Tema 2. Ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden

1. Introducción

En este tema se estudian las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden, un tipo de EDO que modela una amplia gama de procesos. De aquí el interés en analizar algunas de sus formas específicas.

En primer lugar se desarrolla una serie de Teoremas que establecen propiedades de las soluciones de las EDO lineales de segundo orden. Luego se presentan métodos y procedimientos para hallar las de aquellas cuyos coeficientes son constantes.

Una solución de una ecuación diferencial de segundo orden en un intervalo abierto $a < x < b$ es una función $y = y(x)$ que tiene derivadas $y' = y'(x)$ e $y'' = y''(x)$ que satisfacen la ecuación diferencial para todo x perteneciente al intervalo mencionado.

Resolver una ecuación diferencial de segundo orden es determinar su *solución general*, que necesariamente incluirá dos constantes arbitrarias, tal como se muestra en la Tabla 3 del Tema 1, página 19.

Encontrar una función que satisfaga la ecuación diferencial de segundo orden dada, que pase por determinado punto del plano xy y que en ese punto tenga una pendiente dada, es decir que también cumpla *condiciones iniciales* significa resolver la ecuación y establecer qué función de la familia doblemente infinita de curvas de la solución general es la que satisface las condiciones dadas, es decir, obtener una *solución particular*.

La *solución particular* de una EDO de segundo orden también queda definida cuando se fijan *condiciones de frontera*, es decir los valores que debe tomar la función buscada para dos puntos especificados de la variable independiente dentro del intervalo en que se analiza el problema.

2. Marco teórico para proponer soluciones de las EDO de segundo orden

Se retoma la cuestión que se analizó para el caso de las EDO de primer orden: un problema de EDO de segundo orden puede presentar tres casos: (a) no tiene solución; (b) tiene precisamente una solución o (c) tiene más de una solución.

Se analizará ahora cuál es el comportamiento de las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, lineales, tanto homogéneas como no homogéneas.

2.1. Las soluciones de las EDO de segundo orden lineales homogéneas

Teorema 1: *Existencia y unicidad*

Sea el problema de valores iniciales

$$\left.\begin{aligned} y'' + p_1(x)\,y' + p_0(x)\,y = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = A_1 \end{aligned}\right\} \qquad [1]$$

si $p_1(x)$ y $p_0(x)$ son funciones continuas en algún intervalo abierto I y $x_0 \in I$, entonces el problema de valores iniciales [1] tiene una solución única $y(x)$ en el intervalo I.

Sea el problema con condiciones de frontera

$$\left.\begin{aligned} y'' + p_1(x)\,y' + p_0(x)\,y = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y(x_1) = y_1 \end{aligned}\right\} \qquad [2]$$

si $p_1(x)$ y $p_0(x)$ son funciones continuas en algún intervalo abierto I y $x_0 ; x_1 \in I$, entonces el problema de valores de frontera [2] tiene una solución única $y(x)$ en el intervalo I.

***Teorema 2:** Principio de linealidad o superposición de las soluciones*

Sea la ecuación diferencial

$$y'' + p_1(x)\,y' + p_0(x)\,y = 0 \qquad [3]$$

Entonces, si $p_1(x)$ y $p_0(x)$ son funciones continuas en algún intervalo abierto I cualquier combinación lineal de dos de sus soluciones en un intervalo abierto I, es también solución de la ecuación dada en I. En especial, para tales ecuaciones, la suma y multiplicación por constantes de las soluciones son a su vez solución de [3].

Para demostrarlo se supone que y_1 e y_2 son soluciones de [3] en un intervalo I. Entonces sustituyendo

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \qquad [4]$$

y sus derivadas en [3] y utilizando las reglas de derivación, se obtiene [5] en la que se verifica que [4] satisface [3]. Esto es, $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ es solución de [3].

$$\begin{aligned} y'' + p_1(x)\,y' + p_0(x)\,y &= \left(C_1 y_1 + C_2 y_2\right)'' + p_1(x)\cdot\left(C_1 y_1 + C_2 y_2\right)' + p_0(x)\cdot\left(C_1 y_1 + C_2 y_2\right) \\ &= C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + p_1(x)\cdot\left(C_1 y_1' + C_2 y_2'\right) + p_0(x)\cdot\left(C_1 y_1 + C_2 y_2\right) \qquad [5] \\ &= C_1\cdot\underbrace{\left(y_1'' + p_1(x)\,y_1' + p_0(x)\,y_1\right)}_{=0} + C_2\cdot\underbrace{\left(y_2'' + p_1(x)\,y_2' + p_0(x)\,y_2\right)}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

***Teorema 3:** Existencia de la solución general*

Si $p_1(x)$ y $p_0(x)$ son funciones continuas en algún intervalo abierto I, la ecuación diferencial [3] tiene una solución general en un intervalo I al que pertenece x. Esta solución general es de la forma

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \qquad [6]$$

donde $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son funciones de x *linealmente independientes,* es decir *no proporcionales* y forman una *base de soluciones* de [3] en I. C_1, C_2 son constantes arbitrarias cuyos valores quedan fijados al establecer condiciones iniciales o de frontera.

Las ecuaciones diferenciales del tipo [3] no tienen soluciones singulares, es decir, soluciones que no se obtienen a partir de la solución general.

2.2. Independencia lineal de funciones

Un conjunto finito de funciones $\{y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)\}$ es linealmente independiente sobre un intervalo abierto I si para que se verifique la ecuación

$$a_1\cdot y_1(x) + a_2\cdot y_2(x) + \cdots + a_n\cdot y_n(x) = 0 \qquad [7]$$

resulta necesario que todos los coeficientes a_i sean cero.

Si en cambio la ecuación [7] se verifica para un conjunto de coeficientes a_i no todos nulos, se dice que tal conjunto de funciones no es linealmente independiente.

Para el caso especial donde el análisis se hace sobre dos funciones, la prueba de independencia lineal se puede plantear de una manera sencilla.

Dadas dos funciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$, éstas son linealmente dependientes en un intervalo I donde están definidas si $k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) = 0$ para valores de las constantes k_1, k_2 no simultáneamente nulos.

Entonces, si $k_1 \neq 0$ ó $k_2 \neq 0$ se puede proponer alguno de estos cocientes $y_1 = \left(-k_2/k_1\right)\cdot y_2$ ó $y_2 = \left(-k_1/k_2\right) y_1$ y analizar su comportamiento.

Si éste resulta una constante, son proporcionales (linealmente dependientes).

$$y_1/y_2 = \left(-k_2/k_1\right) = K_1 \quad \Leftrightarrow \quad y_1, y_2 \text{ son linealmente dependientes}$$

$y_2/y_1 = (-k_1/k_2) = K_2 \quad \Leftrightarrow \quad y_1, y_2$ son linealmente dependientes

Si por el contrario resulta en una función de x, las funciones son no proporcionales (linealmente independientes)

$y_1/y_2 = u_1(x) \Leftrightarrow y_1, y_2$ son linealmente independientes

$y_2/y_1 = u_2(x) \quad \Leftrightarrow \quad y_1, y_2$ son linealmente independientes

<u>*Determinante Wronskiano*</u>

Para el análisis de la independencia lineal de funciones (así como para muchas otras aplicaciones matemáticas) es útil introducir un determinante particular, llamado Wronskiano, formulado por J. M. Höne Wronski.

