Análisis Matemático II

Facultad de Ingeniería

Análisis Matemático II
Presentaciones en el Aula

TEMA 4

Introducción a los Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden

Autor: Gustavo Lores

2015

Definiciones

Un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias es un conjunto de ecuaciones en las que aparecen las derivadas de dos o más funciones desconocidas y pueden incluir a éstas y a la variable independiente y a funciones conocidas.

Por ejemplo, las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d^2x(t)}{dt^2} + x(t)\cdot z(t) = y(t) + 4e^{-2t} \\ \dfrac{d^2y(t)}{dt^2} + \cos t\,\dfrac{dy(t)}{dt} + \dfrac{dz(t)}{dt} = x - e^{-2t} \\ \dfrac{dx(t)}{dt} + \dfrac{dy(t)}{dt} + e^{y(t)}\,\dfrac{dz(t)}{dt} = z(t)^2 + x(t)^{y(t)} \end{array}\right\} \qquad [1]$$

forman un sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias donde las incógnitas son las funciones $x(t); y(t); z(t)$.

El orden del sistema de ecuaciones diferenciales está dado por el orden de la derivada de mayor orden de cualquiera de las funciones desconocidas.

Los sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden pueden escribirse de la siguiente manera, si se utiliza la notación $x_1(t)$; $x_2(t)$; ...; $x_i(t)$; ...; $x_n(t)$ para definir a n funciones desconocidas que dependen de t:

Resolución de Sistemas de EDO lineales de 1º Orden

4.1. Método de eliminación

Este método es formalmente similar al método de igual nombre utilizado para resolver sistemas de ecuaciones algebraicas.

Consiste en eliminar todas excepto una de las funciones desconocidas. Esto conduce a una ecuación diferencial lineal individual, con una función desconocida y una variable independiente. Si esta ecuación diferencial se resuelve, luego por sustitución se calculan les restantes funciones desconocidas.

4.2. Solución de sistemas lineales por transformadas de Laplace

El método de las transformadas de Laplace se puede utilizar para resolver ecuaciones diferenciales lineales simultáneas con condiciones iniciales o de contorno establecidas.

Aplicación de Sistemas de EDO lineales de 1º Orden

Modelo matemático Depredador - Presa

Las ecuaciones de Lotka-Volterra, también conocidas como ecuaciones **depredador-presa**, son un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden, acopladas, autónomas y no lineales, que se usan para describir dinámicas de sistemas biológicos en el que dos especies interactúan, una como **presa** y otra como **depredador**.

Las especies pueden interactuar entre ellas de diferentes maneras, pudiendo ser estas interacciones positivas (+), negativas (-) o no presentar ningún efecto (0). Cuando ninguna de las dos poblaciones afecta a la otra, la relación es (0 0) o neutra. Si las dos poblaciones se benefician mutuamente, la interacción es (+ +), o positiva, y recibe el nombre de **mutualismo**.
Si la relación no es esencial para la supervivencia de ninguna de las poblaciones, la relación es mutualismo no obligatorio y, por el contrario, cuando la relación es esencial para la supervivencia de ambas poblaciones, nos encontramos ante un **mutualismo obligatorio**.
Cuando una especie proporciona una condición necesaria para el bienestar de otra, la relación (+ 0) es de **comensalismo**.

Aplicación de Sistemas de EDO lineales de 1º Orden

Modelo matemático de la Carrera Armamentista

Se denomina carrera armamentista a la coexistencia competitiva de armamentos y desarrollo de tecnología durante la Guerra. Este modo de estar en alerta se fundamentó, justamente, en el peligro de que cualquiera de ambos bloques pudiera desencadenar una guerra de alcance nuclear. La carrera armamentista está ligada con el desarrollo de las armas.

El modelo de Richardson tiene en cuenta restricciones internas en un país que desaceleran la acumulación de armamento: mientras más gasta en armamentos, más se le dificulta aumentar sus gastos porque cada vez es más difícil desviar los recursos sociales para necesidades básicas (como comida y vivienda) hacia armamentos.

Si x y y representan la fracción del poderío invertida en armas por partes de dos países (*"país X"* y *"país Y"*) cuando el tiempo es t, el modelo tiene la forma: $dx/dt = ay - mx + r$ y $dy/dt = bx - ny + s0$

Análisis Matemático II
Presentaciones en el Aula

TEMA 4

Introducción a los Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden