Tema 1. Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

1. Introducción

1.1. ¿Qué es una ecuación diferencial?

Es una ecuación que involucra al menos una derivada de una función desconocida de una o más variables. La ecuación puede contener más de una función desconocida, una, algunas o todas las variables de las que dependen, una o varias funciones conocidas de dichas variables y constantes definidas.

En estos términos, no es posible considerar como ecuaciones diferenciales a aquellas que contienen constantes cuyo valor se puede establecer arbitrariamente.

Ejemplo 1:

La siguiente ecuación

$$y' = \cos x, \qquad [1]$$

es una ecuación diferencial donde la función desconocida es $y(x)$.

Nótese que aparece y', es decir una derivada de una función desconocida, condición necesaria para que [1] sea una ecuación diferencial. En este caso se presenta también una función conocida de la variable independiente x, como $\cos x$. No hay constantes que puedan tomar valores arbitrariamente fijados, lo que representa que se cumple otra condición necesaria para que [1] sea una ecuación diferencial. El hecho de que [1] no contenga a y o que la variable x no aparezca despejada como factor en algún término o como término en alguno de los miembros de la ecuación no afecta la condición de [1] en tanto ecuación diferencial.

1.2. ¿Cuándo se puede presentar una ecuación diferencial?

Cuando se analiza un fenómeno en la búsqueda de establecer cómo una variable depende de otra o de otras, es decir, cuando se necesita hallar una *función* que represente el proceso.

Si es posible determinar o proponer una expresión que muestre cómo varía esa *función desconocida* al variar las variables, se generará una ecuación que involucra a las derivadas de una variable respecto de otras de las cuales depende, o sea, una *ecuación diferencial*.

Ejemplo 2:

Considerar la observación: *"el número de habitantes P de una comunidad varía permanentemente con el tiempo t. Esta variación es, en todo momento, proporcional al número de habitantes P que en cada instante hay en la comunidad. Por otra parte, cada comunidad evolucionará con distintos índices de crecimiento, que pueden ser considerados fijos por comunidad para ciertos períodos de tiempo en los que se mantengan determinadas condiciones de vida".*

¿Se puede describir este proceso mediante una ecuación?

Resolución:

Sí. La variación de P respecto de t se debe interpretar como

$$\frac{dP}{dt} = P' \qquad [2]$$

Si definimos que la constante k toma un valor determinado que represente el índice o factor de crecimiento para cada comunidad y circunstancia, queda establecida la siguiente relación

$$\boxed{P' = k \cdot P} \qquad [3]$$

que es una ecuación diferencial en la que P es la función desconocida de la variable t. Por otra parte debe quedar claro que k va a tomar un valor perfectamente definido para cada caso en el que se aplique esta relación, es decir, no se le puede asignar a k cualquier valor arbitrariamente.

1.3. ¿Qué se entiende por *solución* de una ecuación diferencial?

La función que al ser remplazada en lugar de la función desconocida satisface una ecuación diferencial sobre un dominio determinado de la variable independiente, es una *solución de la ecuación diferencial*.

Dicho de otra manera, si en la ecuación diferencial se remplaza la función desconocida –en el caso que aparezca- y las derivadas de ésta por una solución y sus derivadas respectivas, la ecuación diferencial se reducirá a una identidad.

Ejemplo 3:

Verificar que

$$y = \operatorname{sen} x + 8 \qquad [4]$$

es una solución de la ecuación diferencial [1].

Resolución:

En la ecuación diferencial se considera a y como función desconocida de x, que es la variable independiente. Para remplazar [4] y sus derivadas en [1], a los efectos de verificar que [4] es una solución de [1], es necesario derivar y, respecto de la variable x, resultando

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\operatorname{sen} x + 8)}{dx} = \cos x \qquad [5]$$

que reduce [1] a una identidad.

¿El número 8 es decisivo para que [4] sea solución de [1]? No. Cualquier otro valor numérico del segundo término del segundo miembro de [4] también convierte a [1] en una identidad.

Ejemplo 4:

Verificar que

$$P = 340000 \cdot e^{kt} \qquad [6]$$

es una solución de la ecuación diferencial [3].

Resolución:

En la ecuación diferencial se considera a P como función desconocida de t, que es la variable independiente. Para remplazar [6] en [3] es necesario derivar P, respecto de la variable t, resultando

$$\frac{dP}{dt} = \frac{d\left(340000 \cdot e^{kt}\right)}{dt} = k \cdot 340000 \cdot e^{kt} = k \cdot P \qquad [7]$$

que reduce [3] a una identidad. La constante 340000 en [6] podrá cambiarse por otra sin alterar el resultado obtenido en la identidad [7].

1.4. ¿Cómo se determina una solución de una ecuación diferencial?

Como se parte de una ecuación en la que aparecen derivadas, el procedimiento natural para hallar la función desconocida es la integración.

Ejemplo 5:

Determinar una solución de la ecuación diferencial

$$y' = \operatorname{tg} x \qquad [8]$$

Resolución:

Operando:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

$$dy = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx$$

integrando ambos miembros y llamando C_1 y C_2 a las constantes arbitrarias que surgen de la integración:

$$\int dy = \int \frac{senx}{\cos x} dx$$

$$y + C_1 = -\ln|\cos x| + C_2$$

haciendo:

$$C = C_2 - C_1$$

resulta:

$$\boxed{y = -\ln|\cos x| + C} \qquad [9]$$

que es solución de [8], como se puede verificar.

Ejemplo 6:

La ecuación diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \qquad [10]$$

en la que x es el eje a lo largo del cual se mueve una partícula y t es el tiempo, surgió al analizar las características del movimiento rectilíneo uniforme, es decir aquel en que dicha partícula se desplaza en línea recta y con velocidad constante. Determinar la posición de la partícula como función del tiempo.

Resolución:

Esta cuestión requiere resolver la ecuación diferencial. La derivada de mayor orden que aparece en [10] es de segundo orden, por lo que será necesario integrar dos veces. La función desconocida es $x(t)$; operando e integrando sucesivamente:

$$\frac{d\left(\frac{dx}{dt}\right)}{dt} = 0$$

$$d\left(\frac{dx}{dt}\right) = 0 \cdot dt$$

$$\int d\left(\frac{dx}{dt}\right) = \int 0 \cdot dt$$

$$\frac{dx}{dt} = C_1$$

$$dx = C_1 \cdot dt$$

$$\int dx = \int C_1 \cdot dt$$

resulta:

$$\boxed{x = C_1 \cdot t + C_2} \qquad [11]$$

la solución buscada. ¿Encuentra alguna semejanza con la fórmula que expresa el espacio recorrido en función del tiempo transcurrido para este tipo de movimiento?

¿Es posible, sin cambiar el sentido de la solución, agrupar las dos constantes arbitrarias en una sola?

¿Qué relación encuentra entre el número de constantes arbitrarias que aparecen en las soluciones de los *Ejemplos 5* y *6* y el orden de la derivada de mayor orden en la respectiva ecuación diferencial?

2. Formación de ecuaciones diferenciales

En la mayoría de los casos, una ecuación diferencial se formará como resultado de expresar matemáticamente un proceso. En otros, por el contrario, se llegará a la ecuación diferencial partiendo de una expresión que define el valor de una función.

Esta última situación se dará cuando sea necesario operar con la ecuación diferencial no para determinar la función, que ya no es desconocida, sino para obtener relaciones a través de las propiedades de sus derivadas.

2.1. Formación de ecuaciones diferenciales que representan un proceso

Una ecuación diferencial representa una relación que incluye alguna derivada de una función desconocida. Cuando al plantearse una situación que se necesita interpretar matemáticamente se pueden establecer relaciones entre derivadas y variables, surge una ecuación diferencial. La solución de tal ecuación diferencial puede ser considerada como el *"modelo matemático"* de dicho proceso.

Ejemplo 7:

Establecer mediante una ecuación diferencial el siguiente proceso: *"El tanque representado en la Figura 1 contiene 200 litros de agua en la que se han disuelto 10 kilogramos de sal. A partir de un cierto instante, comienza a ingresar al tanque agua pura a razón de 5 litros por minuto mientras sale la misma cantidad de solución. La composición del líquido en el tanque se mantiene uniforme mediante agitación. Es de interés comprender qué sucede con la cantidad de sal que permanece en el tanque a medida que el tiempo transcurre"*

Figura 1

Resolución:

El problema se puede plantear del siguiente modo: sea $s(t)$ la cantidad de sal remanente en el tanque para cualquier instante t.

La variación de la cantidad de sal en el tanque durante un cierto intervalo de tiempo se puede determinar como la diferencia entre la cantidad de sal que entra al tanque -en este caso nula- y la cantidad que abandona el tanque, siempre en dicho lapso.

Llamando Δt al período considerado, en términos de kilos de sal se tiene que entran al tanque:

$$\left\{0\left[\frac{kilos}{litro}\right]\cdot 5\left[\frac{litros}{minuto}\right]\right\}\cdot \Delta t[minutos]$$

y salen del tanque:

$$\left\{\frac{s(t)[kilos]}{200[litros]}\cdot 5\left[\frac{litros}{minutos}\right]\right\}\cdot \Delta t[minutos]$$

entonces la variación de contenido de sal en el tanque es:

$$\Delta s = \left(0 - 0{,}025s\right)\cdot \Delta t\ [kilos]$$

Operando:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = -0{,}025s$$

tomando el límite de la expresión anterior para $\Delta t \to 0$ se tiene:

$$\boxed{s' = -0{,}025s} \qquad [12]$$

que es la ecuación diferencial buscada y que representa el proceso estudiado.

Ejemplo 8:

Establecer mediante una ecuación diferencial la ley del equilibrio entre la oferta y la demanda para establecer el precio de un producto. Tener en cuenta los siguientes factores: *"Sea p el precio de un bien por determinada unidad, en el instante t, y que $p = p(t)$. La demanda, D es la cantidad de unidades del bien que por unidad de tiempo desean los consumidores. En general, esta demanda estará compuesta por una parte constante y una parte variable que dependerá no sólo del precio del bien sino también de las expectativas de variación del precio de dicho bien. De manera similar, la oferta S se define como el número de unidades del bien que los productores tienen disponible por unidad de tiempo. La composición de la oferta responde al mismo criterio que el analizado para la demanda. El principio económico de la oferta y la demanda establece que el precio de un bien queda determinado cuando se cumple la condición de que la demanda sea igual a la oferta, en cada instante"*

Resolución:

Sobre la base del enunciado del problema, se pueden establecer en principio las siguientes ecuaciones para representar a la demanda

$$D = f\left[p(t), p'(t)\right] = a_1 \cdot p(t) + a_2 \cdot p'(t) + a_3$$

y a la oferta:

$$S = g\left[p(t), p'(t)\right] = b_1 \cdot p(t) + b_2 \cdot p'(t) + b_3$$

Si se cumple el principio económico de la oferta y la demanda, las ecuaciones anteriores deben ser iguales, por lo tanto

$$a_1 \cdot p(t) + a_2 \cdot p'(t) + a_3 = b_1 \cdot p(t) + b_2 \cdot p'(t) + b_3$$

o bien, suponiendo que $a_1 \neq b_1$; $a_2 \neq b_2$; $a_3 \neq b_3$:

$$\boxed{p'(t) + \left(\frac{a_1 - b_1}{a_2 - b_2}\right) \cdot p(t) = \frac{b_3 - a_3}{a_2 - b_2}} \qquad [13]$$

que es la ecuación diferencial buscada y que representa el proceso estudiado.

Ejemplo 9:

Establecer mediante ecuaciones diferenciales la siguiente ley ecológica: *"Los lobos en Alaska se alimentan de caribúes, los cuales a su vez se alimentan de vegetación. Teóricamente el depredador puede destruir toda la presa de modo que esta última llega a extinguirse. Sin embargo, si esto sucede, el depredador también se extinguirá puesto que depende de la presa para su existencia. En realidad se desarrolla un ciclo donde en algún tiempo la presa puede ser abundante y los depredadores pocos. Debido a la abundancia de la presa, la población de depredadores crece, y se reduce la población de la presa, lo que resulta en una reducción de depredadores y en un consecuente incremento de presas, y el ciclo continúa"*

Resolución:

El objeto de estudiar este problema es conocer la evolución en el tiempo de las dos especies, depredador y presa. Para ello, se establece la siguiente simbología:

$x =$ número de presas en cualquier instante t

$y =$ número de depredadores en cualquier instante t

Si no hubiera depredadores, el comportamiento de la población de presas sería similar al analizado en el Ejemplo 2, es decir:

$$\frac{dx}{dt} = a_1 \cdot x \text{, donde } a_1 > 0 \text{ es la constante de proporcionalidad} \qquad [14]$$

Si no hubiera presa, se podría esperar que el número de depredadores decline en cada instante con una rapidez proporcional al número de depredadores en ese momento. Resulta razonable esperar que al no disponer de alimento, el coeficiente de la siguiente expresión resulte negativo, o sea:

$$\frac{dy}{dt} = -b_1 \cdot y \text{, donde } b_1 > 0 \text{ es la constante de proporcionalidad} \qquad [15]$$

Estas ecuaciones diferenciales consideradas en forma separada tienen soluciones que, según lo visto en el Ejemplo 4, toman respectivamente las formas:

$x = C_1 \cdot e^{a_1 t}$, donde $C_1 > 0$ es una constante arbitraria

$y = C_2 \cdot e^{b_1 t}$, donde $C_2 > 0$ es una constante arbitraria

donde los valores de estas dos últimas constantes se limitan a números positivos porque las poblaciones no pueden ser negativas.

Por otra parte, si la población fuese nula en algún instante no se requeriría ningún estudio para comprender su evolución a partir de ese momento.

Según estos resultados, al transcurrir el tiempo, la población de las presas crecería indefinidamente, mientras que la de los depredadores tendería a desaparecer por completo.

Para obtener un modelo matemático de la situación real, se deben modificar las ecuaciones [14] y [15] de manera que contemplen la interacción entre las especies. Es decir, cada ecuación debería incluir un término que tenga en cuenta esta relación y que, en consecuencia, atenúe la rapidez del crecimiento de la cantidad de presas en un caso y compense la rapidez del decrecimiento de la población de depredadores en el otro.

Se pueden proponer las siguientes modificaciones en [14] y [15]:

$$\frac{dx}{dt} = a_1 \cdot x - F_1(x,y) \qquad [16]$$

donde $F_1(x,y)$ es la función que atenúa el crecimiento de x

$$\frac{dy}{dt} = -b_1 \cdot x + F_2(x,y) \qquad [17]$$

donde $F_2(x,y)$ es la función que compensa el decrecimiento de y .

Para determinar la posible forma que toman estas dos funciones, se debe tener en cuenta que ambas tienen que anularse si no hay depredadores o no hay presas, ya que en este caso serían válidas las ecuaciones [14] y [15].

Las funciones más simples que cumplen esta propiedad son:

$$F_1(x,y) = a_2 xy \qquad [18]$$

$$F_2(x,y) = b_2 xy \qquad [19]$$

Reemplazando [18] y [19] en [16] y [17], resulta el siguiente sistema de dos ecuaciones diferenciales con dos funciones desconocidas, que describe matemáticamente el proceso analizado:

$$\boxed{\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_1 x - a_2 xy \\ \frac{dy}{dt} &= -b_1 y + b_2 xy \end{aligned}\right\}} \qquad [20]$$

y cuya solución producirá la información buscada.

Ejemplo 10:

Establecer una ecuación diferencial que describa, en términos de su desplazamiento como función desconocida del tiempo, el movimiento de una masa de m gramos que cae verticalmente hacia abajo, bajo la influencia de la gravedad, suponiendo despreciable la resistencia del aire.

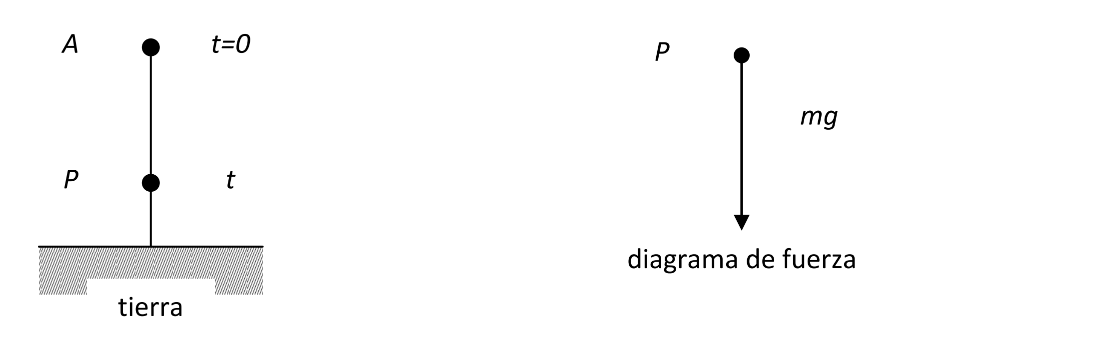
<u>*Resolución:*</u>

Para encarar este problema es conveniente dibujar el diagrama de la Figura 2 y necesario recurrir a la segunda ley de Newton, que establece que *"La tasa de cambio en momentum de un cuerpo en el tiempo es proporcional a la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo y tiene la misma dirección de la fuerza"*.

El momentum de un objeto se define como su masa m multiplicada por su velocidad v. La tasa de cambio en momentum en el tiempo es entonces

$$\frac{d(mv)}{dt} = m \cdot \frac{dv}{dt} = m \cdot a \qquad [21]$$

Figura 2



donde la masa del objeto es considerada constante y la aceleración se define como la derivada de la velocidad del objeto respecto del tiempo. La ley de Newton queda expresada entonces, considerando que las unidades de medición seleccionadas hacen que la constante de proporcionalidad sea la unidad:

$$F = m \cdot a$$

En el caso del movimiento que se analiza, caída libre, la fuerza que actúa es el peso del cuerpo debido a la aceleración de la gravedad de la tierra, que tiene un valor considerado constante de valor g.

Por otra parte, la velocidad del objeto se define como la derivada del desplazamiento del mismo respecto del tiempo. Con estas bases, la expresión [21] se puede escribir como:

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = m \cdot g$$

Resultando

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = g} \qquad [22]$$

la ecuación diferencial buscada, que relaciona el desplazamiento con el tiempo para este tipo de movimiento.

2.2. Formación de ecuaciones diferenciales a partir de una función conocida

En este caso, el objetivo es obtener la ecuación diferencial correspondiente a una expresión en la que aparecen funciones, variables y constantes definidas o arbitrarias.

Así como el procedimiento natural para hallar la función desconocida a partir de la ecuación diferencial es la integración, para encontrar la ecuación diferencial conociendo la función el mecanismo lógico será la derivación.

Se debe tener en cuenta que la expresión a obtener no debe contener constantes cuyo valor pueda ser fijado arbitrariamente, ya que en este caso no se trataría de una ecuación diferencial.

Dicho de otro modo, las constantes arbitrarias que aparecen en la expresión referida a la función deberán ser eliminadas al derivar.

Ejemplo 11:

La ecuación

$$x = \tfrac{1}{2} g t^2 + v_0 t + x_0 \qquad [23]$$

representa el desplazamiento de un cuerpo en caída libre que partió en el instante t_0 desde el punto x_0 con una velocidad v_0, considerando positivos los desplazamientos y velocidades hacia abajo, al igual que la aceleración debida a la gravedad. Obtener la ecuación diferencial que describe el comportamiento de un cuerpo en caída libre.

Resolución:

La ecuación diferencial buscada tiene como solución a [23]. En esta última, debemos analizar el significado y las características de sus constantes. Los valores $\frac{1}{2}$ y g están determinados, mientras que x_0 y v_0 pueden tomar arbitrariamente cualquier valor.

Para obtener la ecuación diferencial correspondiente, se deriva [23] sucesivamente, dos veces, resultando:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t + x_0\right)}{dt} = g t + v_0 \qquad [24]$$

$$\boxed{\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d\,\frac{dx}{dt}}{dt} = \frac{d\left(g t + v_0\right)}{dt} = g} \qquad [25]$$

La ecuación [25] es una ecuación diferencial. Es idéntica a la [22] del Ejemplo 10. En este caso es el punto de llegada del planteo, mientras que en aquel fue el punto de partida.

Cabe hacer el siguiente análisis: mientras que la ecuación diferencial [25] describe en forma genérica el movimiento de caída libre, la fórmula [23] se aplica teniendo en cuenta ciertas condiciones, como son el desplazamiento y la velocidad cuando se inicia el estudio del proceso.

Ejemplo 12:

La ecuación

$$y = C \cdot x^2 \qquad [26]$$

donde C es una constante que se puede fijar arbitrariamente representa una familia de parábolas donde y es una función de x. Determinar la correspondiente ecuación diferencial.

Resolución:

Derivando, como en el Ejemplo anterior, se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = 2 \cdot C \cdot x \qquad [27]$$

La expresión [27] no es una ecuación diferencial debido a que contiene una constante arbitraria. Esta constante se debe eliminar, y a tal fin se opera con las dos ecuaciones, [26] y [27] de la siguiente manera:

de [26]: $C = \dfrac{y}{x^2}$ [28]

de [27]: $C = \dfrac{y'}{2 \cdot x}$ [29]

e igualando [28] y [29] resulta

$$\frac{y}{x^2} = \frac{y'}{2 \cdot x}$$

o, lo que es lo mismo:

$$\boxed{y' = 2 \cdot \frac{y}{x}} \qquad [30]$$

que es la ecuación diferencial buscada.

3. Soluciones de las ecuaciones diferenciales

3.1. Tipos de soluciones

Como se vio en el Punto 1.4. el procedimiento natural para resolver una ecuación diferencial es la integración.

Cada vez que se integra se incorpora una constante arbitraria. Entonces las soluciones obtenidas integrando incluirán tantas constantes arbitrarias como integrales se efectúen y el número de integrales realizadas dependerá, a su vez, del orden de la derivada de mayor orden que aparezca en la ecuación diferencial.

Este tipo de solución, que incluye un determinado número de constantes arbitrarias, se denomina *solución general*.

Representa a la función desconocida como una *familia de curvas*. Esta familia de curvas tiene la propiedad de satisfacer la ecuación diferencial.

Cada curva de la familia corresponde a una combinación determinada de valores para las constantes arbitrarias.

A cada una de estas curvas, que no contienen constantes arbitrarias, se las denomina *soluciones particulares* y son funciones que satisfacen no sólo la ecuación diferencial, sobre un dominio determinado de la variable independiente, sino también las condiciones particulares que provoca la asignación de valores determinados a las constantes arbitrarias.

Por lo general, la asignación de los valores a las constantes dependerá de las condiciones impuestas a la solución particular.

Puede tratarse por un lado de un problema con *condiciones iniciales*, esto es cuando los valores de la función y de sus derivadas estén definidos para un valor determinado de la variable independiente.

Puede tratarse por otra parte de un problema de *valores de frontera*, cuando las restricciones están dadas sobre los valores que toma la función para distintos valores de la variable independiente.

Si existe una función que satisface la ecuación diferencial pero que no es el resultado de integrarla y aplicar luego una combinación particular de los valores de las constantes arbitrarias, a tal función se la denomina *solución singular*.

Ejemplo 13:

Sea la ecuación diferencial

$$(y')^2 - x \cdot y' + y = 0 \qquad [31]$$

determinar su solución general y representarla gráficamente.

Obtener una solución particular que pase por el punto $(-3;-10)$, otra solución particular que pase por el punto $(0;0)$ e investigar si existe alguna solución singular.

Resolución:

Se puede establecer la función desconocida $y(x)$ si se analiza [31]. Resulta de este análisis que la función

$$\boxed{y = C \cdot (x - C)} \qquad [32]$$

es la solución general de [31], como se verifica si se deriva, dando

$$y' = C \qquad [33]$$

y se reemplaza en [31], resultando

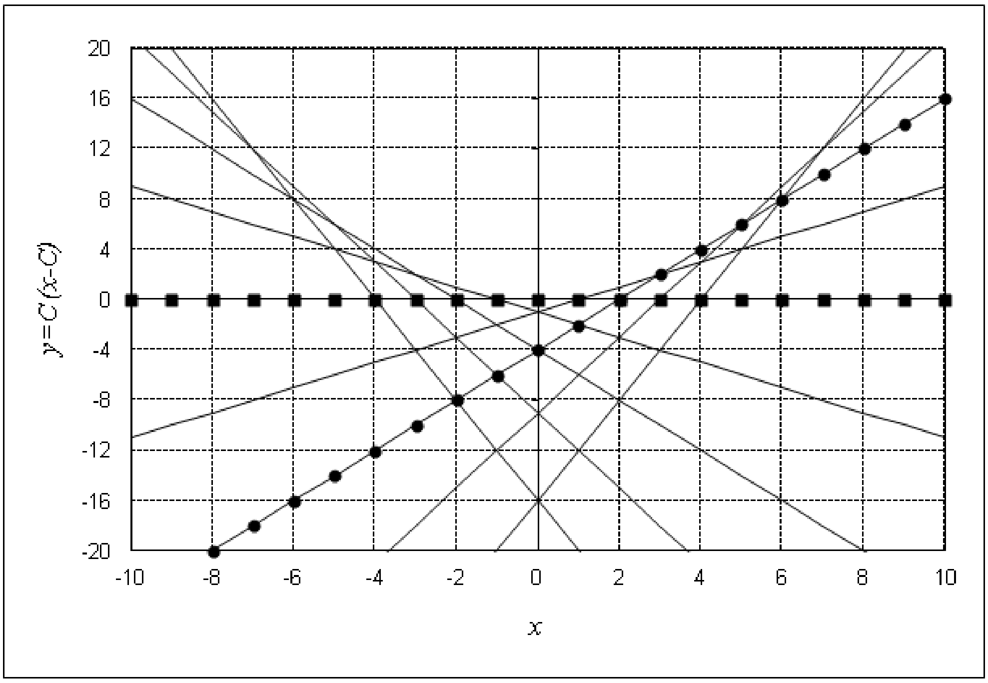
$$C^2 - Cx + C\cdot(x - C) \equiv 0 \qquad [34]$$

o sea una identidad.

Como en realidad esta solución ensayada proviene de una integración implica una (y solo una) constante arbitraria, ya que la derivada de mayor orden que aparece en [31] es de primer orden, y para resolverla analíticamente se hubiera requerido solo una integración.

La gráfica de [32] se ve en la Figura 3, en la que se dibujan varias curvas de la familia solución general.

Figura 3



Para determinar las soluciones particulares, se deben individualizar las curvas que, perteneciendo a esta familia, cumplen las condiciones dadas.

En el primero de los casos, la curva buscada debe pasar por el punto $(-3;-10)$, es decir que $\boxed{y(x) = C\cdot(x - C)}$ debe valer -10 cuando x tome el valor -3. Esta condición fijará valores ya no arbitrarios para C, y al determinarlos, queda también determinadas las soluciones particulares que cumplen las condiciones establecidas.

Haciendo

$$y(-3) = -10 \qquad [35]$$

y reemplazando en la solución general [32], resulta

$$\begin{aligned} -10 &= C\cdot(-3 - C) \\ C = 2 \quad &\vee \quad C = -5 \end{aligned} \qquad [36]$$

es decir que, volviendo a reemplazar en [32] uno de los resultados de [36], queda

$$\boxed{y = 2\cdot(x - 2)} \qquad [37]$$

que es la primer solución particular buscada y que en la Figura 3 aparece individualizada con marcadores en forma de círculos. Por supuesto que se podría haber propuesto como respuesta para este apartado

$$\boxed{y = -5\cdot(x + 5)}$$

que también satisface la condición requerida.

Para la segunda solución particular buscada se hace

$$y(0) = 0$$

resultando

$$0 = C \cdot (0 - C)$$

$$C = 0$$

y reemplazando en [32] se tiene

$$\boxed{y = 0}$$

que es la segunda solución particular buscada y que en la Figura 3 aparece individualizada con marcadores en forma de cuadrados.

Por último, se investiga alguna posible solución singular. De la Figura 3 surge que el conjunto de rectas definen una parábola, cuya expresión analítica se puede establecer partiendo de la misma gráfica y resulta

$$\boxed{y = \frac{x^2}{4}} \qquad [38]$$

Para determinar si ésta es una solución singular basta con reemplazarla en [31], para lo cual se determina en primer término la derivada, que resulta

$$y' = \frac{x}{2}$$

y luego

$$(y')^2 - x \cdot y' + y = 0$$

$$\frac{x^2}{4} - x \cdot \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} = 0$$

$$2 \cdot \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2} \equiv 0$$

que es una identidad. Obsérvese que la solución singular obtenida no incluye constantes arbitrarias. Tampoco resulta de asignar un valor determinado a C en la solución general [32].

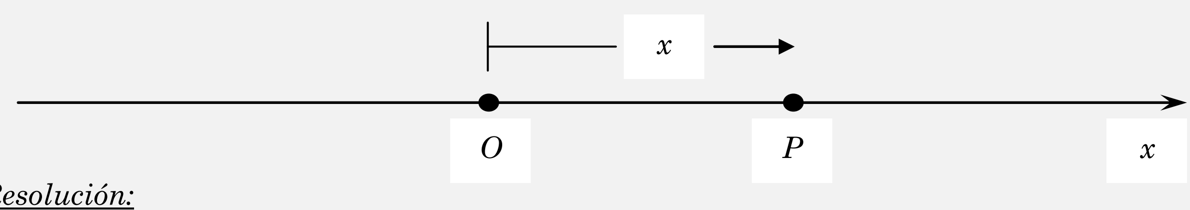
Ejemplo 14:

Una partícula P se mueve a lo largo del eje x de acuerdo a la Figura 4 de tal manera que su aceleración, en todo momento, está dada por

$$a = 16 - 24t \qquad [39]$$

determinar (a) la posición x de la partícula medida desde el origen O para cualquier tiempo $t > 0$, considerando todos los posibles valores arbitrarios de velocidad y desplazamiento iniciales, es decir, cuando $t = 0$. (b) la posición x de la partícula medida desde el origen O para cualquier tiempo $t > 0$, considerando que inicialmente ($t = 0$) está localizada en $x = 2$ y viaja a una velocidad $v = -5$. (c) la posición x de la partícula medida desde el origen O para cualquier tiempo $t > 0$, considerando que inicialmente ($t = 0$) está localizada en $x = 2$ y, cuando $t = 1$ se ubica en $x = 2$.

Figura 4



Resolución:

En este problema, el objetivo es determinar distintas soluciones de la ecuación [39], que es una ecuación diferencial, debido a que la aceleración se puede expresar

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad [40]$$

En el apartado (a) se debe encontrar una solución general, en la que las constantes arbitrarias tomarán un determinado significado. En la parte (b) se debe encontrar una solución particular partiendo de condiciones iniciales, mientras que en el punto (c) se debe determinar una solución particular teniendo en cuenta condiciones de frontera.

Para encarar el punto (a), se plantea la ecuación diferencial y se la integra hasta hallar la función desconocida, en este caso $x(t)$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 16 - 24t \qquad [41]$$

$$\int \frac{dx}{dt} dx = \int (16 - 24t)\, dt \qquad [42]$$

$$\frac{dx}{dt} = 16t - 12t^2 + C_1 \qquad [43]$$

$$\int dx = \int (16t - 12t^2 + C_1)\, dt \qquad [44]$$

$$\boxed{x(t) = 8t^2 - 4t^3 + C_1 t + C_2} \qquad [45]$$

Con la ecuación [45] se ha determinado la función desconocida. Ahora se le dará un significado concreto a las dos constantes arbitrarias, C_1 y C_2, en relación con el problema que se está resolviendo.

Analizando la ecuación [43] se observa que C_1 tomará el valor de x' para el instante $t = 0$. Por otra parte, se sabe que $x' = v$, es decir, la derivada del desplazamiento respecto del tiempo es igal a la velocidad de la partícula. O sea que el valor de esta constante arbitraria representa el valor de la velocidad inicial de la partícula.

De la misma manera, analizando [45], queda claro que C_2 representa el valor del desplazamiento inicial de la partícula. Si para clarificar la expresión que representa la solución general del problema se adopta la notación

$$C_1 = v_0 \quad \wedge \quad C_2 = x_0$$

se puede expresar la respuesta de la parte (a) como

$$\boxed{x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + 8t^2 - 4t^3} \qquad [46]$$

Nótese que tanto x_0 como v_0 son constantes arbitrarias, como C_1 y C_2. Sin embargo, en el contexto de la solución buscada, es pertinente dar un significado físico a dichas constantes.

Para resolver la parte (b), se tienen en cuenta las condiciones

$$x(0) = x_0 = 2$$

$$v(0) = v_0 = -5$$

que se reemplazan en [46], resultando la solución particular buscada:

$$\boxed{x(t) = 2 - 5t + 8t^2 - 4t^3} \qquad [47]$$

Cabe hacer una aclaración. Suponiendo que no se hubiera hecho el análisis sobre los significados de las constantes arbitrarias en [45], el planteo para el cálculo de la solución particular debería haber sido el siguiente: a partir de [43] y [45] se plantea el sistema

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt}(t) &= 16t - 12t^2 + C_1 \\ x(t) &= 8t^2 - 4t^3 + C_1 t + C_2 \end{aligned}\right\} \qquad [48]$$

con el objeto de determinar los valores de C_1 y C_2, utilizando los valores que toman x y x' para un determinado valor de t. En este caso se conocen los valores de x y x' para $t=0$, por lo tanto el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas queda formado

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt}(0) &= 16\cdot 0-12\cdot 0+C_1 = -5 \\ x(0) &= 8\cdot 0^2-4\cdot 0^3+C_1\cdot 0+C_2 = 2 \end{aligned}\right\} \qquad [49]$$

o bien

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= -5 \\ C_2 &= 2 \end{aligned}\right\} \qquad [50]$$

que reemplazadas en [45] vuelve a resultar en [47], la solución particular buscada.

La resolución de la parte (c) se logra teniendo en cuenta que los datos permiten formar el siguiente sistema de ecuaciones. Como se conoce el valor de la función desconocida en dos puntos y además, a partir de la solución general de la ecuación diferencial también se conoce la forma de dicha función desconocida, partiendo de [45] se forma el sistema

$$\left.\begin{aligned} x(0) &= 8\cdot 0^2-4\cdot 0^3+C_1\cdot 0+C_2 = 2 \\ x(1) &= 8\cdot 1^2-4\cdot 1^3+C_1\cdot 1+C_2 = 7 \end{aligned}\right\} \qquad [51]$$

donde las incógnitas son las constantes arbitrarias, que a partir de la condición que deben cumplir para verificar el sistema dejan de ser arbitrarias. Es decir que queda

$$\left.\begin{aligned} C_2 &= 2 \\ 8-4+C_1+C_2 &= 7 \end{aligned}\right\} \qquad [52]$$

de donde

$$\left.\begin{aligned} C_2 &= 2 \\ C_1 &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad [53]$$

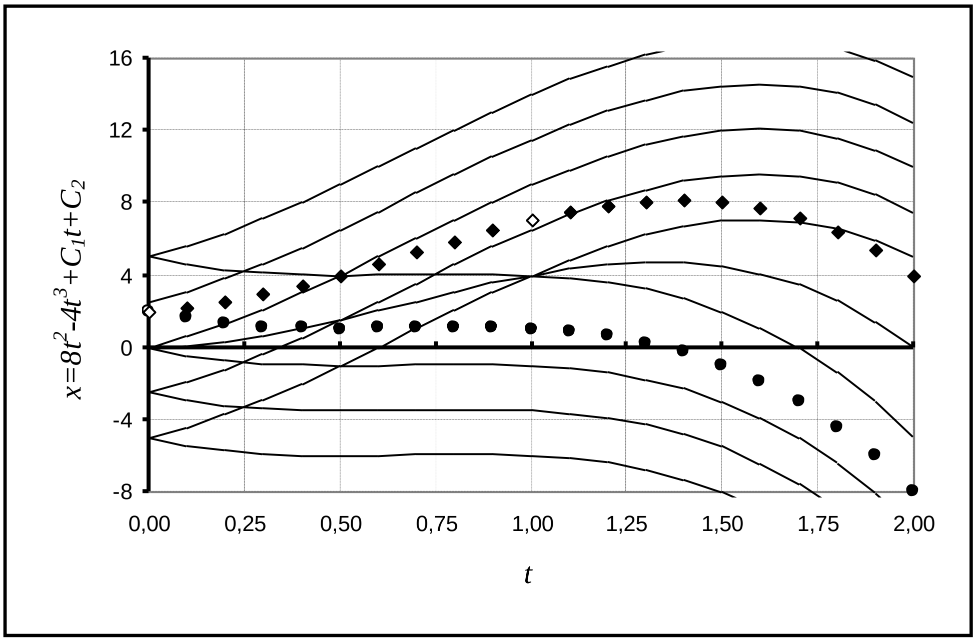
Reemplazando en [45] queda

$$\boxed{x(t) = 8t^2-4t^3+t+2} \qquad [54]$$

que es la solución particular buscada.

En la Figura 5 se puede apreciar un análisis gráfico del problema. Cada curva representada pertenece a la familia de curvas correspondiente a la ecuación [45], o sea, a la solución general de la ecuación diferencial dada [41].

Figura 5



Cada combinación de valores de las constantes arbitrarias C_1 y C_2 genera una curva. Cada una de esas curvas satisface la ecuación [41].

En particular se destacan dos de dichas curvas en el gráfico.

Una, identificada con marcadores circulares que representa la solución particular del punto (b). Obsérvese que para $t = 0$ el valor de x es igual a 2. También nótese que la curva decrece justo a partir del tiempo $t = 0$, lo que concuerda con un valor negativo de la velocidad inicial, que justamente está dada por la derivada del desplazamiento respecto del tiempo, negativa, para $t = 0$.

La otra, identificada con marcadores con forma de rombo, que representa la solución particular del punto (c). Obsérvese que para $t = 0$ el valor de x también es igual a 2. Asimismo, la curva pasa por el punto $(1;7)$ satisfaciendo la segunda condición de frontera que indica el enunciado del problema.

<u>*Ejemplo 15:*</u>

Sea la ecuación diferencial

$$y' = \cos x \qquad [55]$$

determinar (a) su solución general y representarla gráficamente; (b) una solución particular que pase por el punto $(\pi/2;1)$; (c) una solución particular que pase por el punto $(-\pi/2;-2)$; (d) una solución particular que pase por los puntos $(\pi/2;1)$ y $(-\pi/2;0)$; (e) una solución particular que satisfaga las siguientes condiciones iniciales: $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$; (f) investigar si existe alguna solución singular.

<u>*Resolución:*</u>

Para el punto (a), integrando [55]

$$\int dy = \int \cos x \; dx$$

resulta

$$\boxed{y = \operatorname{sen} x + C} \qquad [56]$$

que es la solución general de [55]. Su representación gráfica es la de la Figura 6.

Para el punto (b), se determina el valor de C a partir de [56] considerando la condición dada, es decir

$$y(x) = \operatorname{sen} x + C$$

$$y(\pi/2) = \operatorname{sen} \pi/2 + C$$

como

$$y(\pi/2) = 1$$

resulta

$$\operatorname{sen} \pi/2 + C = 1$$

$$1 + C = 1$$

o sea

$$C = 0$$

por lo que resulta

$$\boxed{y = \operatorname{sen} x} \qquad [57]$$

la solución particular buscada. Se la identifica en la Figura 6 con marcadores cuadrados.

Para el punto (c), también se determina el valor de C a partir de [56] considerando la condición dada, es decir

$$y(x) = \operatorname{sen} x + C$$

$$y(-\pi/2) = \operatorname{sen}(-\pi/2) + C$$

como

$$y(-\pi/2) = -2$$

resulta

$$\operatorname{sen}(-\pi/2) + C = -2$$

$$-1 + C = -2$$

o sea

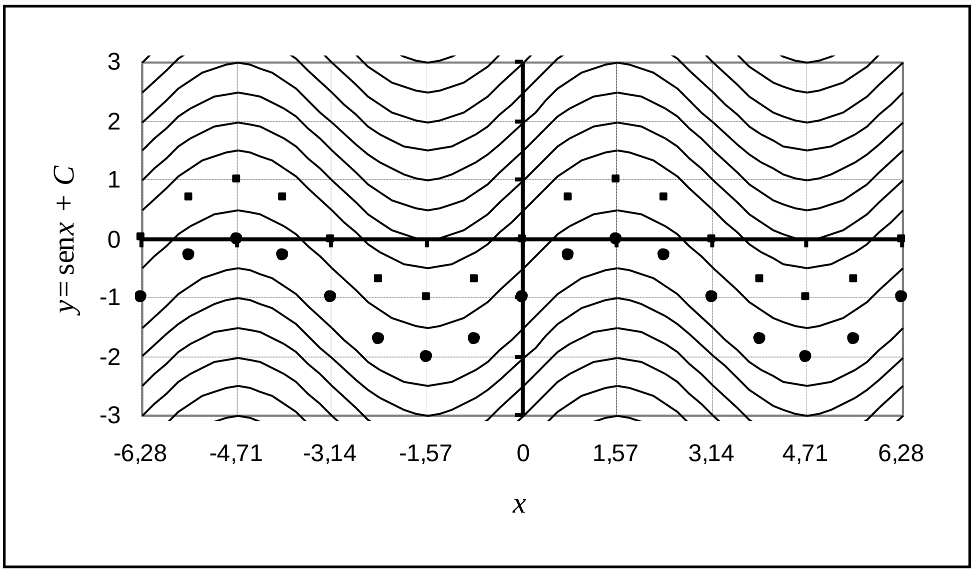
$$C = -1$$

por lo que resulta

$$\boxed{y = \operatorname{sen} x - 1} \qquad [58]$$

la solución particular buscada, que se representa en la Figura 6 con marcadores circulares.

Figura 6



Para el punto (d) se deben considerar dos condiciones que [56] debe cumplir simultáneamente, es decir que se debe satisfacer el sistema

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen} \pi/2 + C = 1 \\ \operatorname{sen}(-\pi/2) + C = 0 \end{array}\right\}$$

o sea

$$\left.\begin{array}{l} 1 + C = 1 \\ -1 + C = 0 \end{array}\right\}$$

que no se satisface para ningún valor de C, por lo que se concluye que no existe ninguna solución particular que cumpla las condiciones del punto (d) o, dicho de otra forma, que no existe ninguna función que pase por los puntos $(\pi/2;1)$ y $(-\pi/2;0)$ y al mismo tiempo satisfaga la ecuación diferencial.

Para encarar el punto (e), de la misma forma se debe plantear el par de condiciones como un sistema, que en este caso resultan, como $y'(x) = \cos x$

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen} 0 + C = 0 \\ \cos 0 = 0 \end{array}\right\}$$

Como se ve, ningún valor de C será tal que se satisfagan simultáneamente las dos ecuaciones, ya que la segunda de ellas nunca será una identidad. De manera que se concluye que no existe ninguna solución particular que cumpla las condiciones del punto (e) o, dicho de otra forma, que no existe ninguna función que pase por el punto $(0;0)$, tenga derivada nula cuando $x = 0$ y al mismo tiempo satisfaga la ecuación diferencial.

Para el punto (f), se debe decir que del análisis del gráfico que se presenta en la Figura 6 no surge ninguna evidencia que haga suponer la existencia de una solución singular.

3.2. Observación de las soluciones

El análisis de los ejemplos 13, 14 y 15 debe hacernos reflexionar en profundidad sobre el significado y el alcance de las soluciones de una ecuación diferencial.

En los tres casos se ha podido determinar respectivamente una única solución general, que se han representado gráficamente como familias de curvas. Cada curva de estas familias satisfacen a las correspondientes ecuaciones diferenciales.

En los tres casos se diferencian las características de dichas familias. Mientras que en el Ejemplo 13 por algunos puntos del plano pasan dos curvas de la familia, en el Ejemplo 14 por todos y cada uno de los puntos del semiplano t^{+} plano pasan infinitas curvas de la familia, mientras que en el Ejemplo 15, por cada punto del plano pasa una sóla curva de la familia.

Esta circunstancia está ligada directamente con la forma de la ecuación diferencial y es conveniente descubrir cuál es esa relación. Se buscaron soluciones particulares, que sólo fueron encontradas en la medida que existió cierta correspondencia entre las condiciones impuestas y la forma de la ecuación diferencial o, en definitiva, de su solución general.

En el Ejemplo 15 se puede apreciar que no se pueden establecer condiciones arbitrariamente, sino que estas condiciones deben guardar relación con los *grados de libertad* de la solución general.

Por último, determinar una solución singular es una tarea de investigación más que de operación. En general este tipo de soluciones no presentan utilidad analítica, desde el punto de vista de la ingeniería, pero se debe notar su existencia.

4. Bases para una clasificación general de las ecuaciones diferenciales

4.1. Cantidad de ecuaciones y funciones desconocidas

En principio se consideran dos categorías desde este punto de vista.

En la primera se agrupan aquellas ecuaciones que contienen una –y sólo una– función desconocida. Se las llama simplemente *ecuaciones diferenciales con una función incógnita.*

En la segunda se incluyen aquellas ecuaciones que forman parte de un sistema de al menos dos ecuaciones diferenciales, en el que aparecen al menos dos funciones desconocidas. Se dirá entonces que estas ecuaciones diferenciales se presentan formando un *sistema de n ecuaciones diferenciales con m funciones incógnitas*.

4.2. Cantidad de variables de las que depende cada función desconocida

Si la o las funciones desconocidas dependen de una -y sólo una- variable independiente, la ecuación diferencial se clasifica como *ecuación diferencial ordinaria* o, en correspondencia, el sistema de ecuaciones diferenciales se clasifica como *sistema de n ecuaciones diferenciales ordinarias con m funciones incógnitas.*

Si la función desconocida depende de más de una variable independiente, la ecuación diferencial se clasifica como *ecuación diferencial en derivadas parciales* o, en correspondencia, el sistema de ecuaciones diferenciales se clasifica como *sistema de n ecuaciones diferenciales en derivadas parciales con m funciones incógnitas*.

4.3. Orden de la ecuación diferencial

Es el orden de la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación diferencial. Una ecuación diferencial ordinaria de orden n es aquella en la cual la derivada enésima de la función desconocida, es decir

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n} \qquad [59]$$

es la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación diferencial.

Ejemplo 16:

Clasificar las ecuaciones diferenciales de la Tabla 1 en relación con los parámetros analizados en los puntos 4.1., 4.2. y 4.3.

Resolución:

Se expresa en la Tabla 1

Tabla 1

Expresión	Datos complementarios relativos a la o las funciones desconocidas	Clasificación
$x^2 y''' y' + 2e^x y'' = \left(x^2+2\right)\cdot y^2$	$y = y(x)$	Ecuación diferencial ordinaria de tercer orden.
$\frac{\partial z}{\partial x} + x\cdot z^2 - y\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$	$z = z(x,y)$	Ecuación diferencial en derivadas parciales de segundo orden.
$\left.\begin{matrix} y\cdot y' - x\cdot z = 1 \\ x^2\cdot z'' - y = 0 \end{matrix}\right\}$	$\left.\begin{matrix} y = y(x) \\ z = z(x) \end{matrix}\right\}$	Sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias con dos funciones incógnitas. La primera es de primer orden, mientras que la segunda es de segundo orden.
$\left.\begin{matrix} u\cdot v - \partial u/\partial x = y^2 \\ \sqrt{u\cdot v} + \partial v/\partial y = x\cdot y \end{matrix}\right\}$	$\begin{matrix} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{matrix}$	Sistema de dos ecuaciones diferenciales en derivadas parciales con dos funciones incógnitas

4.4. Condición de linealidad y homogeneidad en las ecuaciones diferenciales

Una ecuación diferencial ordinaria de orden n toma la forma general

$$f\left(x, y, y', \cdots, y^{(n)}\right) = 0 \qquad [60]$$

entendiendo que no necesariamente aparecen en la ecuación las derivadas de menor orden de y, la propia función desconocida y o la variable independiente x.

La ecuación diferencial [60] es lineal si puede escribirse en la forma

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)\, y' + p_0(x)\, y = r(x) \qquad [61]$$

donde tanto $p_0, p_1, \cdots, p_{n-1}$, que se denominan *coeficientes* de la ecuación diferencial lineal, como $r(x)$, en el miembro de la derecha de la ecuación diferencial, son funciones cualesquiera de la variable independiente x.

Cualquier ecuación diferencial ordinaria de orden n que no pueda ser escrita de la forma [61], se denomina *no lineal*.

En particular, si $r(x) \equiv 0$, la ecuación diferencial [61] toma la forma

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)\, y' + p_0(x)\, y = 0 \qquad [62]$$

y recibe el nombre de *homogénea*. Si $r(x)$ no es idénticamente cero, la ecuación diferencial se denomina *no homogénea*.

De la misma manera que para el caso de las ecuaciones diferenciales ordinarias, se dice que una ecuación diferencial en derivadas parciales es lineal si se trata de una ecuación de primer grado en la función desconocida y en sus derivadas parciales.

Si cada uno de los términos de la ecuación diferencial contiene ya sea a la variable dependiente o a alguna de sus derivadas, se dice que la ecuación es *homogénea*, si no es el caso, se trata de una ecuación *no homogénea*.

Ejemplo 17:

Clasificar las ecuaciones diferenciales de la Tabla 2 en relación con las características de linealidad y homogeneidad

Resolución

Tabla 2

Expresión	Datos complementarios relativos a la o las funciones desconocidas	Clasificación
$x^2 y' + 2e^x y'' = \left(x^2+2\right)\cdot y$	$y = y(x)$	Ecuación diferencial ordinaria lineal homogénea de segundo orden.
$\dfrac{\partial z}{\partial x} + x^3 \cdot z - y \cdot \dfrac{\partial^3 z}{\partial y^3} + x \cdot y = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$	$z = z(x,y)$	Ecuación diferencial en derivadas parciales lineal no homogénea de tercer orden.
$x^2 y' + 2e^x y'' = \left(x^2+2\right)\cdot \cos y$	$y = y(x)$	Ecuación diferencial ordinaria no lineal de segundo orden.
$y \cdot y' = x$	$y = y(x)$	Ecuación diferencial ordinaria no lineal de primer orden.

4.5. Clasificación de las soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias

Problema más general

Se requiere determinar la solución general de la ecuación diferencial, es decir una función que incluye constantes arbitrarias y que representa a una familia de curvas en la que todas y cada una de las curvas satisfacen la ecuación diferencial dada, sobre un dominio determinado de la variable independiente.

Problema con valores o condiciones iniciales

Se requiere determinar cuál o cuáles funciones, a partir de la solución general, satisfacen la ecuación diferencial dada, sobre un dominio determinado de la variable independiente, y, además tomen ciertos valores, y eventualmente sus derivadas, para un valor dado de la variable independiente.

Dicho de otra forma, se busca una solución particular que pase por un punto seleccionado del plano xy, en el cual, adicionalmente, se puede exigir que sus derivadas tomen valores establecidos previamente.

Problema con valores o condiciones de frontera

Se requiere determinar cuál o cuáles funciones, a partir de la solución general, satisfacen la ecuación diferencial dada, sobre un dominio determinado de la variable independiente y, además tomen ciertos valores para valores correspondientes dados de la variable independiente.

Dicho de otra forma, se busca una solución particular que pase por algunos puntos seleccionados del plano xy.

5. Relación entre orden, constantes arbitrarias y condiciones particulares

Dada una ecuación diferencial ordinaria, su solución general surge de la integración sucesiva de las derivadas de la función desconocida, o bien de algún procedimiento que si bien aparece como una alternativa a la acción de integrar, sólo la disimula.

En consecuencia, el número correspondiente al orden de la ecuación diferencial es el mismo número de constantes arbitrarias que aparecerán en la solución general.

Para determinar estas constantes y encontrar una solución particular, será necesario un número de condiciones, ya sea iniciales o de contorno. Este número será igual al número de constantes a determinar, ya que cada condición da lugar a una ecuación, para formar así un sistema de ecuaciones algebraicas con la misma cantidad de ecuaciones que incógnitas. Una vez eliminadas las constantes arbitrarias, la función desconocida no incluye constantes arbitrarias. En la siguiente tabla se presenta un esquema de esta situación.

Tabla 3

Esquema relacional entre orden, constantes arbitrarias y condiciones particulares para ecuaciones diferenciales ordinarias					
Orden de la ecuación diferencial	Forma genérica de la ecuación diferencial	Forma genérica de la solución general	Condiciones dadas necesarias para obtener una solución particular		Forma genérica de la solución particular
			Iniciales	De frontera	
1	$f(x,y,y')=0$	$g(x,y,C_1)=0$	$y(x_0)=y_0$	$y(x_0)=y_0$	$h(x,y)=0$
2	$f(x,y,y',y'')=0$	$g(x,y,C_1,C_2)=0$	$\left.\begin{array}{r} y(x_0)=y_0 \\ y'(x_0)=A_1 \end{array}\right\}$	$\left.\begin{array}{r} y(x_0)=y_0 \\ y(x_1)=y_1 \end{array}\right\}$	$h(x,y)=0$
3	$f(x,y,y',y'',y''')=0$	$g(x,y,C_1,C_2,C_3)=0$	$\left.\begin{array}{r} y(x_0)=y_0 \\ y'(x_0)=A_1 \\ y''(x_0)=A_2 \end{array}\right\}$	$\left.\begin{array}{r} y(x_0)=y_0 \\ y(x_1)=y_1 \\ y(x_2)=y_2 \end{array}\right\}$	$h(x,y)=0$
n	$f(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$	$g(x,y,C_1,\cdots,C_n)=0$	$\left.\begin{array}{r} y(x_0)=y_0 \\ y'(x_0)=A_1 \\ \cdots=\cdots \\ y^{(n-1)}(x_0)=A_{n-1} \end{array}\right\}$	$\left.\begin{array}{r} y(x_0)=y_0 \\ y(x_1)=y_1 \\ \cdots=\cdots \\ y(x_{n-1})=y_{n-1} \end{array}\right\}$	$h(x,y)=0$

5.1. Existencia y unicidad de las soluciones

Dada una ecuación diferencial ordinaria y un juego de condiciones iniciales o de valores de frontera, en rigor pueden darse tres situaciones: (a) el problema no tiene solución. (b) el problema tiene precisamente una solución, (c) el problema tiene más de una solución.

Para la mayoría de las ecuaciones diferenciales existen soluciones únicas que satisfacen ciertas condiciones especificadas. Sin embargo, hay casos en los que la solución no existe.

Los teoremas de existencia y unicidad de las soluciones establecen condiciones suficientes que, si son satisfechas por una ecuación diferencial, garantizan que tenga sentido encarar la resolución de un problema.

A título de ejemplo, y como para interpretar su significado general, se desarrollan algunos enunciados de estos teoremas, para casos particulares.

5.2. El problema de la existencia de alguna solución

¿Bajo qué condiciones una ecuación diferencial ordinaria (EDO) presentada como un problema con valores iniciales o con condiciones de frontera tiene al menos una solución?

Teorema 1: Existencia de la solución particular de una EDO de primer orden

Sean

$$\left.\begin{array}{r} y'=F(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{array}\right\} \qquad [63]$$

es decir un problema con valores iniciales o condiciones de frontera (que para el caso de ecuaciones diferenciales de primer orden es idéntico).

Entonces se tiene que si $F(x,y)$ es continua en todos los puntos (x,y) dentro de un rectángulo R: $|x-x_0|<a$, $|y-y_0|<b$ y acotada en R, o sea $|F(x,y)|\le K\ \ \forall\,(x,y)\in R$, el problema con valores iniciales [63] tiene al menos una solución $y(x)$. Esta solución está definida al menos para todos los valores de x dentro del intervalo $|x-x_0|<\alpha$, donde α es el menor entre los números a y b/K.

Ejemplo 18:

Considere la ecuación diferencial $y' = 1+y^2$ sujeta a la condición $y(0)=0$. a) ¿Existe al menos una solución en la región R: $|x|<5 \wedge |y|<3$? b) ¿Para qué valores de x está definida, de existir dicha solución?

Resolución:

Apartado a): de acuerdo al Teorema 1 se debe analizar la función $F(x,y)=1+y^2$ en relación con su continuidad dentro de la región R y respecto de si es acotada en esta misma región.

En primer lugar, la función no presenta puntos de discontinuidad en la región que se analiza, por lo que se debe concluir en que es una función continua en R. Por otra parte, se tiene que, dentro de la región, $|F(x,y)| = |1+y^2| \le K = 10$, o sea que es una función acotada.

De este estudio, se concluye que el problema de valores iniciales [63] tiene al menos una solución. Se verán las expectativas sobre si dicha solución estará definida en todos los puntos de la la región R.

Apartado b): de acuerdo al Teorema 1, se debe definir el valor de α, que define el intervalo $|x-x_0|$ en el que la solución que existe está definida. Para establecerlo, se necesitan explicitar los valores a, b, K del Teorema 1, que en este caso resultan ser $a=5$, $b=3$ y $K=10$.

Como el valor de $b/K = 3/10 = 0{,}3$ es menor que el de $a=5$, el valor de α queda definido por el primero, es decir $\alpha = 0{,}3$.

Esto garantiza que la solución, que existe según se resolvió en el apartado a), está definida en el intervalo $|x-x_0|<0{,}3$.

Para interpretar adecuadamente este resultado, se puede analizar concretamente la solución.

Para resolver $y' = 1+y^2$ se puede proceder de la siguiente manera:

$$\frac{dy}{dx} = 1+y^2$$

$$\frac{dy}{1+y^2} = dx$$

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int dx$$

$$\text{arc tg } y = x + C$$

es decir que la solución general de la ecuación diferencial dada es $y = \text{tg}(x+C)$. Para cumplir con la condición $y(0)=0$, resulta evidente que debe ser $C=0$. Por lo tanto la solución particular, que según el Teorema 1 existe y está definida en el intervalo $|x-x_0|<0{,}3$ es $y=\text{tg}\,x$.

Y en efecto, la función $y=\text{tg}\,x$ presenta un problema de discontinuidad en $x=\pm\pi/2$, es decir que la solución particular que existe no está, en este caso, definida para todos los valores de la variable independiente contenidos en la región original, donde la derivada de la función desconocida es continua, sino que dicho intervalo está restringido.

Por otra parte, se puede considerar exagerada esta restricción, pero se recuerda que el Teorema 1 garantiza que la función solución está definida bajo determinadas condiciones. Fuera de ellas, la solución puede (o no) estar definida.

5.3. El problema de la unicidad de la solución

¿Bajo qué condiciones una ecuación diferencial ordinaria (EDO) presentada como un problema con valores iniciales o con condiciones de frontera tiene como máximo una solución?

Teorema 2: Unicidad de la solución particular de una EDO de primer orden

Sean

$$\left.\begin{aligned} y' &= F(x,y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}\right\} \qquad [64]$$

es decir un problema con valores iniciales o condiciones de frontera (que para el caso de ecuaciones diferenciales de primer orden es idéntico).

Entonces se tiene que si $F(x,y)$ y $\partial F/\partial y$ son continuas en todos los puntos (x,y) en un rectángulo R: $|x-x_0|<a,\ |y-y_0|<b$ y acotadas en R, o sea $|F(x,y)| \le K\ \forall\ (x,y) \in R$, y $|\partial F/\partial y| \le M\ \ \forall\ (x,y) \in R$ el problema con valores iniciales [64] tiene como máximo una solución $y(x)$.

Entonces, de acuerdo al Teorema 1, tiene además precisamente una solución.

Ejemplo 19:

Considere la ecuación diferencial del Ejemplo 3, $y' = 1 + y^2$ sujeta a la condición $y(0) = 0$, y haga el análisis para la misma región R. ¿La solución hallada es la única solución?

Resolución:

Aplicando el Teorema 2, y habiendo analizado en el Ejemplo 18 la caracterización de $F(x,y)$ como una función continua y acotada en R, queda por establecer la continuidad y el carácter de acotada de la función $\partial F/\partial y$, que en este ejemplo resulta $\partial F/\partial y = 2y$.

Esta función es evidentemente continua para todos los valores de y pertenecientes a R. Por otra parte, para determinar si es acotada, se procede

$|\partial F/\partial y| = 2|y| \le M = 6$

De esta manera se puede establecer que se cumplen las condiciones suficientes para la condición de unicidad de la solución.

Ejemplo 20:

Sea el problema de valores iniciales

$$\left.\begin{aligned} (y')^2 - x \cdot y' + y &= 0 \\ y(0) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad [65]$$

considerado en el Ejemplo 13. Determinar: (a) la existencia y (b) la unicidad de la solución particular. Considerar para el análisis la región R definida por $|x| < 2$ e $|y| < 1$.

Resolución:

En este caso, se debe previamente deducir explícitamente $y' = F(x,y)$, ya que en el ejemplo se presenta en forma implícita. Para ello, se resuelve la ecuación cuadrática en y' resultando:

$$\left.\begin{aligned} y' &= F_1(x,y) = (1/2)\cdot\left(x+\sqrt{x^2-4y}\right) \\ y' &= F_2(x,y) = (1/2)\cdot\left(x-\sqrt{x^2-4y}\right) \end{aligned}\right\} \quad [66]$$

Para establecer la existencia de la solución se debe comprobar la continuidad de F_1 y de F_2 en R, y además que F_1 y F_2 estén acotadas en R.

De las ecuaciones [66] surge que mientras sea $y < x^2/4$ las funciones estarán definidas en R, y son continuas. Por otra parte, dentro de R se tiene que

$$\left.\begin{aligned} \left|F_1(x,y)\right| &= \left|(1/2)\cdot\left(x+\sqrt{x^2-4y}\right)\right| \le K_1 = 1+\sqrt{2} \\ \left|F_1(x,y)\right| &= \left|(1/2)\cdot\left(x+\sqrt{x^2-4y}\right)\right| \le K_1 = 1+\sqrt{2} \end{aligned}\right\} \quad [67]$$

es decir, F_1 y F_2 están acotadas en R.

Queda establecida la existencia de al menos una solución del problema

Ahora se analizará si hay una única solución. Para ello se debe considerar si las funciones $\partial F_1/\partial y$ y $\partial F_2/\partial y$ son continuas y están acotadas en R.

Se determinan las derivadas, que resultan en

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial y} &= \frac{1}{\sqrt{x^2-4y}} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} &= -\frac{1}{\sqrt{x^2-4y}} \end{aligned}\right\} \quad [68]$$

Se observa que estas funciones no son continuas para todos los puntos de la región, ya que los denominadores se anulan si $y = x^2/4$ y, evidentemente, no están acotadas ya que toman valores tan grandes como se quiera en las proximidades de esta curva.

Esto significa que no existe una única solución. Justamente, cuando se analizó este problema en el Ejemplo 13, se halló una solución singular, de la forma

$$y = x^2/4 \quad [69]$$

por lo que por el punto $(x,y) = (0;0)$ pasan por lo menos dos soluciones, la singular [69] y la particular determinada a partir de la solución general, en el Ejemplo 13 que resulta ser la recta $y = 0$.

6. Comentarios para complementar el concepto de ecuación diferencial

6.1. Las ecuaciones algebraicas y las ecuaciones diferenciales

Cuando se plantea resolver el problema

$$3\cdot x = 9 \quad [70]$$

o el problema

$$u^2 + u - 2 = 0 \quad [71]$$

se entiende que se debe determinar el valor de x que satisface [70] o los valores de u que verifican [71]. En el primer caso $x = 3$ es la *solución* de la ecuación [70] mientras que en el segundo, $u = 1$ y $u = -2$ son *soluciones* de la ecuación [71].

Cuando se aborda el estudio de las *ecuaciones diferenciales,* se debe comprender que la incógnita deja de ser el valor desconocido que una variable debe tomar para transformar la ecuación en una identidad. La incógnita pasa a ser la forma que una *función desconocida* debe tomar para transformar la ecuación en una identidad.

Es decir, cuando se propone resolver, por ejemplo, $y' - y = \operatorname{tg} x$ se perseguirá hallar la forma que debe tener $y(x)$ de manera tal que al reemplazarla en la ecuación dada, ésta se satisfaga para todos los valores de la variable x.

Así como en los casos [70] y [71] pueden aparecer soluciones únicas o múltiples, dependiendo de la forma de la ecuación, existirá relación entre la forma de la ecuación diferencial y las características de las posibles soluciones.

Por otra parte, así como existen métodos para resolver ecuaciones algebraicas como las mostradas por [70] y [71], también se han desarrollado procedimientos para resolver algunos tipos de ecuaciones diferenciales.

Estos procedimientos se aplican según la clase de ecuación diferencial considerada, por lo que es necesario contar con una clasificación de las ecuaciones diferenciales. Para diseñar este catálogo es a su vez imprescindible definir características de las ecuaciones diferenciales que serán empleadas como parámetro de clasificación.

En principio, la mayoría de las ecuaciones diferenciales que históricamente se han aplicado para intentar analizar los procesos de la realidad a través de modelos matemáticos presentan soluciones únicas que satisfacen ciertas condiciones especificadas.

Sin embargo, conviene estar prevenido con relación a los problemas de existencia y unicidad de tales soluciones.

El ambiente teórico de este capítulo introdujo los conceptos básicos a tener en cuenta en el análisis de algunos tipos de ecuaciones diferenciales, por cierto los que se presentan con mayor frecuencia, para que tenga algún sentido encarar su resolución con una expectativa razonable.

Los siguientes temas presentan métodos de resolución de ecuaciones diferenciales que, justamente, tienen solución. Por ello, y pese de que de aquí en más todo es brillantemente *matemático*, no está demás tener presente que en la actividad real del usuario de las matemáticas, pueden aparecer problemas que no tienen solución.

En estos casos, el sentido común y la capacidad analógica situaciones serán, sin duda, las principales herramientas para llevar adelante la tarea.

7. Resolviendo ecuaciones diferenciales de primer orden

7.1. Métodos y procedimientos

Resolver una ecuación diferencial de primer orden es determinar su *solución general*.

Encontrar una función que satisfaga una ecuación diferencial de primer orden y que además pase por determinado punto del plano xy, es decir que también cumpla una determinada *condición inicial* significa resolver la ecuación y establecer qué función de la familia de la solución general es la que satisface las condiciones dadas, es decir, obtener la *solución particular*.

En este apartado se presentan métodos y procedimientos para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

Se establecerá, dada una clase de ecuación de primer orden, cual es el procedimiento sugerido para obtener una solución general y sus fundamentos.

A modo de práctica, en algunos ejemplos se incluirá además de la resolución de la ecuación la determinación de una o varias soluciones particulares.

También en determinados casos se indicarán los pasos a seguir para verificar los resultados que se obtienen.

7.2. Ecuaciones en las que las variables están separadas

Forma de la ecuación diferencial

$$g(y)\cdot y' = f(x) \qquad [72]$$

donde f y g son funciones continuas y acotadas en una región R: $|x - x_0| < a,\ \ |y - y_0| < b$.

Función desconocida

$$y(x) \qquad [73]$$

Solución general

Surge de

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx + C \qquad [74]$$

Procedimiento

Como $y' = dy/dx$, toda ecuación de la forma [72] se puede siempre escribir

$$g(y)\cdot dy = f(x)\cdot dx \qquad [75]$$

en la que las variables están separadas.

Para resolverla se integran ambos miembros con respecto a x, obteniendo

$$\int g(y)\frac{dy}{dx}dx = \int f(x)dx + C \qquad [76]$$

y operando en la primera integral, como

$$\frac{dy}{dx}dx = dy \qquad [77]$$

se obtiene [74]. [78]

Como f y g deben ser funciones continuas, las integrales existen y se pueden evaluar, obteniendo la solución general de [72].

<u>*Ejemplo 21:*</u>

Resolver la ecuación diferencial

$$y' + 5x^4y^2 = 0 \qquad [79]$$

y encontrar una solución particular que pase por el punto $(x,y) = (0,1)$.

<u>*Resolución:*</u>

a) Determinación de una solución general

Se comprueba que [79] es de la forma [72] haciendo

$$y' = -5x^4y^2$$

$$\frac{1}{y^2}\cdot y' = -5x^4 \qquad [80]$$

Resultando, de [80],

$$\left.\begin{aligned} g(y) &= \frac{1}{y^2} \\ f(x) &= -5x^4 \end{aligned}\right\} \qquad [81]$$

por lo que la solución general se obtiene aplicando [76] y resolviendo

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int -5x^4dx + C$$

lo que resulta en

$$-\frac{1}{y} = -x^5 + C$$

o bien

$$y = \frac{1}{x^5 - C} \qquad [82]$$

que es la solución *general buscada*.

Los pasos seguidos fueron extremadamente ortodoxos, lo cual es conveniente mientras no se esté familiarizado con el procedimiento.

Sin embargo este mismo problema se podría haber resuelto utilizando el criterio general del método, esto es, separar las variables e integrar, que lleva a idéntico resultado.

Es decir, si se considera la ecuación [79], se remplaza y' por su equivalente dy/dx y se separan las variables, se tiene que

$$\frac{dy}{y^2} = -5x^4 dx \qquad [83]$$

Integrando resulta

$$-\frac{1}{y} = -x^5 + C \qquad [84]$$

o su equivalente

$$y = \frac{1}{x^5 - C}$$

idéntico a [11]

b) Determinación de la solución particular y_p

La condición inicial $y(0) = 1$ aplicada en la solución general [82] implica que

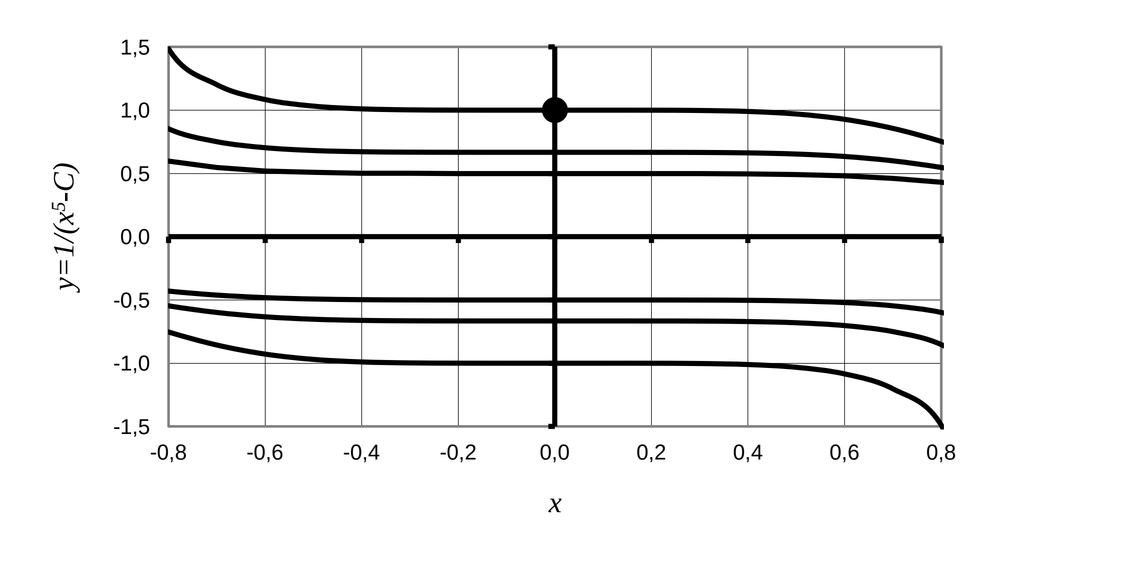
$$\left.\begin{aligned} y(0) &= \frac{1}{0^5 - C} \\ y(0) &= 1 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow C = -1 \qquad [85]$$

y que la solución particular es entonces

$$\boxed{y_p = \frac{1}{x^5 + 1}} \qquad [86]$$

En la Figura 7 se muestran algunas curvas pertenecientes a la solución general [82] y se destaca la solución particular, que pasa por el punto $(0;1)$.

Figura 7



Verificación de la solución general:

Derivando [82] se determina y', que resulta ser

$$y' = \frac{-5x^4}{\left(x^5 - C\right)^2} \qquad [87]$$

Se remplazan [82] y [87] en [79], para dar

$$y' + 5x^4 y^2 = \frac{-5x^4}{\left(x^5 - C\right)^2} + 5x^4 \frac{1}{\left(x^5 - C\right)^2} = 0$$

que satisface la ecuación diferencial dada.

Verificación de la solución particular:

Derivando [86] se determina y'_p, que resulta ser

$$y'_p = \frac{-5x^4}{\left(x^5+1\right)^2} \qquad [88]$$

Se remplazan [86] y [88] en [79], para dar

$$y'_p + 5x^4 y_p^2 = \frac{-5x^4}{\left(x^5-1\right)^2} + 5x^4 \frac{1}{\left(x^5-1\right)^2} = 0$$

que satisface la ecuación diferencial dada.

Para comprobar que la función cumple con la condición inicial, se calcula el valor que toma y_p cuando $x = 0$

$$y_p(0) = \frac{1}{1} = 1 \qquad [89]$$

que satisface la condición inicial.

7.3. Ecuaciones diferenciales de variables separables.

El caso de resolución de una ecuación diferencial ordinaria cuando las variables están separadas es el más sencillo. En ocasiones, si bien la ecuación diferencial no se presenta de tal manera, resulta posible, mediante sustituciones y operaciones algebraicas, formular la misma con sus variables ya separadas. En términos generales se dice que este tipo de ecuaciones diferenciales es de "variables separables".

No existen un número determinado de formas de ecuaciones diferenciales en las que se puedan separar las variables, ya que en distintas situaciones se pueden encontrar sustituciones adecuadas y, en algunos casos varias sustituciones combinadas, que llevan a obtener una ecuación diferencial, eventualmente con nuevas funciones desconocidas, de la forma [72] o similar. Como ejemplo, se muestra uno de los casos más simples en que, dada una ecuación diferencial donde las variables no se presentan separadas, se puede operar de manera de separarlas.

Forma de la ecuación diferencial

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right) \qquad [90]$$

donde g es una función continua y acotada en una región R: $\left|x - x_0\right| < a,\ \left|y - y_0\right| < b$. Como ejemplo de este caso se pueden mencionar $g\left(\frac{y}{x}\right) = \left(y/x\right)^3$ o $g\left(\frac{y}{x}\right) = sen\left(y/x\right)$.

Función desconocida

$$y(x) \qquad [91]$$

Solución general

Surge de

$$\int \frac{du}{g(u)-u}\, du = \int \frac{dx}{x} + C \qquad [92]$$

Para obtener finalmente la función desconocida $y = u \cdot x$

Procedimiento

En [90] se establece la sustitución $\begin{cases} y/x = u \\ y = x \cdot u \\ y' = u + x \cdot u' \end{cases}$ [93]

reemplazando [93] en [90], se tiene

$$u + x \cdot u' = g(u) \qquad [94]$$

en la que se pueden separar las variables, haciendo

$$u + x \cdot \frac{du}{dx} = g(u) \qquad [95]$$

para obtener

$$\frac{du}{g(u) - u} = \frac{dx}{x} \qquad [96]$$

Integrando ambos miembros de [96] y reemplazando u por y/x se obtiene la solución general de [90]

Ejemplo 22:

Resolver la ecuación diferencial $y' = \frac{y}{x} + \frac{2x^3 \cos(x^2)}{y}$ [97]

y encontrar una solución particular que pase por el punto $(x, y) = (\sqrt{\pi}, 0)$.