Dado un conjunto finito de funciones, $\{y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)\}$ y asumiendo que estas funciones son continuas y derivables $n-1$ veces sobre un intervalo abierto I, se puede generar el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} a_1 \cdot y_1(x) + a_2 \cdot y_2(x) + \cdots + a_n \cdot y_n(x) = 0 \\ a_1 \cdot y_1'(x) + a_2 \cdot y_2'(x) + \cdots + a_n \cdot y_n'(x) = 0 \\ \cdots = 0 \\ a_1 \cdot y_1^{(n-1)}(x) + a_2 \cdot y_2^{(n-1)} + \cdots + a_n \cdot y_n^{(n-1)}(x) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad [8]$$

por sucesivas derivaciones.

El determinante de los coeficientes a_i resulta ser

$$W[y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \qquad [9]$$

<u>*Relación entre el determinante Wronskiano con la independencia lineal de funciones*</u>

El conjunto de finito de funciones $\{y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)\}$ continuas y derivables $n-1$ veces sobre un intervalo abierto I será linealmente independiente sí y sólo sí su determinante wronskiano no es idénticamente cero en I.

Esta afirmación se debe a que en el sistema [8], la primera de las ecuaciones representa a [7], que es la base del análisis de la proporcionalidad de las funciones consideradas; las restantes ecuaciones del sistema surgen derivando la primera, y por último, de la teoría de las ecuaciones algebraicas resulta que si existe un valor de x en I, por ejemplo $x = x_0$ tal que $W[y_1(x), \cdots, y_n(x)] \neq 0$, entonces en [8] todos los coeficientes $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ deben ser necesaria y simultáneamente cero, lo que implica la independencia lineal de las funciones.

2.3. Las soluciones de las EDO de segundo orden lineales no homogéneas

<u>***Teorema 4:** Relaciones entre las EDO de segundo orden lineales homogéneas y no homogéneas*</u>

Considérense las ecuaciones diferenciales como asociadas por sus coeficientes

$$y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = r(x) \qquad [10]$$

$$u'' + p_1(x)u' + p_0(x)u = 0 \qquad [11]$$

donde $r(x)$ no es idénticamente nula y $p_1(x)$ y $p_0(x)$ son funciones continuas en algún intervalo abierto I. Entonces:

a) *La diferencia entre dos soluciones de [10] en algún intervalo abierto I es una solución de [11] en I*. Para probarlo, sean y_1 e y_2 soluciones de [10], es decir

$$\left.\begin{aligned} y_1''+p_1(x)y_1'+p_0(x)y_1=r(x)\\ y_2''+p_1(x)y_2'+p_0(x)y_2=r(x)\end{aligned}\right\} \qquad [12]$$

entonces se debe demostrar que la función que resulta de la diferencia entre ambas, o sea $y=y_1-y_2$ satisface [11]. Derivando y, se tiene

$$y'=y_1'-y_2' \wedge y''=y_1''-y_2'' \qquad [13]$$

para luego remplazar en [11], resultando

$$\begin{aligned} y''+p_1(x)y'+p_0(x)y &= (y_1''-y_2'')+p_1(x)\cdot(y_1'-y_2')+p_0(x)\cdot(y_1-y_2)\\ &= \underbrace{(y_1''+p_1(x)\cdot y_1'+p_0(x)\cdot y_1)}_{=r(x)}-\underbrace{(y_2''+p_1(x)\cdot y_2'+p_0(x)\cdot y_2)}_{=r(x)}\\ &=0\end{aligned}$$

que es lo que se quería probar.

b) La suma de una solución de [10] y una solución de [11] sobre algún intervalo abierto I es una solución de [10] en I. Para probarlo, sean y y u soluciones de [10] y [11] respectivamente, es decir

$$\left.\begin{aligned} y''+p_1(x)y'+p_0(x)y=r(x)\\ u''+p_1(x)u'+p_0(x)u=0\end{aligned}\right\} \qquad [14]$$

entonces se debe demostrar que la función que resulta de la suma de ambas, o sea $\omega=y+u$ satisface [10]. Derivando ω, se tiene

$$\omega=y'+u' \wedge y''=y''+u'' \qquad [15]$$

para luego remplazar en [10], resultando

$$\begin{aligned} \omega''+p_1(x)\omega'+p_0(x)\omega &= (y''+u'')+p_1(x)\cdot(y'+u')+p_0(x)\cdot(y+u)\\ &= \underbrace{(y''+p_1(x)\cdot y'+p_0(x)\cdot y)}_{=r(x)}+\underbrace{(u''p_1(x)\cdot u'+p_0(x)\cdot u)}_{=0}\\ &=r(x)\end{aligned}$$

que es lo que se quería probar.

Teorema 5: *Solución general de una EDO no homogénea de segundo orden*

Una solución general de la ecuación no homogénea [10] sobre un intervalo abierto I tiene la forma

$$y(x)=u(x)+z(x) \qquad [16]$$

donde

$$u(x)=C_1u_1+C_2u_2 \qquad [17]$$

es la solución general de la ecuación [11], es decir la homogénea asociada a [10] sobre el intervalo abierto I, mientras que $z(x)$ es una solución cualquiera, *sin constantes arbitrarias*, de [10]. El Teorema 4 parte b) prueba el anterior enunciado.

Teorema 6: *Existencia de z(x)*

Sea la ecuación diferencial

$$y''+p_1(x)y'+p_0(x)y=r(x) \qquad [18]$$

donde $r(x)$ es continua en algún intervalo abierto I y no es idénticamente nula en dicho intervalo y $p_1(x)$ y $p_0(x)$ son funciones continuas en algún intervalo abierto I. Entonces:

$$z(x) = -u_1(x)\int \frac{u_2(x)\cdot r(x)}{W(x)}dx + u_2(x)\int \frac{u_1(x)\cdot r(x)}{W(x)}dx \qquad [19]$$

es una solución sin constantes de [18], en la que las funciones $\{u_1, u_2\}$ forman una base de la solución general de la ecuación diferencial homogénea asociada a [18] y W es el determinante wronskiano de dichas funciones.

Para demostrar que siempre existe $z(x)$ basta recordar en primer lugar que se cumplen las condiciones del Teorema 1, por lo que existe la solución general de la ecuación diferencial homogénea asociada y por lo tanto la base $\{u_1, u_2\}$. Además, el determinante wronskiano de esta base es no nulo para todo $x_0 \in I$. Las integrales existen ya que también $r(x)$ es continua en I por hipótesis.

Para demostrar cómo se alcanza la fórmula [19] se procede de la siguiente manera: la ecuación homogénea asociada tiene una solución general $u(x) = C_1u_1(x) + C_2u_2(x)$ en el intervalo I. Se remplazan las constantes C_1, C_2 por funciones a determinar, $v(x)$, $w(x)$, de modo tal que la función resultante

$$z(x) = v(x)u_1(x) + w(x)u_2(x) \qquad [20]$$

sea una solución sin constantes de [18] en I.

Para determinar estas funciones se deriva [20], resultando

$$z'(x) = v'(x)u_1(x) + v(x)u_1'(x) + w'(x)u_2(x) + w(x)u_2'(x) \qquad [21]$$

y se establece arbitrariamente una condición proponiendo

$$\boxed{v'(x)u_1(x) + w'(x)u_2(x) = 0} \qquad [22]$$

Entonces se reduce la expresión [21] a

$$z'(x) = v(x)u_1'(x) + w(x)u_2'(x) \qquad [23]$$

Derivando [23] se tiene

$$z''(x) = v'(x)u_1'(x) + v(x)u_1''(x) + w'(x)u_2'(x) + w(x)u_2''(x) \qquad [24]$$

Sustituyendo [24], [23] y [20] en [18] y agrupando los términos que contienen $v(x)$ y los términos que contienen $w(x)$, resulta

$$\begin{aligned} &v(x)\cdot\underbrace{\left[u_1''(x) + p_1(x)u_1'(x) + p_0(x)u_1(x)\right]}_{=0} + \\ &+ w(x)\cdot\underbrace{\left[u_2''(x) + p_1(x)u_2'(x) + p_0(x)u_2(x)\right]}_{=0} + v'(x)u_1'(x) + w'(x)u_2'(x) = r(x) \end{aligned} \qquad [25]$$

donde las expresiones entre corchetes se anulan porque u_1, u_2 son soluciones de la ecuación homogénea asociada a [18]. Entonces [25] se reduce a

$$\boxed{v'(x)u_1'(x) + w'(x)u_2'(x) = r(x)} \qquad [26]$$

que junto con [22] forman el siguiente sistema lineal, en el que las incógnitas son $v'(x)$ y $w'(x)$:

$$\left.\begin{aligned} v'(x)u_1(x) + w'(x)u_2(x) &= 0 \\ v'(x)u_1'(x) + w'(x)u_2'(x) &= r(x) \end{aligned}\right\} \qquad [27]$$

Resolviendo el sistema [27] resulta

$$\left.v'(x)=\frac{\begin{vmatrix}0 & u_2(x)\\ r(x) & u_2'(x)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}u_1(x) & u_2(x)\\ u_1'(x) & u_2'(x)\end{vmatrix}}=\frac{-r(x)\cdot u_2(x)}{W(x)}=-\frac{u_2(x)\cdot r(x)}{W(x)}\right\} \qquad [28]$$

$$\left.w'(x)=\frac{\begin{vmatrix}u_1(x) & 0\\ u_1'(x) & r(x)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}u_1(x) & y_2(x)\\ u_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}}=\frac{u_1(x)\cdot r(x)}{W(x)}=\frac{u_1(x)\cdot r(x)}{W(x)}\right\} \qquad [29]$$

e integrando se tiene

$$\left.\begin{aligned} v(x)&=-\int\frac{u_2(x)r(x)}{W(x)}dx\\ w(x)&=\int\frac{u_1(x)r(x)}{W(x)}dx\end{aligned}\right\} \qquad [30]$$

que en [20] produce [19], lo que se quería probar.

2.4. Recapitulando sobre los seis teoremas

El enunciado del Teorema 3 prueba que existe y expresa la forma que toma la solución general de una EDO de segundo orden lineal homogénea. Junto con los Teoremas 5 y 6, prueba que existe la solución general de una EDO de segundo orden lineal no homogénea.

Las respectivas soluciones particulares se obtienen a partir de tal solución general, asignando valores específicos a las constantes C_1 y C_2.

3. EDO lineales homogéneas y no homogéneas de orden *n*

Los Teoremas relacionados con la existencia, unicidad y propiedades de las soluciones generales de las EDO lineales homogéneas y no homogéneas de primer y segundo orden así como las definiciones dadas para sus soluciones particulares pueden ser generalizados a las ecuaciones diferenciales lineales de orden n.

Teorema 7: *Existencia y unicidad de la solución de una EDO lineal homogénea de orden n*

Sea el problema de valores iniciales

$$\left.\begin{aligned} y^{(n)}+p_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_1(x)y'+p_0(x)y=0\\ y(x_0)=y_0\\ y'(x_0)=A_1\\ \cdots=\cdots\\ y^{(n-1)}(x_0)=A_{n-1}\end{aligned}\right\} \qquad [31]$$

si $p_{n-1}(x),\cdots,p_0(x)$ son funciones continuas en algún intervalo abierto I y $x_0\in I$, entonces el problema de valores iniciales [31] tiene una solución única $y(x)$ en el intervalo I.

Sea el problema con condiciones de frontera

$$\left.\begin{aligned} y^{(n)}+p_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_1(x)y'+p_0(x)y=0\\ y(x_0)=y_0\\ y(x_1)=y_1\\ \cdots=\cdots\\ y(x_{n-1})=y_{n-1}\end{aligned}\right\} \qquad [32]$$

si $p_{n-1}(x), \cdots, p_0(x)$ son continuas en algún intervalo abierto I y $x_0; \cdots, x_{n-1} \in I$, entonces el problema de valores de frontera [32] tiene una solución única $y(x)$ en el intervalo I.

4. Análisis de la aplicación de las soluciones

En principio, la mayoría de las ecuaciones diferenciales que históricamente se han aplicado para intentar analizar los procesos de la realidad a través de modelos matemáticos presentan soluciones únicas que satisfacen ciertas condiciones especificadas.

Sin embargo, conviene estar prevenido con relación a los problemas de existencia y unicidad de tales soluciones.

El ambiente teórico de los puntos anteriores posibilita comprender los parámetros básicos a tener en cuenta en el análisis de algunos tipos de ecuaciones diferenciales, por cierto los que se presentan con mayor frecuencia, para que tenga algún sentido encarar su resolución con una expectativa razonable.

Los siguientes temas presentan métodos de resolución de un tipo en especial de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden: las lineales con coeficientes constantes, que de ahora en más se indicarán abreviadamente EDO2°OLCC y que, precisamente, tienen solución.

No obstante, en la mayoría de los casos de la aplicación práctica de las ecuaciones diferenciales para resolver problemas, el sentido común y la capacidad analógica de las situaciones serán, sin duda, las principales herramientas para llevar adelante la tarea.

5. Soluciones de las EDO2°OLCC homogéneas

Son de la forma

$$y'' + ay' + by = 0 \qquad [33]$$

en la que a, b son constantes reales.

Antes de desarrollar los procedimientos que conducen en todos los casos a hallar su solución general, se muestran dos ejemplos para comenzar a comprender las características que debe reunir tal solución.

Ejemplo 1:

Dada la ecuación diferencial $y'' - y = 0$ y sabiendo que las funciones $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$ son dos soluciones de la misma, demostrar que

$$y = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-x} \qquad [34]$$

también lo es.

Resolución:

Para verificarlo se deriva [34], resultando:

$$\begin{cases} y' = c_1 \cdot e^x - c_2 \cdot e^{-x} \\ y'' = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-x} \end{cases} \qquad [35]$$

y se reemplazan estos resultados en la en la ecuación dada, produciendo:

$$c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-x} - c_1 \cdot e^x - c_2 \cdot e^{-x} = 0 \quad , \quad \forall x \qquad [36]$$

que es lo que se quería demostrar.

Ejemplo 2:

Determinar la curva que pertenezca a la familia dada por la expresión [34], que pasa por el punto $(0, 5)$ y cuya derivada en dicho punto vale 3.

Resolución:

La familia de curvas dada y su derivada forman el sistema

$$\left.\begin{array}{l} y = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-x} \\ y' = c_1 \cdot e^x - c_2 \cdot e^{-x} \end{array}\right\} \qquad [37]$$

Incorporando en el mismo las condiciones impuestas, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} y(0) = c_1 \cdot e^0 + c_2 \cdot e^0 = c_1 + c_2 = 5 \\ y'(0) = c_1 \cdot e^0 - c_2 \cdot e^0 = c_1 - c_2 = 3 \end{array}\right\} \qquad [38]$$

y resolviendo resulta

$$\left.\begin{array}{l} c_1 = 4 \\ c_2 = 1 \end{array}\right\}$$

Remplazando en [34] se obtiene la curva buscada, que resulta:

$$y = 4e^x + e^{-x} \qquad [39]$$

5.1. Procedimientos para hallar soluciones de las EDO2°OLCC homogéneas

Una manera de llegar a un procedimiento que logre resolverlas, es partir de considerar la solución de una ecuación lineal homogénea de primer orden con un coeficiente constante $y' + k\,y = 0$ es, según se vio oportunamente, una función exponencial de la forma $y = e^{-kx}$.

Esto sugiere la idea de probar, como solución para [33] la función

$$y = e^{\lambda x} \qquad [40]$$

en la que λ es un número real.

Partiendo de [40] y considerando que deberíamos encontrar ese número λ tal que [40] satisfaga [33], se determinan sus derivadas, que son:

Sustituyendo [40] y [41] en [33], se tiene que

$$\left(\lambda^2 + a\lambda + b\right) \cdot e^{\lambda x} = 0 \qquad [42]$$

Como para todo valor de x es $e^{\lambda x} \neq 0$, para que se cumpla [42] necesariamente debe ser $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$

y, entonces, $y = e^{\lambda x}$ es solución de [33] sí y sólo sí λ es solución de la ecuación cuadrática

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \qquad [43]$$

Ésta se denomina *ecuación característica o ecuación auxiliar* de [33]. Sus raíces, o sea los valores de λ que la satisfacen son, si existen,

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = \dfrac{1}{2}\left(-a + \sqrt{a^2 - 4b}\right) \\ \lambda_2 = \dfrac{1}{2}\left(-a - \sqrt{a^2 - 4b}\right) \end{array}\right\} \qquad [44]$$

y las funciones

$$\left\{\begin{array}{l} y_1 = e^{\lambda_1 x} \\ y_2 = e^{\lambda_2 x} \end{array}\right. \qquad [45]$$

son dos soluciones de la EDO2°OLCC homogénea dada.

Del análisis de [44] se observa que se presentarán tres casos posibles cuando se buscan las soluciones de [43], según sea el signo del discriminante $a^2 - 4b$. Las características de λ_1, λ_2 dependerán de cuál caso de esos tres se presente.

<u>Caso 1</u>, dos raíces reales y distintas si $a^2 - 4b > 0$.

En este caso $\lambda_1 \neq \lambda_2$ y en consecuencia se puede proponer

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = e^{\lambda_1 x} \\ y_2 = e^{\lambda_2 x} \end{array}\right\} \qquad [46]$$

como una base de soluciones de [33] para cualquier intervalo, ya que y_1/y_2 no es una constante, lo que permite afirmar que y_1, y_2 son linealmente independientes.

En consecuencia, en este caso la solución general de [33], que es única, se expresa de la siguiente manera:

$$\boxed{y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}} \qquad [47]$$

<u>Caso 2</u>*, una raíz real doble si* $a^2 - 4b = 0$.

En este caso, $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = -a/2$, obteniéndose en principio dos soluciones idénticas

$$y_1 = y_2 = u = e^{-\left(a/2\right)x} \qquad [48]$$

que en realidad es una sola solución.

En la búsqueda de una segunda solución linealmente independiente de u, necesaria para formar la base de soluciones que resuelva [33], se propone

$$v = z \cdot u \qquad [49]$$

y se trata de determinar una función z tal que v sea solución de [33] y linealmente independiente de u.

Para esto, se sustituye la función propuesta [48] y sus derivadas

$$\left.\begin{array}{l} v' = z'u + z\,u' \\ v'' = z''u + 2\,z'\,u' + z\,u'' \end{array}\right\} \qquad [50]$$

en [33], resultando

$$\left(z''u + 2\,z'\,u' + z\,u''\right) + a \cdot \left(z'\,u + z\,u'\right) + b\,z\,u = 0 \qquad [51]$$

Agrupando los términos de [51] se tiene

$$z''u + z'\left(2\,u' + a\,u\right) + z\left(u'' + a\,u' + b\,u\right) = 0 \qquad [52]$$

La expresión dentro del último paréntesis es 0 ya que u es solución de [33]. También la expresión en el primer paréntesis es 0 ya que a partir de [48] se tiene que

$$\left.\begin{array}{l} 2\,u' = -\,a\,e^{-\left(a/2\right)x} \\ a\,u = a\,e^{-\left(a/2\right)x} \end{array}\right\} \qquad [53]$$

Entonces [52] se reduce a

$$z'' \cdot u = 0 \qquad [54]$$

y, como $u \neq 0 \ \forall\ x$, debe ser

$$z'' = 0 \qquad [55]$$

Se determina la función z a partir de [55] integrando dos veces y se obtiene su solución general, que se expresa

$$z(x) = A \cdot x + B \qquad [56]$$

en las que $A \wedge B$ son constantes arbitrarias.

Como todas las soluciones particulares de [56] satisfacen [55], se adopta la más sencilla entre las que garanticen la independencia lineal entre u y v, que surge de asignar a las constantes los valores $A = 1$, $B = 0$, que genera la solución $z = x$.

Finalmente, como $v = z \cdot u$ resulta $v = x \cdot u$ y, en consecuencia, se confirma que v, u no son proporcionales. Entoncecs

$$\left.\begin{array}{l} u = e^{-ax/2} \\ v = x \cdot e^{-ax/2} \end{array}\right\} \qquad [57]$$

constituyen una base de soluciones de [33] para cualquier intervalo.

La solución general de [33] es entonces

$$\boxed{y=(c_1+c_2x)\cdot e^{-ax/2}} \qquad [58]$$

<u>Caso 3</u>, *raíces complejas conjugadas si* $a^2-4b<0$.

