TEMA 6: ESTUDIO DE FUNCIONES DE DOS VARIABLES INDEPENDIENTES

Contextualización

01-C. Una empresa dispone de dos fábricas, A y B, en cada una de las cuales elabora el mismo producto. El costo total de producción de cada fábrica depende de la respectiva cantidad de productos fabricados, siendo para la fábrica A de \$ $3x^2 + 2700$ y para la B de \$ $2y^2 + 12800$, donde x e y representan las cantidades producidas en cada fábrica. Determinar cómo debe distribuirse la producción entre las dos fábricas para cumplir un pedido de 110 productos, a fin de minimizar el costo total de producción. Calcular el costo unitario de producción para esta distribución, y compararlo con otras diez posibles distribuciones cualesquiera, incluidas las de fabricar todos los productos sólo en A y todos los productos sólo en B.

02-C. Se dispone de dos máquinas M_1 y M_2para fabricar tres productos diferentes P_1, P_2 y P_3. El tiempo, en minutos, necesario para fabricar una unidad de cada artículo en cada una de las máquinas viene dado por la tabla:

	P_1	P_2	P_3
M_1	6	9	5
M_2	7	8	6

La máquina M_1 puede funcionar 5 horas al día y la máquina M_2 puede hacerlo durante 6 horas. Cada unidad de los productos diferentes P_1, P_2 y P_3 produce un beneficio, respectivamente, de \$ 25, \$ 30 pesos y \$ 16. En estas condiciones, determinar el plan de producción para obtener un máximo beneficio.

03-C. Para fabricar un abono combinado se dispone de tres productos P_1, P_2 y P_3, que contienen cada uno dos sustancias distintas E_1, E_2. Cada miligramo de los tres productos tiene un costo final de \$ 4,00; \$ 5,00 y \$ 3,00 respectivamente y la composición química de cada uno de ellos con relación a las sustancias mencionadas viene dada, en porcentajes contenidos, por la tabla:

	E_1	E_2
P_1	60%	40%
P_2	30%	70%
P_3	20%	80%

Si el abono preparado debe contener, al menos, un 30% de E_1 y un 50% de E_2, formular la composición del abono que resulte en el menor costo.

Observación Reflexiva

01-R. ¿Por qué el plano tangente a la gráfica de una función de dos variables en un extremo relativo es horizontal? ¿Podría justificarlo al menos con dos razonamientos diferentes?

Conceptualización

01-T. Defina máximo relativo para una función real de dos variables reales. Proporcione un ejemplo. Represéntelo gráficamente.

02-T ¿Cuáles son las condiciones necesarias y suficientes para que quede establecido que un punto es un mínimo relativo?

03-T ¿Conoce alguna forma de clasificar los puntos críticos de una función real de dos variables reales?

04-T. ¿Qué interpreta cuando se hace referencia a extremos condicionados? ¿Podría proponer un problema real que se pueda resolver sólo aplicando el concepto de extremo condicionado?

Experimentación Activa

01-E. Determine la existencia de extremos relativos en las siguientes funciones:

a) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 4x + 8y + 12$

b) $f(x,y) = \frac{(y+1)^2}{9} - (x-5)^2 + 3$

c) $f(x,y) = x^2 - 2y^2 - 2xy - 6x + 4y - 30$

02-E. A continuación, se dan las derivadas de segundo orden de una función $z = f(x,y)$ diferenciable. Se supone que en (x_0, y_0) las derivadas parciales primeras se anulan. Decida, en cada caso, si en (x_0, y_0) hay un máximo relativo, un mínimo relativo, un punto silla o si la información es insuficiente para decidir.

a) $f_{xx}(x_0,y_0) = 5$, $f_{yy}(x_0,y_0) = 2$, $f_{xy}(x_0,y_0) = 3$

b) $f_{xx}(x_0,y_0) = 6$, $f_{yy}(x_0,y_0) = 2$, $f_{xy}(x_0,y_0) = 4$

c) $f_{xx}(x_0,y_0) = 1$, $f_{yy}(x_0,y_0) = 9$, $f_{xy}(x_0,y_0) = 3$

d) $f_{xx}(x_0,y_0) = -15$, $f_{yy}(x_0,y_0) = -2$, $f_{xy}(x_0,y_0) = 5$

03-E. Determine y clasifique los extremos relativos de las siguientes funciones.

a) $f(x,y) = 10x^2y - 5x^2 - 4y^2 + 5x^3$

b) $f(x,y) = x^3 - y^3 - 12x + 27y - 5$

c) $f(x,y) = 2e^{2x-2y}(x^2 + 3x + y)$

d) $f(x,y) = x^2 - \frac{3}{2}y^2 - xy^2 + y^4$

04-E. Determine y clasifique los extremos absolutos de las siguientes funciones.

a) $f(x,y) = x^2 - xy + 2y$; $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ 0 \le x \le 3 \ ; \ 0 \le y \le 2\}$

b) $f(x,y) = sen\,(xy)$; $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \le x \le \pi \ ; \ 0 \le y \le 1\}$

c) $f(x,y) = x(1-x-y)$; $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x + y \ge 1\,; 2x + y - 10 \le 0; x = 0; y = 0\}$

d) $f(x,y) = (x+4)^2 + 2y^2 - 4y;\ R = \begin{Bmatrix} (x,y) \in \mathbb{R}^2 / x - 2y + 8 \leq 0; \\ (x+4)^2 \geq 4y + 16 \end{Bmatrix}$

05-E. Calcule los extremos condicionados de las siguientes funciones aplicando el método multiplicadores de Lagrange, y clasifíquelos.

a) $f(x,y) = (x-2)^2 - (y-1)^2$ sujeto a $4x + 2y = 3$

b) $f(x,y,z) = xyz$ sujeto a $4x - 3y - 2z = 1$

c) $f(x,y) = ln(x - 2y)$ sujeto a $x^2 + y^2 = 18$

06-E. Encuentre las coordenadas del punto del plano $2x + y + 2z = 30$ que esté más próximo al punto $(2, 1, -1)$.

07-E. Determine la distancia mínima del punto $P_0(2,5,2)$ al plano $6x + 3y + 2z = 25$.

08-E. Obtenga las coordenadas de los puntos máximos y mínimos de $z = f(x,y,z)$.

Donde $f(x,y,z)$ es la función que se obtiene como intersección de la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 + 16y = 144$ con la superficie $x^2 = 80 - 16y$.

09-E. Determine los valores máximo y mínimo de la función $f(x,y,z) = 19x + 2y + 7z$, en la curva que se obtiene como intersección del plano $x - y + z = 1$ con la superficie cilíndrica $x^2 + y^2 = 1$

----ooo0ooo----