Tema 4: Introducción a los sistemas de EDO de primer orden

Contextualización

01-C. *Modelado de una carrera armamentista, por Michael Olinick.*

El siglo xx ha sido testigo de varias carreras armamentistas peligrosas, desestabilizadoras y costosas. El estallido de la Primera Guerra Mundial (1914-1918) fue la coronación de una rápida acumulación de armamentos entre las potencias europeas rivales. Hubo otra acumulación de armas convencionales justo antes de la Segunda Guerra Mundial (1939- 1945).

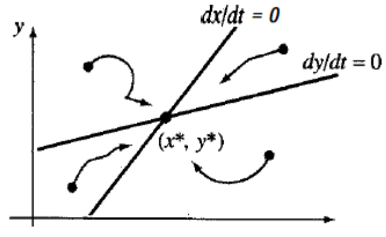
Estados Unidos y la Unión Soviética se enfrascaron en una costosa carrera de armas nucleares durante los cuarenta años de la Guerra Fría. Actualmente y en muchas partes del mundo se ha vuelto costumbre la acumulación de armas más y más mortíferas, como en el Medio Oriente y en los Balcanes.

Lewis F. Richardson, meteorólogo y educador inglés (188 l- 1953), inventó varios modelos matemáticos para tratar de analizar la dinámica de las carreras armamentistas. Su modelo primario se basó en el temor mutuo: una nación se ve acuciada a aumentar su arsenal con una razón proporcional al nivel de gastos de su rival en armamentos. El modelo de Richardson tieneen cuenta restricciones internas en un país que desaceleran la acumulación de armamento, por ejemplo, mientras más gasta en armamentos, más se le dificulta aumentar sus gastos porque cada vez es más difícil desviar los recursos sociales para necesidades básicas (como comida y vivienda) hacia armamentos. En su modelo, también incluyó otros factores que impulsan o detienen una carrera armamentista.

La estructura matemática de este modelo es un sistema interrelacionado de dos ecuaciones diferenciales de primer orden. Si "x" e "y" representan la fracción del poderío invertida en armas por parte de dos países cuando el tiempo es t el modelo tiene la forma:

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = ay(t) - mx + r \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = bx(t) - ny + s \end{cases}$$

En este sistema a, b, m y n son constantes positivas y r y s son constantes que pueden ser positivas o negativas. Las constantes a y b representan el temor mutuo; m y n, factores de proporcionalidad para los *frenos internos* al aumento en armamentos. Valores positivos de r y s corresponden a la mala voluntad o desconfianza que persistirán aun cuando los presupuestos para armamento bajaran a cero. Los valores negativos de r y s indicarían una contribución basada en buena voluntad.



El comportamiento dinámico de este sistema de ecuaciones diferenciales depende de los valores relativos de a, b, m y n, así como de los signos de r y s. Aunque el modelo es bastante sencillo, permite tener en cuenta varios resultados a largo plazo. Es posible que dos naciones evolucionen simultáneamente al desarme cuando x y y tienden, cada uno, a cero. Otro escenario posible es un círculo vicioso de aumentos sin límite en "x" e "y". Un tercer caso es que los gastos en armamento tiendan de manera asintótica a un punto estable (x^*, y^*) independiente de los gastos iniciales. En otros casos el resultado final depende mucho del punto de partida.

Una vez finalizada la resolución del resto de los ejercicios de esta Guía, resuelva el sistema y analice las distintas combinaciones y analice el significado del gráfico.

Observación Reflexiva

01-R. ¿Qué relación encuentra entre los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden y los sistemas de ecuaciones algebraicas?

02-R. Si es que existe alguna relación, ¿se mantendrá la misma al momento de encarar sus respectivas soluciones?

Conceptualización

01-T. Defina sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

02-T. Establezca si las siguientes ecuaciones definen un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. En este caso identificar la variable independiente y las funciones desconocidas:

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{d^2x(t)}{dt^2}+x(t)\cdot z(t)=y(t)+4e^{-2t}\\
\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}+\cos t\,\dfrac{dy(t)}{dt}+\dfrac{dz(t)}{dt}=x-e^{-2t}\\
\dfrac{dx(t)}{dt}+\dfrac{dy(t)}{dt}+e^{y(t)}\,\dfrac{dz(t)}{dt}=z(t)^2+x(t)^{y(t)}
\end{array}\right\}$$

03-T. ¿Qué características deberían tener los coeficientes $a_{ij}(t)$ en el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias para que el mismo pueda ser considerado lineal?

$$\begin{cases}
\dfrac{dx_1}{dt}=a_{11}(t)\cdot x_1+a_{12}(t)\cdot\ x_2\ +\cdots+a_{1n}(t)x_n+f_1(t)\\
\dfrac{dx_2}{dt}=a_{21}(t)\cdot x_1+a_{22}(t)\cdot\ x_2\ +\cdots+a_{2n}(t)x_n+f_2(t)\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\cdots\\
\dfrac{dx_n}{dt}=a_{n1}(t)\cdot x_1+a_{n2}(t)\cdot\ x_2\ +\cdots+a_{nn}(t)x_n+f_n(t)
\end{cases}$$

Experimentación Activa

01-E. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales por el método de eliminación y verifique los resultados:

a)
$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2x-y\\ \dfrac{dy}{dt}=x\end{cases}$$

b)
$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=4x+7y\\ \dfrac{dy}{dt}=x-2y\end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + 5x - 2y = 0 \\ -2x + \dfrac{d^2y}{dt^2} + 2y = 0 \end{cases}$$

02-E. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales aplicando Transformadas de Laplace y verifique los resultados.

a)

$$\begin{cases} x' = -x + y \\ y' = 2x \end{cases} \qquad \text{Con: } \begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = 5x - y \end{cases} \qquad \text{Con: } \begin{cases} x(0) = -1 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} 2x' + y' - 2x = 1 \\ x' + y' - 3x - 3y = 2 \end{cases} \qquad \text{Con: } \begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$