En este caso, la ecuación característica presenta dos raíces

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1&=-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\sqrt{a^2-4b}\\ \lambda_1&=-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}\sqrt{a^2-4b}\end{aligned}\right\} \qquad [59]$$

Extrayendo $\sqrt{-1}=i$ de la raíz, introduciendo $1/2=\sqrt{1/4}$ bajo la raíz y haciendo $\omega=\sqrt{b-(1/4)a^2}$, las raíces pueden ser escritas

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1&=-\frac{1}{2}a+i\cdot\omega\\ \lambda_2&=-\frac{1}{2}a-i\cdot\omega\end{aligned}\right\} \qquad [60]$$

y las funciones

$$\begin{cases}y_1=e^{\left(-\frac{1}{2}a+i\cdot\omega\right)_1 x}\\ y_2=e^{\left(-\frac{1}{2}a-i\cdot\omega\right)x}\end{cases} \qquad [61]$$

son soluciones complejas, linealmente independientes, de [33].

Para evitar el manejo de números complejos, se demuestra que también es posible mediante una sustitución conveniente, llevar estas expresiones al campo real.

Se utilizarán las fórmulas de Euler, aplicadas a

$$\left.\begin{aligned}y_1&=e^{\left(-\frac{1}{2}a+i\cdot\omega\right)x}=e^{\left(-\frac{1}{2}a\right)x}\cdot e^{i\omega x}\\ y_2&=e^{\left(-\frac{1}{2}a-i\cdot\omega\right)x}=e^{\left(-\frac{1}{2}a\right)x}\cdot e^{-i\omega x}\end{aligned}\right\} \qquad [62]$$

Se parte de los desarrollos en serie, convergentes $\forall t$, de

$$e^{\omega x}=1+\frac{\omega x}{1!}+\frac{\omega^2x^2}{2!}+\frac{\omega^3x^3}{3!}+\cdots+\frac{\omega^nx^n}{n!}+\cdots \qquad [63]$$

$$\operatorname{sen}\omega x=\omega x-\frac{\omega^3x^3}{3!}+\frac{\omega^5x^5}{5!}-\cdots+\frac{(-1)^k\omega^{2k+1}x^{2k+1}}{(2k+1)!}+\cdots \qquad [64]$$

$$\cos\omega x=1-\frac{\omega^2x^2}{2!}+\frac{\omega^4x^4}{4!}-\cdots+\frac{(-1)^k\omega^{2k}x^{2k}}{(2k)!}+\cdots \qquad [65]$$

aplicando [63] a $e^{i\omega x}$ y a $e^{-i\omega x}$ se tiene

$$e^{i\omega x}=1+\frac{i\omega x}{1!}-\frac{\omega^2x^2}{2!}-\frac{i\omega^3x^3}{3!}+\frac{\omega^4x^4}{4!}+\frac{i\omega^5x^5}{5!}-\cdots+\frac{(-1)^k\omega^{2k}x^{2k}}{2k!}+\frac{(-1)^k i\omega^{2k+1}x^{2k+1}}{(2k+1)!}\cdots \qquad [66]$$

$$e^{-i\omega x}=1-\frac{i\omega x}{1!}-\frac{\omega^2x^2}{2!}+\frac{i\omega^3x^3}{3!}+\frac{\omega^4x^4}{4!}-\frac{i\omega^5x^5}{5!}-\cdots-\frac{(-1)^{2k}i\omega^{2k}x^{2k}}{2k!}-\frac{(-1)^{2k+1}i\omega^{2k+1}x^{2k+1}}{(2k+1)!}\cdots \qquad [67]$$

y combinando [66] y [67] con [64] y [65] se tiene:

$$e^{i\omega x}=\cos\omega x+i\operatorname{sen}\omega x \qquad [68]$$

$$e^{-i\omega x} = \cos\omega x - i\,\mathrm{sen}\,\omega x \qquad [69]$$

Remplazando [68] y [69] en [62] se tiene

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= e^{-ax/2}\cdot\left(\cos\omega x + i\,\mathrm{sen}\,\omega x\right) \\ y_2 &= e^{-ax/2}\cdot\left(\cos\omega x - i\,\mathrm{sen}\,\omega x\right) \end{aligned}\right\} \qquad [70]$$

Para obtener la solución general se opera de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} y &= c_1\cdot y_1 + c_2\cdot y_2 = \\ &= c_1\cdot e^{-ax/2}\cdot\left(\cos\omega x + i\,\mathrm{sen}\,\omega x\right) + c_2\cdot e^{-ax/2}\cdot\left(\cos\omega x - i\,\mathrm{sen}\,\omega x\right) \\ &= e^{-ax/2}\cdot\left[\left(c_1 + c_2\right)\cdot\cos\omega x + i\cdot\left(c_1 - c_2\right)\cdot\mathrm{sen}\,\omega x\right] \end{aligned}$$

y haciendo

$$\left.\begin{aligned} c_1 + c_2 &= A \\ i\cdot\left(c_1 - c_2\right) &= B \end{aligned}\right\} \qquad [71]$$

se obtiene la solución general

$$\boxed{y = e^{-ax/2}\cdot\left(A\cdot\cos\omega x + B\cdot\mathrm{sen}\,\omega x\right)} \qquad [72]$$

Completando la discusión de los tres casos, se puede resumir las posibles soluciones en la siguiente tabla:

Tabla 1

Ecuaciones diferenciales lineales de 2do orden homogéneas. Solución general			
Ecuación diferencial $y'' + ay' + by = 0$			
Ecuación característica (e.c.) $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$			$\omega = +\sqrt{b - (1/4)a^2}$
Caso	***Raíces ecuación característica***	***Bases***	***Solución General***
1	**Reales distintas** $\lambda_1 = \frac{1}{2}\cdot\left(-a + \sqrt{a^2 - 4b}\right)$ $\lambda_2 = \frac{1}{2}\cdot\left(-a - \sqrt{a^2 - 4b}\right)$	$e^{\lambda_1 x}$ $e^{\lambda_2 x}$	$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$
2	**Real doble** $\lambda = -\frac{1}{2}\cdot a$	$e^{-ax/2}$ $x\cdot e^{-ax/2}$	$y = \left(c_1 + c_2 x\right)\cdot e^{-ax/2}$
3	**Complejas conjugadas** $\lambda_1 = -\frac{1}{2}\cdot a + i\omega$ $\lambda_2 = -\frac{1}{2}\cdot a - i\omega$	$e^{-ax/2}\cdot\cos\omega x$ $e^{-ax/2}\cdot\mathrm{sen}\,\omega x$	$y = e^{-ax/2}\cdot\left(A\cdot\cos\omega x + B\cdot\mathrm{sen}\,\omega x\right)$

Ejemplo 3:

Resolver el problema con valores iniciales

$$\left.\begin{aligned} & y'' + y' - 2y = 0 \\ & y(0) = 4 \\ & y'(0) = -5 \end{aligned}\right\} \qquad [73]$$

Resolución:

Primer paso: determinar la Solución General de [73]

La ecuación característica es $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ y sus soluciones son

