TEMA 2: ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE SEGUNDO ORDEN

Contextualización

01-C. Describa las siguientes situaciones mediante un modelo matemático basado en una ecuación diferencial. Indique cuál es la variable independiente y cuál es la variable dependiente:

a) El movimiento de un péndulo de masa m sujeto por una varilla rígida de longitud l, con y sin rozamiento.

b) La temperatura de un disipador para microprocesador, compuesto de una serie de barras paralelas sujetas por un extremo al micro, como se muestra en la figura.[1]

02-C. Determine la ecuación diferencial de la familia de todas las rectas del plano $y = Ax + B$

Observación Reflexiva

01-R. ¿Se podrá encontrar una solución para una Ecuación Diferencial Ordinaria de Segundo Orden?

02-R. ¿Cómo se representará gráficamente la solución general de una Ecuación Diferencial Ordinaria de Segundo Orden? ¿En el plano? ¿En el espacio?

03-R. ¿Alguna vez antes de esta cursada empleó en alguna materia una Ecuación Diferencial Ordinaria de Segundo Orden? Si la respuesta es "si", ¿En qué materia? ¿Qué ecuación?

Conceptualización

01-T. La expresión *"La resolución de las ecuaciones diferenciales de segundo orden homogéneas se apoya en dos resultados básicos: la combinación lineal de dos soluciones es otra solución y toda solución es combinación lineal de dos soluciones linealmente independientes"* ¿tiene sentido para vos? ¿Cuál?

02-T. Encuentre una función que satisfaga la ecuación diferencial de segundo orden dada, que pase por determinado punto del plano XY, y que en ese punto tenga una pendiente dada significa resolver la ecuación y establecer una solución particular. ¿Hay otra forma de hacerlo?

03-T. ¿Cómo explicaría el Teorema 7: Existencia y unicidad de la solución de una EDO lineal homogénea de orden n?

Experimentación Activa

01-E. Verifique que la curva $y = \cos 2x$ es solución de la ecuación diferencial de segundo orden: $y'' + 4y = 0$. Encuentre la ecuación de la solución general.

[1] Fuente: Ecuaciones en Derivadas Parciales y Análisis Numérico http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/pangulo/edpan/solucion.entrega1.pdf

02-E. Obtenga la solución general de las siguientes EDO lineales de segundo orden homogé neas

a) $y'' - y' - 6y = 0$
b) $y'' - 16y' + 64y = 0$
c) $y'' - 4y' + 5y = 0$
d) $4y'' + y' - 3y = 0$

03-E. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales empleando el método de variación de parámetros

a) $y'' - 2y' + 2y = e^{x}\sec x$
b) $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x}$
c) $y'' + 6y' + 9y = \frac{e^{-3x}}{\sqrt{x^2+1}}$
d) $y'' + 10y' + 25y = e^{-5x} ln x$

04-E. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales empleando el método de los coeficientes indeterminados

a) $2y'' - 2y' - 4y = 3x$
b) $y'' + y' = 2x + 3$
c) $y'' + 2y' + 17y = \cos x$
d) $y'' - 3y' + 2y = 2e^{2x}(x + 9)$
e) $y'' - 2y' + 2y = e^{x} sen\, x$

05-E. Obtenga la solución general y la solución particular si:

a) $y'' + 2y' = xe^{x}$	Con $y(0) = 2$	$y'(0) = 2$
b) $y'' - 6y' + 9y = 25\, e^{x}\,\mathrm{sen}\, x$	Con $y(0) = 0$	$y'(0) = 0$
c) $y'' - y' = x + e^{x}$	Con $y(0) = 1$	$y'(0) = -1$

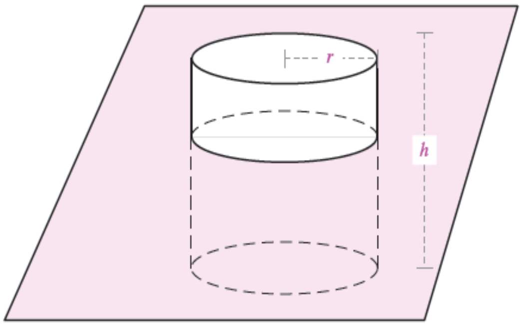
01-P. Un peso de 24 lb, sujeto al extremo de un resorte, lo estira 4 pulgadas. Escriba la ecuación del movimiento si el peso en reposo se suelta desde el punto que está 3 pulgadas por encima de la posición de equilibrio.

02-P. Un resorte cuelga verticalmente de un techo. El resorte se elonga un centímetro cuando se coloca una masa de 1,5 kg y después el sistema queda en equilibrio. Posteriormente se elonga el resorte una cantidad adicional de 1,5 cm y se suelta a partir del reposo. Determine la constante del resorte, la posición y la velocidad de la masa en el tiempo t ≥ 0. ¿Cuál es la frecuencia de oscilaciones de la masa y la amplitud del movimiento?

03-P. Una boya cilíndrica de radio r, altura h y densidad ρ_b, se encuentra flotando en la superficie de un lago, como se muestra en la figura. Inicialmente la boya se encuentra en equilibrio; de repente se sumerge una distancia x_0 y se suelta con velocidad igual a cero. Determine la ecuación diferencial que modela el sistema y su solución.

Si la boya tiene dimensiones $h = 1\,m$, $r = 0{,}5\,m$, y su densidad es $\rho_b = 500\,kg\,/\,m^3$, determine la posición y la velocidad de la boya en todo tiempo, si se sumerge una profundidad de $x_0 = 0{,}01\,m$, a partir de la posición en equilibrio.

Recuerde que $g = 9{,}8\,m\,/\,s^2$ y que $\rho_{agua} = 1000\,kg\,/\,m^3$


r
h