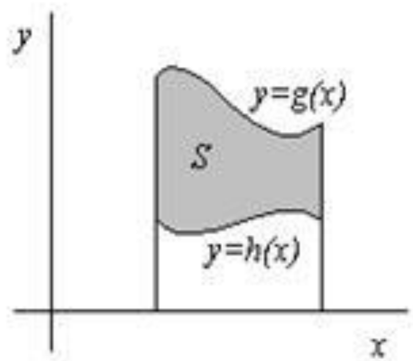
Integral doble: una interpretación geométrica



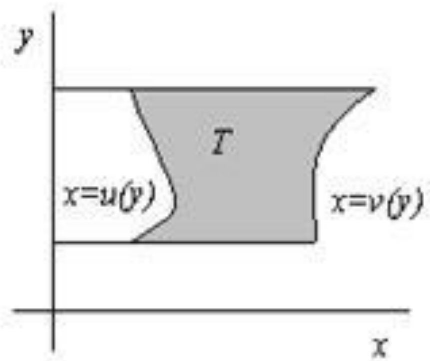
Integral doble: regiones de integración más generales

Se puede reducir el estudio de regiones más generales a dos tipos, que, combinados, conforman cualquier región del plano. En las Figuras se muestran dichas regiones, que se identifican como regiones ***tipo I*** o regiones ***tipo II***, respectivamente.

Región tipo I



Región tipo II



Los conjuntos S del plano, en función de a qué tipo de región pertenecen, se definen:

Región tipo I: $S=\{(x,y)\,|\,a\le x\le b \;\text{ y }\; h(x)\le y\le g(x)\}$

Región tipo II: $T=\{(x,y)\,|\,c\le y\le d \;\text{ y }\; u(y)\le x\le v(y)\}$

Integral doble: regiones de integración más generales

Integrales dobles en regiones tipo I

Sea S una región del tipo **I**, comprendida entre las gráficas de $h(x)$, $g(x)$. Si f está definida en S, es acotada en S y es continua en el interior de S, entonces existe la integral doble $\iint_S f$ que puede calcularse mediante la integración uni-dimensional reiterada:

$$\iint_S f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy \right] dx$$

Integrales dobles en regiones tipo II

Sea S una región del tipo **II**, comprendida entre las gráficas de $u(y), v(y)$. Si f está definida en S, es acotada en S y es continua en el interior de S, entonces existe la integral doble $\iint_S f$ que puede calcularse mediante integración uni-dimensional reiterada:

$$\iint_S f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left[\int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)\,dx \right] dy$$

Regiones combinadas tipo I y II

Ciertas regiones, por ejemplo las que están limitadas por circunferencias y elipses, son a la vez de tipo **I** y **II**. En estos casos, el orden de integración es indiferente y se puede escribir:

$$\int_a^b \left[\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)\,dx \right] dy$$

Algunas aplicaciones de las Integrales Dobles

Área de una superficie plana

Sea $S=\{(x,y) \mid a\le x\le b \ \wedge \ g(x)\le y\le h(x)\}$ una región del tipo **I**.

Aplicando la fórmula $\iint\limits_S f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b\left[\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy\right]dx$ y haciendo $f(x,y)=1$

$$\iint\limits_S dx\,dy=\int_a^b\left[h(x)-g(x)\right]dx$$

que es, de acuerdo a los teoremas correspondientes para integrales definidas de funciones de una variable, precisamente **el área de** S.

A regiones del tipo **II** se aplican consideraciones análogas.

