

Tema 6: Estudio de funciones de dos variables independientes

Contextualización

01-C. Una empresa dispone de dos fábricas, A y B , en cada una de las cuales elabora el mismo producto. El costo total de producción de cada fábrica depende de la respectiva cantidad de productos fabricados, siendo para la fábrica A de $\$ 3x^2 + 2700$ y para la B de $\$ 2y^2 + 12800$, donde x e y representan las cantidades producidas en cada fábrica. Determinar cómo debe distribuirse la producción entre las dos fábricas para cumplir un pedido de 110 productos, a fin de minimizar el costo total de producción. Calcular el costo unitario de producción para esta distribución, y compararlo con otras diez posibles distribuciones cualesquiera, incluidas las de fabricar todos los productos sólo en A y todos los productos sólo en B .

02-C. Se dispone de dos máquinas M_1 y M_2 para fabricar tres productos diferentes P_1 , P_2 y P_3 . El tiempo, en minutos, necesario para fabricar una unidad de cada artículo en cada una de las máquinas viene dado por la tabla:

	P_1	P_2	P_3
M_1	6	9	5
M_2	7	8	6

La máquina M_1 puede funcionar 5 horas al día y la máquina M_2 puede hacerlo durante 6 horas. Cada unidad de los productos diferentes P_1 , P_2 y P_3 produce un beneficio, respectivamente, de $\$ 25$, $\$ 30$ pesos y $\$ 16$. En estas condiciones, determinar el plan de producción para obtener un máximo beneficio.

03-C. Para fabricar un abono combinado se dispone de tres productos P_1 , P_2 y P_3 , que contienen cada uno dos sustancias distintas E_1 y E_2 . Cada miligramo de los tres productos tiene un costo final de $\$ 4,00$; $\$ 5,00$ y $\$ 3,00$ respectivamente y la composición química de cada uno de ellos con relación a las sustancias mencionadas viene dada, en porcentajes contenidos, por la tabla:

	E_1	E_2
P_1	60%	40%
P_2	30%	70%
P_3	20%	80%

Si el abono preparado debe contener, al menos, un 30% de E_1 y un 50% de E_2 , formular la composición del abono que resulte en el menor costo.

Observación Reflexiva

01-R. ¿Por qué el plano tangente a la gráfica de una función de dos variables en un extremo relativo es horizontal? ¿Podría justificarlo al menos con dos razonamientos diferentes?

Conceptualización

01-T. Defina máximo relativo para una función real de dos variables reales. Proporcione un ejemplo. Representelo gráficamente.

- 02-T ¿Cuáles son las condiciones necesarias y suficientes para que quede establecido que un punto es un mínimo relativo?
- 03-T ¿Conoce alguna forma de clasificar los puntos críticos de una función real de dos variables reales?
- 04-T. ¿Qué interpreta cuando se hace referencia a extremos condicionados?
¿Podría proponer un problema real que se pueda resolver sólo aplicando el concepto de extremo condicionado?

Experimentación Activa

- 01-E. Investigar la existencia de puntos críticos en las siguientes funciones. En el caso a) sólo en el punto en que se indica; en el caso b) verificar los resultados en forma gráfica:
- a) $z = (x - y)^4 + (y - 1)^4$ en el punto (1,1)
- b) $f(x, y) = \frac{4}{3}y^3 - 3y + x^2y - 2xy$
- 02-E. Determinar y clasificar los extremos relativos de las funciones:
- a) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 2$
- b) $f(x, y) = 4x^2 + y^3 - 16xy + 16y^2 - 12y + 5$
- 03-E. Determinar y clasificar los extremos absolutos de la siguiente función y efectuar el análisis en las regiones indicadas y en sus respectivas fronteras:
- a) $f(x, y) = e^{x^2 - 2x + y^2}$ en la región $x^2 + y^2 \leq 4$
- b) $f(x, y) = (x - 3)^2 + y^2$ en la región $R = \{0 \leq x \leq 4; x^2 \leq y \leq 4x\}$
- 04-E. Aplicando el método de los Multiplicadores de Lagrange, determinar si existen extremos ligados para las funciones que se indican con las respectivas condiciones. En caso de encontrarlos, clasificar los puntos obtenidos estableciendo si se trata de máximos o mínimos.
- a) $f(x, y, z) = xyz$; con la condición $x + y + z = 3$
- b) $z = 6 - 4x - 3y$; con la condición $x^2 + y^2 = 1$
- 05-E. Una caja rectangular descansa sobre plano xy con un vértice en el origen. Encontrar el volumen máximo de la caja si su vértice opuesto al origen pertenece al plano $6x + 4y + 3z = 24$
- 06-E. Un caño de 12 m de longitud debe partitionarse en tres tramos de manera que el producto de las dimensiones de los tramos sea máximo. Hallar las dimensiones de los tramos y el producto de los mismos.
- 07-E. Hallar la mínima necesidad de cartón (idealmente) para la construcción de una caja rectangular sin tapa, para una capacidad de 575 cm^3 .
- 08-E. Una latita de cerveza tiene que contener 355 cm^3 de bebida más 20 cm^3 de espacio libre para la expansión del contenido. Hallar sus dimensiones ideales.