TEMA 2: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Segundo Orden

Contextualización

01-C. Describa las siguientes situaciones mediante un modelo matemático basado en una ecuación diferencial. Indicar cuál es la variable independiente y cuál es la variable dependiente:

a) El movimiento de un péndulo de masa m sujeto por una varilla rígida de longitud l, con y sin rozamiento.

b) La temperatura de un disipador para microprocesador, compuesto de una serie de barras paralelas sujetas por un extremo al micro, como se muestra en la figura.

02-C. Determine la ecuación diferencial de la familia de todas las rectas del plano .

Observación Reflexiva

01-R. ¿Es posible encontrar una solución para una Ecuación Diferencial Ordinaria de Segundo Orden?

02-R. ¿Cómo se representará gráficamente la solución general de una Ecuación Diferencial Ordinaria de Segundo Orden? ¿En el plano? ¿En el espacio?

03-R. ¿Alguna vez antes de esta cursada viste en alguna materia una Ecuación Diferencial Ordinaria de Segundo Orden? Si la respuesta es “si”, ¿En qué materia? ¿Qué ecuación?

Conceptualización

01-T. La expresión “La resolución de las ecuaciones diferenciales de segundo orden homogéneas se apoya en dos resultados básicos: la combinación lineal de dos soluciones es otra solución y toda solución es combinación lineal de dos soluciones linealmente independientes” ¿tiene sentido? ¿Cuál?

02-T. Encuentre una función que satisfaga la ecuación diferencial de segundo orden, que pase por determinado punto del plano XY y que en ese punto tenga una pendiente dada significa resolver la ecuación y establecer una solución particular. ¿Hay otra forma de hacerlo?

03-T. ¿Cómo explicaría el Teorema 7: Existencia y unicidad de la solución de una EDO lineal homogénea de orden n?

[1] Fuente: Ecuaciones en Derivadas Parciales y Análisis Numérico
http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/pangulo/edpan/solucion.entrega1.pdf

Experimentación Activa

01-E Reduzca el orden de las siguientes ecuaciones diferenciales y resuélvalas.

a) $y'' + 2y' = 6x$
b) $xy'' - 7y' = -16$
c) $y''y = (y')^3$

02-E Calcule la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales; luego calcule la solución particular con las condiciones iniciales dadas.

a) $y'' - 20\,y = 0$ $\quad y(0) = 2$ e $y'(0) = \sqrt{20}$
b) $y'' - 9y' + 14y = 0$
c) $4y'' - 4y' + y = 0$ $\quad y(0) = 9$ e $y'(0) = 1/2$
d) $\frac{1}{5}y'' + 2y' + 5y = 0$
e) $y'' - 4y' + 40y = 0$ $\quad y(0) = 3$ e $y'(0) = 30$
f) $y'' + 9y = 0$

03-E Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales por el método de los Coeficientes Indeterminados

a) $y'' - 2y' - 3y = 6x + 7$
b) $y'' - 7y' - 18y = 9x^2 - 2x - 9$
c) $y'' - 5y' = 15x + 7$
d) $y'' + 8y' + 16y = 6e^{-4x}$
e) $y'' - 100y = (7x + 5)e^{11x}$
f) $y'' + 12y' + 11y = e^{3x}cos2x$
g) $y'' - 6y - 27y = e^{-3x}$

04-E Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales por el método de Variación de parámetros

a) $y'' + 25y = sec^2 5x$
b) $y'' - 4y' - 5y = e^{6x}\, sen2x$
c) $9y'' - 12y' + 4y = \frac{lnx}{x^2}\, e^{2/3x}$
d) $y'' - 14y' + 49y = \frac{e^{7x}}{\sqrt{x^2 - 7x}}$

05-E Resuelva las siguientes ecuaciones homogéneas de orden superior.

a) $y^{IV} - 25\, y´´ + 144 = 0$

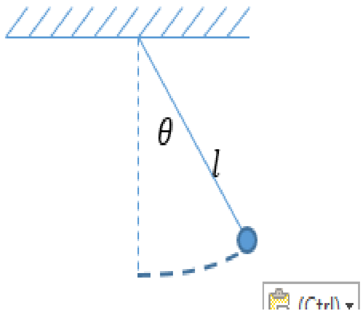
b) $y^{V} - 6\, y^{IV} + 12\, y´´´ - 8\, y´´ = 0$

c) $4y^{V} - 4\, y^{IV} + 101y´´´ - 100\, y´´ + 25y´ = 0$

01-P Un resorte con masa de 2 kg tiene una longitud natural de 0,5 m.
Se requiere una fuerza de 25,6 N para mantenerlo estirado hasta una longitud de 0,7 m.
Si el resorte estirado a una longitud de 0,7 m se suelta con una velocidad inicial igual a cero, encuentre la posición final de la masa en función del tiempo t.

02-P En la figura se muestra un péndulo de longitud l con el ángulo desde la vertical al péndulo, Se puede demostrar que, θ como una función del tiempo satisface la ecuación diferencial no lineal:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} sen\, \theta = 0$$



Donde g es la aceleración de la gravedad.
Para valores pequeños de θ se puede usar la aproximación lineal $sen\, \theta = \theta$, y luego la ecuación diferencial se vuelve lineal.

a) Encuentre la ecuación del movimiento de un péndulo de longitud l=2,45 m, si $sen\, \theta$, es inicialmente 0,2 rad y la velocidad angular inicial es $\frac{d\theta}{dt} = 1\frac{rad}{s}$

b) ¿Cuál es el ángulo máximo desde la vertical?

c) ¿Cuál es el periodo del péndulo (es decir, el tiempo requerido para completar una oscilación)

d) ¿Cuándo el péndulo estará en posición vertical?

e) ¿Cuál es la velocidad angular cuando el péndulo está en la posición vertical?

----ooo0ooo----