Algunas aplicaciones de las Integrales Dobles

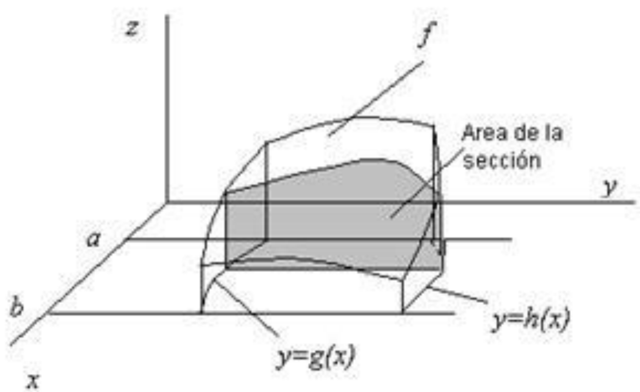
Volumen de un sólido en el espacio $\mathbf{R}^3$

Si $f(x,y)$ es no negativa, el conjunto de puntos (x,y,z) del espacio de tres dimensiones tales que $(x,y)\in S$ y $0\le z\le f(x,y)$ se denomina *conjunto de ordenadas de* f sobre S.

En la figura se ve un ejemplo. Si f es no negativa y continua en S, la integral $\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy$ representa el área de una sección del conjunto de ordenadas producida al cortarlo por un plano paralelo al plano yz, que es la región sombreada.

La integral doble de f sobre S es igual a la integral del área de las secciones. Entonces dicha integral doble es igual al volumen del conjunto de ordenadas de f sobre S.

En general, si $f_1(x,y)$ y $f_2(x,y)$ son ambas continuas en S siendo $f_1\le f_2$, la integral doble $\iint_S (f_2-f_1)$ es igual al volumen del sólido comprendido entre las gráficas de las funciones f_1 y f_2.



Cambio de variables. Fórmula de transformación en integrales dobles

En la teoría de integración uni-dimensional, el método de sustitución permite calcular integrales complicadas transformándolas en otras más sencillas o en tipos que pueden calcularse más fácilmente.

Se concreta a través de un *cambio de variables* dado, en este caso, por la fórmula de transformación

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f\left[g(t)\right]\cdot g'(t)\,dt \qquad [1]$$

donde $a = g(c)$; $b = g(d)$.

La expresión [1] resulta válida para los casos en que g tenga derivadas continuas en $c \leq t \leq d$ y que f es continua en el conjunto de valores que toma $g(t)$ al variar t en el intervalo $[c, d]$.

Una posibilidad análoga existe para la integrales dobles. Se podría transformar una integral doble de la forma

$\iint_S f(x,y)\,dx\,dy$, extendida en una región S del plano (x,y),

en otra de la forma

$\iint_T F(u,v)\,du\,dv$ sobre una región T del plano (u,v).

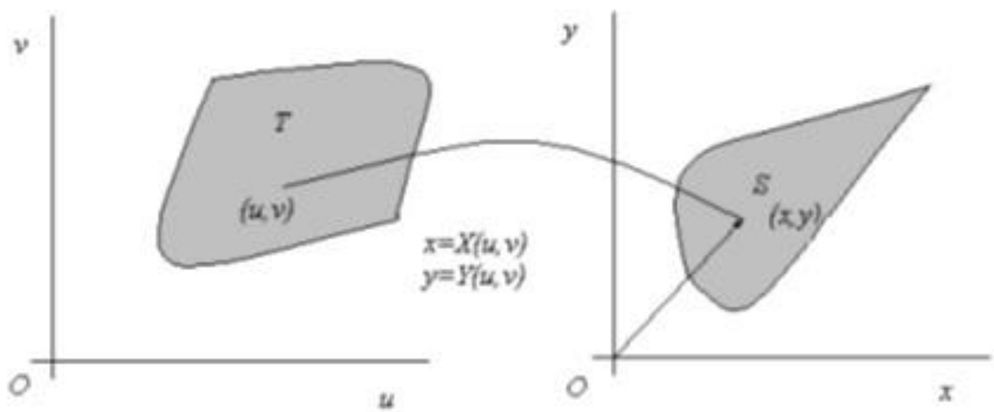
Cambio de variables. Fórmula de transformación en integrales dobles

Resulta necesario estudiar la relación entre las regiones $S \wedge T$ y entre los integrandos $f(x,y) \wedge F(u,v)$.