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2}\cdot\left(-1+\sqrt{9}\right)=1 \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2}\cdot\left(-1-\sqrt{9}\right)=-2 \end{aligned}\right\} \qquad [74]$$

por lo tanto, la solución general que resulta de aplicar la Tabla 1 es:

$$y = c_1 \cdot e^{x} + c_2 \cdot e^{-2x} \qquad [75]$$

Segundo paso: determinar la solución particular que, a partir de [75], cumpla con las condiciones iniciales dadas por [73]

Se calcula y':

$$y' = c_1 \cdot e^{x} - 2c_2 \cdot e^{-2x} \qquad [76]$$

De la solución general [75], del valor que toma y' [43] y de las condiciones iniciales [73], se plantea el sistema de ecuaciones para determinar c_1, c_2:

$$\left.\begin{aligned} y(0) &= c_1 + c_2 = 4 \\ y'(0) &= c_1 - 2c_2 = -5 \end{aligned}\right\} \qquad [77]$$

Resolviendo [77] da $c_1 = 1$; $c_2 = 3$ y la solución particular queda

$$y' = e^{x} + 3e^{-2x} \qquad [78]$$

Ejemplo 4:

Resolver el problema de valores iniciales

$$\left.\begin{aligned} & y'' - 4y' + 4y = 0 \\ & y(0) = 3 \\ & y'(0) = 1 \end{aligned}\right\} \qquad [79]$$

Resolución:

Primer paso: determinar la Solución General de [79]

La ecuación característica es $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ y sus soluciones son

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2}\cdot\left(4+\sqrt{16-16}\right)=2 \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2}\cdot\left(4-\sqrt{16-16}\right)=2 \end{aligned}\right\} \qquad [80]$$

por lo tanto, la solución general que resulta de aplicar la Tabla 1 es:

$$y = \left(c_1 + c_2 x\right)\cdot e^{2x} \qquad [81]$$

Segundo paso: determinar la Solución Particular que, a partir de [81], cumpla con las condiciones iniciales dadas por [79]

Se calcula y':

$$y' = c_2 \cdot e^{2x} + 2\left(c_1 + c_2 x\right)\cdot e^{2x} \qquad [82]$$

De la solución general [81], del valor que toma y' [82] y las condiciones iniciales [79], se plantea el sistema de ecuaciones para determinar c_1, c_2:

$$\left.\begin{aligned} y(0) &= c_1 = 3 \\ y'(0) &= c_2 + 2c_1 = 1 \end{aligned}\right\} \qquad [83]$$

Resolviendo [83] resulta $c_1 = 3$; $c_2 = -5$
y la solución particular queda

$$y' = (3 - 5x) \cdot e^{2x} \qquad [84]$$

Ejemplo 5:

Resolver el problema de valores iniciales

$$\left.\begin{array}{l} y'' + 2y' + 5y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 5 \end{array}\right\} \qquad [85]$$

Resolución:

Primer paso: determinar la Solución General de [85]

La ecuación característica es $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ y sus soluciones son

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(-2 + \sqrt{4-20}\right) = -1 + \sqrt{1-5} = -1 + 2i \\ \lambda_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(-2 - \sqrt{4-20}\right) = -1 - \sqrt{1-5} = -1 - 2i \end{array}\right\} \qquad [86]$$

por lo tanto, la solución general que resulta de aplicar la Tabla 1 es:

$$y = e^{-x} \cdot (A\cos 2x + B\,\mathrm{sen}\, 2x) \qquad [87]$$

Segundo paso: determinar la Solución Particular que, a partir de [87], cumpla con las condiciones iniciales dadas por [85]

Se calcula y' :

$$y' = e^{-x} \cdot (-A\cos 2x - B\,\mathrm{sen}\, 2x - 2A\,\mathrm{sen}\, 2x + 2B\cos 2x) \qquad [88]$$

De la solución general [87], el valor que toma y' [88], y las condiciones iniciales [85], se plantea el sistema de ecuaciones para determinar c_1 , c_2 :

$$\left.\begin{array}{l} y(0) = A = 1 \\ y'(0) = -A + 2B = 5 \end{array}\right\} \qquad [89]$$

Resolviendo [89] da $A = 1$; $B = 3$
y la solución particular queda

$$y = e^{-x} \cdot (\cos 2x + 3\,\mathrm{sen}\, 2x) \qquad [90]$$

6. Procedimientos para hallar soluciones de las EDO2°OLCC no homogéneas

Son de la forma

$$y'' + ay' + by = r(x) \qquad [91]$$

en la que a, b son constantes reales.

A los efectos de determinar su solución general se le asocia la ecuación homogénea

$$u'' + au' + bu = 0 \qquad [92]$$

Como se mostró en los Teoremas 5 y 6, la solución general de [91] existe y es igual a la suma de una solución sin constantes arbitrarias de [91] más la solución general de [92].

Entonces la solución general de [58] se puede expresar siempre como la suma de dos funciones $y = u + z$, donde una es $u = c_1 u_1 + c_2 u_2$ es la solución general de [92] y la otra es z , una solución cualquiera, sin constantes arbitrarias, de [91] tal que $z'' + az' + bz = r(x)$.

A la función z se la suele llamar *"solución sin constantes"* de [91]. Esta solución es parte de la solución general de $y'' + ay' + by = r(x)$, pero no es una de sus soluciones particulares.

Las soluciones particulares de [91] se obtienen asignando valores a las constantes arbitrarias presentes en la solución general.

La solución general de [92] existe (Teorema 1) y se obtiene siguiendo los procedimientos vistos en el punto 4.1. de este Tema. Entonces, para obtener la solución general de la EDO2°OLCC no homogénea resulta necesario establecer cómo se pueden determinar soluciones sin constantes de [91].

Se proponen dos métodos con este objetivo: el de Variación de Parámetros (analítico) y el de los Coeficientes Indeterminados (deductivo).

6.1. Método de Variación de Parámetros para hallar una solución sin constantes de [91]

Tal como se demostró en el Teorema 6, existe al menos una manera analítica de determinar una solución sin constantes para [91], a través de la expresión

$$z(x) = -u_1(x)\int \frac{u_2(x)\cdot r(x)}{W(x)}dx + u_2(x)\int \frac{u_1(x)\cdot r(x)}{W(x)}dx \qquad [93]$$

Donde

$$W(x) = \begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u'_1(x) & u'_2(x) \end{vmatrix} \qquad [94]$$

La expresión [93] es la fórmula que surge del *Método de Variación de Parámetros* y permite obtener soluciones sin constantes de la ecuación lineal de segundo orden no homogénea con coeficientes constantes dada.

Ejemplo 6:

Obtener $z(x)$ tal que sea una solución sin constantes de

$$y'' + y = \sec x \qquad [95]$$

Aplicando el método de variación de parámetros

Resolución:

La ecuación diferencial homogénea asociada a [95] es

$$u'' + u = 0 \qquad [96]$$

Una base de las soluciones de la ecuación [96] para todo intervalo I se puede determinar a partir de la Tabla 1. En este caso, la ecuación característica de [96] es

$$\lambda^2 + 1 = 0 \qquad [97]$$

y sus raíces, $\lambda_1 = i$ y $\lambda_2 = -i$ son complejas conjugadas.

