Tema 6: Estudio de funciones de dos variables independientes

Contextualización

01-C. Una empresa dispone de dos fábricas, A y B, en cada una de las cuales elabora el mismo producto. El costo total de producción de cada fábrica depende de la respectiva cantidad de productos fabricados, siendo para la fábrica A de \$ $3x^2 + 2700$ y para la B de \$ $2y^2 + 12800$, donde x e y representan las cantidades producidas en cada fábrica. Determinar cómo debe distribuirse la producción entre las dos fábricas para cumplir un pedido de 110 productos, a fin de minimizar el costo total de producción. Calcular el costo unitario de producción para esta distribución, y compararlo con otras diez posibles distribuciones cualesquiera, incluidas las de fabricar todos los productos sólo en A y todos los productos sólo en B.

02-C. Se dispone de dos máquinas M_1 y M_2para fabricar tres productos diferentes P_1, P_2 y P_3. El tiempo, en minutos, necesario para fabricar una unidad de cada artículo en cada una de las máquinas viene dado por la tabla:

	P_1	P_2	P_3
M_1	6	9	5
M_2	7	8	6

La máquina M_1 puede funcionar 5 horas al día y la máquina M_2 puede hacerlo durante 6 horas. Cada unidad de los productos diferentes P_1, P_2 y P_3 produce un beneficio, respectivamente, de \$ 25, \$ 30 pesos y \$ 16. En estas condiciones, determinar el plan de producción para obtener un máximo beneficio.

03-C. Para fabricar un abono combinado se dispone de tres productos P_1, P_2 y P_3, que contienen cada uno dos sustancias distintas E_1, E_2. Cada miligramo de los tres productos tiene un costo final de \$ 4,00; \$ 5,00 y \$ 3,00 respectivamente y la composición química de cada uno de ellos con relación a las sustancias mencionadas viene dada, en porcentajes contenidos, por la tabla:

	E_1	E_2
P_1	60%	40%
P_2	30%	70%
P_3	20%	80%

Si el abono preparado debe contener, al menos, un 30% de E_1 y un 50% de E_2, formular la composición del abono que resulte en el menor costo.

Observación Reflexiva

01-R. ¿Por qué el plano tangente a la gráfica de una función de dos variables en un extremo relativo es horizontal? ¿Podría justificarlo al menos con dos razonamientos diferentes?

Conceptualización

01-T. Defina máximo relativo para una función real de dos variables reales. Proporcione un ejemplo. Represéntelo gráficamente.

02-T ¿Cuáles son las condiciones necesarias y suficientes para que quede establecido que un punto es un mínimo relativo?

03-T ¿Conoce alguna forma de clasificar los puntos críticos de una función real de dos variables reales?

04-T. ¿Qué interpreta cuando se hace referencia a extremos condicionados? ¿Podría proponer un problema real que se pueda resolver sólo aplicando el concepto de extremo condicionado?

Experimentación Activa

01-E. Determinar la existencia de extremos relativos en las siguientes funciones:

a) $f(x,y) = -x^2 + 3y^2 + 2xy - 6x - 2y - 4$

b) $f(x,y) = x^4 - 32y + y^4 + 2$

c) $f(x,y) = x^2y - 4xy^2 + y^2$

d) $f(x,y) = xy(2x + 4y + 1)$

02-E. A continuación, se dan las derivadas de segundo orden de una función $z = f(x,y)$ diferenciable. Se supone que en (x_0,y_0) las derivadas parciales primeras se anulan. Decida, en cada caso, si en (x_0,y_0) hay un máximo relativo, un mínimo relativo, un punto silla o si la información es insuficiente para decidir.

a) $f_{xx}(x_0,y_0) = -5$, $f_{xy}(x_0,y_0) = 3$, $f_{yy}(x_0,y_0) = -4$

b) $f_{xx}(x_0,y_0) = 9$, $f_{xy}(x_0,y_0) = 6$, $f_{yy}(x_0,y_0) = 4$

c) $f_{xx}(x_0,y_0) = 2$, $f_{xy}(x_0,y_0) = 4$, $f_{yy}(x_0,y_0) = 9$

d) $f_{xx}(x_0,y_0) = -6$, $f_{xy}(x_0,y_0) = -7$, $f_{yy}(x_0,y_0) = -5$

03-E. Determinar y clasificar los extremos relativos de las siguientes funciones.

a) $f(x,y) = 2x^2 + 2xy + 5y^2 + 2x - 2y + 7$

b) $f(x,y) = x^2y + xy^2 - x - 1$

c) $f(x,y) = (y + x^2)e^{x-y}$

d) $f(x,y) = 3x^3 - 2y^3 + 3xy^2 - 4x$

04-E. Determinar y clasificar los extremos absolutos de las siguientes funciones.

a) $f(x,y) = 1 + x + y^2$ en la región $R = \{(x,y)/\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 2\}$

b) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ en la región $R = \{(x,y)/\ 0 \leq x \leq 2,\ -1 \leq y \leq 2\}$

c) $f(x,y) = x^2 + 5y^2 - 6x + 15$ en la región $R = \{(x,y)/\ (x-3)^2 + y^2 \leq 1\}$

05-E. Hallar los extremos condicionados de las siguientes funciones aplicando el método multiplicadores de Lagrange, y clasificarlos.

a) $f(x,y) = 6 - 4x - 3y$ sujeto a $x^2 + y^2 = 1$ con $x, y > 0$

b) $f(x,y,z) = 2x + y - z$ sujeto a $xyz = 32$

c) $f(x,y,z) = xy^2z^3$ sujeto a $x + y + z = 6$

06-E. Una lata de gaseosa debe contener 354 cm^3 de bebida y 20 cm^3 de espacio libre para la expansión del contenido. Determinar las dimensiones que debe tener la lata para minimizar la cantidad de material utilizado en su elaboración.

07-E. Hallar las coordenas de un vector unitario tal que el resultado de su producto escalar con el vector $\vec{v} = (-6,6,7)$ sea máximo.

08-E. Determinar el volumen máximo de una caja rectangular, sin tapa, tal que el área de su superficie sea 108 cm^2.

09-E. Hallar las coordenadas del punto del plano $2x + y - z = 6$ que se encuentra a la menor distancia del origen de coordenadas.