A diferencia del caso uni-dimensional, en lugar de una función g como aparece en [1], surgen dos funciones, $X \wedge Y$ para relacionar (x,y) con (u,v) del modo siguiente:

$$\left.\begin{aligned} x &= X(u,v) \\ y &= Y(u,v) \end{aligned}\right\} \qquad [2]$$

Geométricamente, se puede considerar que las ecuaciones [2] definen una aplicación que hace corresponder a un punto (u,v) del plano uv el punto imagen (x,y) del plano xy. Se puede observar al conjunto de puntos T del plano uv aplicado en otro conjunto S del plano xy.



Teorema: cambio de variables en una integral doble

Sea $f(x,y):\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua de las variables x, y, definida en la región $S \subseteq \mathbb{R}^2$.

Sea g una función que transforma los puntos u, v de la región T en puntos x, y de la región S mediante la expresión $g(u,v) = (x, y)$.

A su vez, $g(u,v) = \begin{cases} g_1 = g_1(u,v) = X(u,v) \\ g_2 = g_2(u,v) = Y(u,v) \end{cases}$

Si tanto $F(u,v)$ como sus derivadas son continuas en T, entonces:

$$\iint_S f(x,y)\,dx\,dy = \iint_T f[g(u,v)] \cdot |J(u,v)|\,du\,dv = \iint_T f[X(u,v), Y(u,v)] \cdot |J(u,v)|\,du\,dv \qquad [3]$$

donde el factor $J(u,v)$ es formalmente equivalente a $g'(t)$ en la expresión [1].

Este factor se llama *Jacobiano* de la transformación definida por [2]. Su valor es

$$J(u,v) = \frac{\partial(X,Y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial X}{\partial u} & \dfrac{\partial Y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial X}{\partial v} & \dfrac{\partial Y}{\partial v} \end{vmatrix} \qquad [4]$$

Para que la fórmula [3] sea válida, se debe cumplir que X, Y sean continuas y tengan derivadas parciales continuas $\partial X/\partial u$, $\partial X/\partial v$, $\partial Y/\partial u$, $\partial Y/\partial v$ en S, que la aplicación de T en S sea uno a uno y que el Jacobiano de la transformación $J(u,v)$ sea distinto de cero.

Caso particular de transformación: Coordenadas polares

Se define la aplicación con las ecuaciones

$$\begin{cases} x = X(r, \theta) = r \cdot \cos\theta \\ y = Y(r, \theta) = r \cdot \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

Para que la aplicación sea uno a uno, se debe cumplir que $r > 0$ y $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + 2\pi$. El Jacobiano de la aplicación es

$$J(r, \theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -r \cdot \operatorname{sen}\theta & r \cdot \cos\theta \end{vmatrix} = r \cdot \left(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta\right) = r$$

quedando la fórmula de transformación de la forma

$$\iint_S f(x, y)\, dx\, dy = \iint_T f\left(r \cdot \cos\theta, r \cdot \operatorname{sen}\theta\right) \cdot r\, dr\, d\theta$$

Extensión de la integral definida a un número mayor de dimensiones

El concepto de integral múltiple puede extenderse del espacio de dos dimensiones al de n dimensiones, con $n \geq 3$.

El integrando es un campo escalar f definido y acotado en un conjunto S del $n-$espacio.