En el ejemplo dado, se tiene que:

$$\left.\begin{array}{l} a = 0 \\ b = 1 \\ \omega = +\sqrt{b - (1/4)a^2} = 1 \end{array}\right\} \qquad [98]$$

y siguiendo la fila 3 de la Tabla 1 se llega a determinar la solución general de la ecuación diferencial asociada [96], cuyas bases son:

$$\left.\begin{array}{l} u_1 = \cos x \\ u_2 = senx \end{array}\right\} \qquad [99]$$

de las que resulta que el Wronskiano definido en [94] vale, en este caso,

$$W(y_1, y_2) = \cos x \cdot \cos x - (-\operatorname{sen} x) \cdot \operatorname{sen} x = 1 \qquad [100]$$

Como

$$r(x) = \sec x \qquad [101]$$

al aplicar [93] queda

$$\begin{aligned} z &= -\cos x \cdot \int senx \cdot \sec x \cdot dx + senx \cdot \int \cos x \cdot \sec x \cdot dx \\ &= \cos x \cdot \ln|\cos x| + x \cdot senx \end{aligned} \qquad [102]$$

que es solución de [95] y no incluye constantes arbitrarias, respondiendo así a la consigna formulada.

Esta solución puede ser combinada con la solución general de [96] para producir la solución general de [95]

6.2. Método de Coeficientes Indeterminados para hallar una solución sin constantes

Dada una determinada función $r(x)$ en la ecuación [91], se propone una solución sin constantes $z(x)$ formalmente similar, o al menos relacionada con el tipo de función $r(x)$, que incluye coeficientes a determinar.

La función propuesta y sus derivadas se reemplazan, en la ecuación diferencial dada de manera de determinar los coeficientes, que hasta ese paso permanecerán *"indeterminados"*.

Las funciones a proponer se disponen en forma de tabla que toma como referencia la forma de $r(x)$ y el comportamiento de las raíces de la ecuación característica asociada a [92].

Tabla 2

Ecuación diferencial [91] $y'' + ay' + by = r(x)$		
Ecuación característica de [92] $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$	Se define $\omega = +\sqrt{b - (1/4)a^2}$	
Forma de $r(x)$	*Raíces de la ecuación característica*	*Forma a proponer para la solución sin constantes de [91]*
$p_{[m]}(x)$	0 no es raíz	$p_{[m]}(x)$
	0 es raíz simple	$x \cdot p_{[m]}(x)$
	0 es raíz doble	$x^2 \cdot p_{[m]}(x)$
$p_{[m]}(x) \cdot e^{\gamma x}$	γ no es raíz	$p_{[m]}(x) \cdot e^{\gamma x}$
	γ es raíz simple	$p_{[m]}(x) \cdot x \cdot e^{\gamma x}$
	γ es raíz doble	$p_{[m]}(x) \cdot x^2 \cdot e^{\gamma x}$
$p_{[m]}(x) \cdot \cos\omega x$	$\pm i\,\omega$ no son raíces	$p_{[m]}(x) \cdot \cos\omega x + q_{[m]}(x) \cdot \operatorname{sen}\omega x$
$p_{[m]}(x) \cdot \operatorname{sen}\omega x$	$\pm i\,\omega$ son raíces	$x \cdot \left[p_{[m]}(x) \cdot \cos\omega x + q_{[m]}(x) \cdot \operatorname{sen}\omega x \right]$
$e^{\alpha x} \cdot p_{[m]}(x) \cdot \cos\omega x$	$\alpha \pm i\,\omega$ no son raíces	$e^{\alpha x} \cdot \left[p_{[m]}(x) \cdot \cos\omega x + q_{[m]}(x) \cdot \operatorname{sen}\omega x \right]$
$e^{\alpha x} \cdot p_{[m]}(x) \cdot sen\omega x$	$\alpha \pm i\,\omega$ son raíces	$e^{\alpha x} \cdot x \cdot \left[p_{[m]}(x) \cdot \cos\omega x + q_{[m]}(x) \cdot \operatorname{sen}\omega x \right]$
<u>*Referencias:*</u> $p_{[m]}(x)$ representa un polinomio en x de grado m γ representa un número real.		

Las expresiones de la Tabla 2 se deben interpretar de la siguiente manera: dada la ecuación diferencial [91], se le asocia la ecuación [92], la que a su vez tendrá asociada una determinada *ecuación característica*.

En la primera columna de la Tabla se observan algunas posibilidades de cómo se puede presentar $r(x)$ en [91].

En la segunda, se analiza el comportamiento de la ecuación característica asociada a la respectiva ecuación diferencial homogénea, ya que del mismo dependerá la propuesta adecuada para una solución sin constantes.

Por último, en la tercera columna, se sugiere la forma de la solución sin constantes a proponer, que incluirá al desarrollarla, coeficientes indeterminados.

Por ejemplo, si aplicando la Tabla 2 se llegara a $p_{[m]}(x)$ como resultado en la tercera columna y surge del análisis de $r(x)$ que $m=2$, la solución sin constantes a proponer sería $r(x)=Ax^2+Bx+C$ donde A, B y C son las constantes a determinar o *coeficientes indeterminados*.

Por otra parte, si $r(x)$ se puede expresar como la suma de varias funciones formalmente más simples, entonces se puede proponer una solución compuesta, formada como una suma de las respectivas funciones intentadas como solución. A esta metodología se la conoce como superposición de soluciones.

Ejemplo 7:

Encontrar, utilizando el método de los coeficientes indeterminados, una solución $z(x)$ sin constantes que satisfaga la ecuación diferencial

$$y''-3y'+2y=e^x \qquad [103]$$

Resolución:

La ecuación diferencial homogénea asociada a [103] es

$$u''-3u'+2u=0 \qquad [104]$$

y la respectiva ecuación característica resulta

$$\lambda^2-3\lambda+2=0 \qquad [105]$$

cuyas raíces son

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_1=1\\ \lambda_2=2\end{array}\right\} \qquad [106]$$

Para aplicar la Tabla 2 y proponer la función $z(x)$ que resuelva el problema se debe analizar cómo se identifican los parámetros que figuran en ella.

En primer lugar, se debe elegir cuál es la fila principal que se utilizará para definir la función a proponer.

En este caso, como $r(x)=e^x$, se elige la fila 2, en la que la forma general de $r(x)$ se expresa como $p_{[m]}(x)\cdot e^{\gamma x}$. El grado del polinomio que es factor de $e^{\gamma x}$ es *0* por lo que el polinomio a proponer, de ese grado, con la forma más general, es A.

Por otra parte, comparando $r(x)=e^x$ con $p_{[m]}(x)\cdot e^{\gamma x}$ surge que el valor de γ debe ser *1*. En la fila 2 se tiene entonces que $\gamma=1$ es una raíz simple de la ecuación característica [105].

Todos estos datos llevan a los siguientes resultados que surgen de la Tabla 2 y se presentan como Tabla 3.