La integral de f en S, llamada integral $n-$múltiple, se representa mediante los símbolos

$$\int_S \cdots \int f = \int_S \cdots \int f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$$

También se puede utilizar la notación vectorial, con $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_2)$

$$\int_S f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

En el caso que $n = 3$ la integral múltiple se denomina ***integral triple*** y la notación habitual es

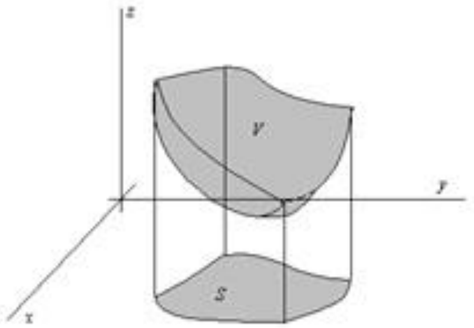
$$\iiint_V f = \iiint_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

Integrales triples. Concepto e interpretación gráfica

Sea V un conjunto en el espacio $3-$dimensional definido de la siguiente manera

$$\begin{cases} V = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in S\} \\ g_1(x,y) \le z \le g_2(x,y) \end{cases}$$

siendo S una región $2-$dimensional, llamada *proyección* de V en el plano xy, mientras que las funciones $g_1(x)$, $g_2(x)$ son continuas en V.



Los conjuntos de este tipo están limitados por dos superficies de ecuaciones cartesianas $z = g_1(x,y) \wedge z = g_2(x,y)$ y, a veces, una porción de superficie cilíndrica engendrada por una recta que se desplaza paralelamente al eje z siguiendo la frontera de S.

Si f es continua en el interior de V se tiene la fórmula de iteración

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_S \left[\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right] dx\,dy$$

Es decir, para x,y fijos, la primera integración se efectúa z desde la superficie frontera inferior hasta la superior. Esto reduce el cálculo a una integral doble sobre la proyección S, que se trata con los métodos de resolución de integrales dobles.

Cambio de variables en integrales triples. Coordenadas cilíndricas

Las coordenadas cilíndricas consisten en tomar coordenadas polares (ρ, θ) en cada plano horizontal, es decir para cada valor constante de la coordenada z.

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta; \quad (\rho > 0,\ 0 \leq \theta < 2\pi) \\ z = z \end{cases}$$

y entonces $\|J\| = \rho$ y $dxdydz = \rho \cdot dzd\rho d\theta$.

La inversa de este cambio es: $\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ tg(\theta) = y/x \\ z = z \end{cases}$

Ecuaciones de algunas superficies en cartesianas y cilíndricas:

- Cilindro de generatrices paralelas al eje z: $x^2 + y^2 = k^2$ (k constante) $\Leftrightarrow \rho = k$.
- Esfera de centro $(0, 0, 0)$ y radio r: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \Leftrightarrow \rho^2 + z^2 = r^2$
- Cono: $x^2 + y^2 - k^2z^2 = 0$ (k constante) $\Leftrightarrow \rho^2 - k^2z^2 = 0$
- Paraboloide: $z = k(x^2 + y^2)$ (k constante) $\Leftrightarrow z = k \cdot \rho^2$

Cambio de variables en integrales triples. Coordenadas esféricas

Las coordenadas esféricas (ρ, θ, φ) de un punto del espacio son su módulo ρ y su latitud θ y su altitud φ medidos sobre la esfera de radio ρ.

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \cos \theta \\ y = \rho \cos \varphi \, sen\, \theta; \quad (\rho > 0,\ 0 \leq \theta < 2\pi,\ -\pi/2 \leq \varphi < \pi/2) \\ z = \rho \, sen\, \varphi \end{cases}$$

y entonces $\|J\| = \rho^2 \cos \varphi$ y $dxdydz = \rho^2 \cos \varphi \cdot d\rho d\varphi d\theta$.

La inversa de este cambio es: $\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ tg(\theta) = y/x \\ sen(\varphi) = z/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{cases}$

Ecuaciones de algunas superficies en cartesianas y esféricas:

- Esfera de centro $(0, 0, 0)$ y radio r: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \Leftrightarrow \rho = r$
- Esfera de centro $(0, 0, r)$ y radio r: $x^2 + y^2 + z^2 - 2rz = 0 \Leftrightarrow \rho = 2r \cdot sen\, \varphi$
- Cono: $x^2 + y^2 - k^2 z^2 = 0$ (k constante) $\Leftrightarrow tg(\varphi) = 1/k$