Tabla 3

Ecuación diferencial $y''-3y'+2y=e^x$		
Ecuación característica $\lambda^2-3\lambda+2=0$		$\omega=+\sqrt{b-(1/4)a^2}=2i$
Forma de $r(x)$	$\lambda_1=1\wedge\lambda_2=2$	*Forma a proponer para* $z(x)$
$p_{[m]}(x)\cdot e^{\gamma x}=e^x$ o sea $m=0\wedge\gamma=1$	γ no es raíz	$p_{[m]}(x)\cdot e^{\gamma x}$
	$\gamma=1$ es raíz simple	$p_{[m]}(x)\cdot x\cdot e^{\gamma x}\Rightarrow z(x)=A\cdot x\cdot e^x$
	γ es raíz doble	$p_{[m]}(x)\cdot x^2\cdot e^{\gamma x}$

La solución sin constantes se determinará a partir de la propuesta $z(x) = A \cdot x \cdot e^x$ teniendo en cuenta que A debe ser tal que $z(x)$ satisfaga [103].

Entonces, derivando se tiene

$$\left.\begin{aligned} z' &= A \cdot \left(e^x + xe^x\right) \\ z'' &= A \cdot \left(2e^x + xe^x\right) \end{aligned}\right\} \qquad [107]$$

y remplazando en [103]

$$\left.\begin{aligned} A \cdot \left(2e^x + xe^x\right) - 3A \cdot \left(e^x + xe^x\right) + 2A \cdot xe^x &= e^x \\ -A \cdot e^x &= e^x \\ A &= -1 \end{aligned}\right\} \qquad [108]$$

Resultando finalmente $z(x) = -x \cdot e^x$ una solución sin constantes de [103].

Ejemplo 8:

Encontrar, utilizando el método de los coeficientes indeterminados, una solución $z(x)$ sin constantes que satisfaga la ecuación diferencial

$$y'' + 2y' + 5y = 16e^x + \operatorname{sen} 2x \qquad [109]$$

Resolución:

La ecuación diferencial homogénea asociada a [109] es

$$u'' + 2u' + 5u = 0 \qquad [110]$$

y la respectiva ecuación característica resulta

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \qquad [111]$$

cuyas raíces son

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= -1 + 2i \\ \lambda_2 &= -1 - 2i \end{aligned}\right\} \qquad [112]$$

Como en el ejemplo anterior, se aplica la Tabla 4 para proponer la función $z(x)$ que resuelva el problema.

Sin embargo, en este caso se debe tener en cuenta que $r(x) = 16e^x + \operatorname{sen} 2x$ se puede expresar como

$$r(x) = 16e^x + \operatorname{sen} 2x = r_1(x) + r_2(x) \qquad [113]$$

En la que

$$\left.\begin{aligned} r_1(x) &= 16e^x \\ r_2(x) &= \operatorname{sen} 2x \end{aligned}\right\} \qquad [114]$$

A partir de estas funciones, y aplicando el principio de superposición de las soluciones, se deben determinar

$$z_1(x) \wedge z_2(x) \mid z_1(x) + z_2(x) = z(x) \qquad [115]$$

En cada caso existe una correspondencia entre $r_1(x)$ y $z_1(x)$ como entre $r_2(x)$ y $z_2(x)$, respectivamente.

Todos estos datos llevan a los siguientes resultados que surgen de la Tabla 2 y se presentan como Tabla 4.

Como comentario, se agrega que $\pm i\,\omega$ no son raíces porque $\pm 2i \neq -1 \pm 2i$.

Las filas resaltadas en la citada Tabla 4 son las seleccionadas para proponer las soluciones $z_1(x)$ y $z_2(x)$, respectivamente.

Tabla 4

Ecuación diferencial $y''+2y'+5y=16e^{x}+\operatorname{sen}2x$		
Ecuación característica $\lambda^2+2\lambda+5=0$		$\omega=+\sqrt{b-(1/4)a^2}=2$
Forma de $r_1(x)$	$\lambda_1=-1+2i \wedge \lambda_2=-1-2i$	*Forma a proponer para* $z_1(x)$
$p_{[m]}(x)\cdot e^{\gamma x}=16e^{x}$ o sea $m=0 \wedge \gamma=1$	γ no es raíz	$p_{[m]}(x)\cdot e^{\gamma x} \Rightarrow z_1(x)=A\cdot e^{x}$
	γ es raíz simple	$p_{[m]}(x)\cdot x\cdot e^{\gamma x}$
	γ es raíz doble	$p_{[m]}(x)\cdot x^2\cdot e^{\gamma x}$
Forma de $r_2(x)$		*Forma a proponer para* $z_2(x)$
$p_{[m]}(x)\cdot sen\omega x=\operatorname{sen}2x$ o sea $m=0 \wedge \omega=2$	$\pm i\,\omega$ no son raíces	$p_{[m]}(x)\cdot\cos\omega x+q_{[m]}(x)\cdot sen\omega x \Rightarrow$ $\Rightarrow z_2(x)=B\cos 2x+C\operatorname{sen}2x$
	$\pm i\,\omega$ son raíces	$x\cdot\left[p_{[m]}(x)\cdot\cos\omega x+q_{[m]}(x)\cdot\operatorname{sen}\omega x\right]$

Entonces, del análisis de la tabla anterior, se propone como solución sin constantes para la ecuación diferencial [109] a

$$z(x)=z_1(x)+z_2(x)=A\cdot e^{x}+B\cos 2x+C\operatorname{sen}2x \qquad [116]$$

y derivando se tiene

$$\left.\begin{aligned} z' &= A\cdot e^{x}-2B\operatorname{sen}2x+2C\cos 2x \\ z'' &= A\cdot e^{x}-4B\cos 2x+4C\operatorname{sen}2x \end{aligned}\right\} \qquad [117]$$

Remplazando [116] y [117] en [109] resulta

$$8A\cdot e^{x}+(B+4C)\cos 2x+(M-4K)\operatorname{sen}2x=16e^{x}+\operatorname{sen}2x \qquad [118]$$

a partir de la cual se genera el siguiente sistema de ecuaciones, donde las incógnitas son *A*, *B* y *C*, es decir los *coeficientes indeterminados*:

$$\left.\begin{aligned} &8A=16 \\ &(B+4C)=0 \\ &(C-4B)=1 \end{aligned}\right\} \qquad [119]$$

resultando $A=2\,;\,B=-\dfrac{4}{17}\,;\,C=\dfrac{1}{17}$, con lo que finalmente se puede obtener la solución sin constantes buscada:

$$z(x)==2\cdot e^{x}-\frac{4}{17}\cos 2x+\frac{1}{17}\operatorname{sen}2x$$

7. Comentarios para el final del Tema

Durante el desarrollo de este capítulo se han estudiado con detalle las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden lineales con coeficientes constantes.

El ambiente teórico del comienzo de este capítulo introdujo los conceptos básicos a tener en cuenta en el análisis de estos tipos de ecuaciones diferenciales que se presentan con frecuencia en el campo de la ingeniería, la física y otras disciplinas, tanto de las ciencias naturales como de las ciencias sociales.

Se presentan procedimientos específicos para su resolución, junto con varios ejercicios resueltos.