Resolución

Aplicando en [97] las sustituciones [93], la ecuación queda

$$x \cdot u' + u = u + \frac{2x^2 \cos(x^2)}{u}, \qquad [98]$$

y simplificando [98], resulta

$$u \cdot u' = 2x \cos(x^2) \qquad [99]$$

ó

$$u \cdot du = 2x \cos(x^2) dx \qquad [100]$$

e integrando [100] se obtiene

$$\tfrac{1}{2} u^2 = \operatorname{sen}(x^2) + C \qquad [101]$$

Como $u = y/x$, se tiene que la solución general es

$$y = x \cdot \sqrt{2 \operatorname{sen}(x^2) + 2C} \qquad [102]$$

Por último, aplicando las condiciones iniciales del problema, se determina $C = 0$ y la solución particular es

$$y = x \cdot \sqrt{2 \operatorname{sen}(x^2)} \qquad [103]$$

7.4. Ecuaciones diferenciales lineales

Las ecuaciones diferenciales lineales se presentan con frecuencia en la práctica debido a que muchos problemas su pueden representar matemáticamente a través de ellas.

Por este motivo resulta de interés su estudio y contar con un método directo para su resolución.

Forma de la ecuación diferencial

Una ecuación diferencial de primer orden es lineal si puede ser escrita de la forma

$$y' + P(x) \cdot y = Q(x) \qquad [104]$$

Esta ecuación es lineal tanto en y como en y'. P y Q son funciones cualesquiera de x, continuas y acotadas en una región $R: |x - x_0| < a$.

Si el miembro de la derecha $Q(x)$ es cero para todo valor de x en el intervalo considerado (es decir $Q(x) \equiv 0$), se dice que la ecuación es homogénea. En caso contrario, la ecuación recibe el nombre de no homogénea o completa.

En consecuencia, la ecuación diferencial primer orden lineal y homogénea es de la forma

$$u' + P(x) \cdot u = 0 \qquad [105]$$

en la que se emplea $u(x)$ para representar a la función desconocida. De esta manera se hace notar la diferencia entre ella y la función $y(x)$ de la ecuación [104].

Si bien ambas están asociadas a través de $P(x)$, se debe hacer notar que no se trata de la misma función. Una debe ser solución de [104] y la otra de [105].

Función desconocida

En [104] $y(x)$; en [105] $u(x)$

Solución general de [105]

$$u = C\, e^{-\int P(x)\, dx} \qquad [106]$$

Solución general de [104]

$$y = C\, e^{-\int P(x)\, dx} + e^{-\int P(x)\, dx} \cdot \int Q(x)\; e^{\int P(x)\, dx}\; dx \qquad [107]$$

Demostración de [106]

Se determinará la solución general para la ecuación [105] para un intervalo I dentro del cual P y Q se suponen continuas. La solución se obtiene separando las variables:

$$\frac{du}{u} = -P(x) \cdot dx \qquad [108]$$

e integrando

$$\ln|u| = -\int P(x)\, dx + C^* \qquad [109]$$

Haciendo $C = e^{C^*}$ cuando $y > 0$ y $C = -e^{C^*}$ cuando $y < 0$ y operando se tiene la solución general

$$u = C\, e^{-\int P(x) dx} \qquad [110]$$

Tomando $C = 0$ se obtiene la solución trivial $y \equiv 0$.

Demostración de [107]

Para la ecuación no homogénea $y' + P(x) \cdot y = Q(x)$, la solución se obtiene proponiendo la sustitución de Lagrange

$$y(x) = u(x) \cdot v(x) \qquad [111]$$

en la que $u(x)$ es cualquier solución particular de [106] y $v(x)$ es una función a determinar de modo que $y(x)$ satisfaga [104].

Derivando [111] $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$ y reemplazando en [104], resulta

$$u' \cdot v + u \cdot v' + P(x) \cdot u \cdot v = Q(x) \qquad [112]$$

agrupando

$$u \cdot v' + v \cdot [u' + P(x) \cdot u] = Q(x) \qquad [113]$$

la expresión entre corchetes es nula, ya que por hipótesis se condicionó a $u(x)$ de manera que satisfaga $u' + P(x) \cdot u = 0$, por lo que [113] resulta en

$$u \cdot \frac{dv}{dx} = Q(x) \qquad [114]$$

Como $u(x)$ es cualquier solución particular de [106] y la solución general de [106] es $u = C\, e^{-\int P(x)\, dx}$, la solución particular más sencilla y que se propone a los efectos de establecer una fórmula para determinar la solución general de [104] es

$$u = e^{-\int P(x) dx} \qquad [115]$$

Reemplazando [115] en [114] y operando, se tiene

$$dv = Q(x) \cdot e^{\int P(x) dx} \cdot dx \qquad [116]$$

Integrando [116]

$$v = \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} \cdot dx \quad + \quad C \qquad [117]$$

y empleando [111] , [115] y [116], se tiene

$$y = e^{-\int P(x)dx} \cdot \left[\int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} \cdot dx \quad + \quad C \right] \qquad [118]$$

de modo que la solución general de [104] se puede expresar

$$y = C \cdot e^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx} \cdot \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} \cdot dx \qquad [119]$$

Ejemplo 23:

Resolver la ecuación diferencial $\quad y' - y \cdot \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$ [120]

y encontrar una solución particular que pase por el punto $(x, y) = (0,0)$.

Resolución:

Analizando [120], resulta ser una ecuación diferencial ordinaria de primer orden lineal no homogénea, donde $P(x) = -\operatorname{tg} x = -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ y $Q(x) = \frac{1}{\cos x}$.

La fórmula [47], que permite determinar la solución general de [48] se puede plantear de la siguiente forma:

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left[\int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} dx + C \right] \qquad [121]$$

Se determinan los valores de los exponentes de e

$$\int P(x)\, dx = \int -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\, dx = \ln \cos x \qquad [122]$$

y, remplazando en [121], resulta

$$y = e^{-\ln \cos x} \left[\int \frac{1}{\cos x} \cdot e^{\ln \cos x} dx + C \right] \qquad [123]$$

Resolviendo [123] se obtiene la solución general de la ecuación diferencial:

$$y = \frac{x + C}{\cos x} \qquad [124]$$

Para encontrar la solución particular que satisfaga las condiciones iniciales, es decir una solución que pertenezca a la familia [124] y que, a su vez cumpla que $y(0) = 0$, se aplican estos valores iniciales a [124] para encontrar el valor de C:

$$0 = \frac{0 + C}{\cos 0} = C \qquad [125]$$

por lo que la solución particular buscada es

$$y = \frac{x}{\cos x} \qquad [126]$$

7.5. Ecuaciones diferenciales reducibles a lineales. Un ejemplo

Ejemplo 24:

Resolver la ecuación diferencial $\quad x\, y' + y = x^4 y^3$ [127]

y encontrar una solución particular que pase por el punto $(x, y) = (0,0)$.

Este problema se propone para mostrar cómo, aún cuando la ecuación diferencial que se debe resolver no se clasifique en alguna de las formas cuyas soluciones se conocen, se puede intentar reducirla a alguno de los dos casos vistos: separación de variables o aplicación de las fórmulas para ecuaciones lineales.

<u>Resolución:</u>

Analizando [127], resulta ser una ecuación diferencial ordinaria de primer orden no lineal y no homogénea. Como no es posible separar las variables ni se puede aplicar la fórmula [107], se intentará reducir el caso a alguno de los conocidos.

Para ello, se propone el siguiente esquema de sustituciones:

$$u = \frac{1}{y^2} \qquad [128]$$

$$u' = -\frac{2}{y^3} y' \qquad [129]$$

Remplazando [129] en [127] resulta:

$$-\frac{1}{2} x \cdot y^3 u' + y = x^4 y^3 \qquad [130]$$

Dividiendo [58] miembro a miembro por y^3, se tiene:

$$-\frac{1}{2} x u' + \frac{1}{y^2} = x^4 \qquad [131]$$

Por último, dividiendo por $-\frac{1}{2}x$ ambos miembros de [131] y

$$u' - \frac{2}{x} u = -2x^3 \qquad [132]$$

La ecuación diferencial [132] es de la forma [104] en u, por lo que se puede aplicar la fórmula [119], llegando a

$$u = e^{2\int \frac{dx}{x}} \left[\int -2x^3 \cdot e^{-2\int \frac{dx}{x}} \, dx \quad + \quad C \right] = e^{2\ln x} \left[\int -2x^3 \cdot e^{-2\ln x} \, dx \quad + \quad C \right]$$

$$u = x^2 \int -2x \, dx + C$$

$$u = x^2 \left(-x^2 + C \right) \qquad [133]$$

y como $u = \frac{1}{y^2}$, resulta finalmente la solución general:

$$y = \sqrt{\frac{1}{x^2 (C - x^2)}} \quad \text{y} \quad y = -\sqrt{\frac{1}{x^2 (C - x^2)}}, \text{ con } C > x^2 \qquad [134]$$

Es oportuno aclarar que una ecuación diferencial de la forma dada en este ejemplo,

$$y' + P(x) \cdot y = Q(x) \cdot y^a \qquad [135]$$

con a real, distinto de $0 \vee 1$, se conoce como "ecuación de Bernoulli", debido a que este investigador propuso un procedimiento estándar para su resolución:

Sea

$$y' + P(x) \cdot y = Q(x) y^a \qquad [135]$$

en la que a es un número real, distinto de 0 y de 1. Cuando a es 0 ó 1, la ecuación [135] se convierte en lineal.

Para resolver 135 se introduce la sustitución $u(x) = [y(x)]^{1-a}$ [136]

Diferenciando [136] y sustituyendo y' en [134] se obtiene

$$\begin{aligned} u' &= (1-a) \cdot y^{-a} \cdot y' \\ &= (1-a) \cdot y^{-a} \cdot [Q(x) \cdot y^a - P(x) \cdot y] \qquad [137] \\ &= (1-a) \cdot [Q(x) - P(x) \cdot y^{1-a}] \end{aligned}$$

Como en el miembro de la derecha $y^{1-a} = u$, se tiene la ecuación lineal

$$u' + (1-a) \cdot P(x) \cdot u = (1-a) \cdot Q(x) \qquad [138]$$

8. Aplicación de las EDO: Ortogonalidad de curvas en el plano

El ángulo de intersección de dos curvas se define como el ángulo entre las tangentes a las curvas en el punto de intersección.

Se verá cómo se utilizan las ecuaciones diferenciales para encontrar curvas que interceptan a curvas dadas en ángulos rectos. Las nuevas curvas se denominan trayectorias ortogonales a las curvas dadas.

Por ejemplo, los meridianos y paralelos del globo son trayectorias ortogonales unos de los otros.

8.1. Método para determinar Trayectorias Ortogonales

Cualquier familia de curvas uniparamétrica puede ser interpretada, bajo ciertas condiciones, como la solución general de una ecuación diferencial de primer orden.

La propiedad de ortogonalidad entre dos familias de curvas uniparamétricas implica que en cada punto del plano, las curvas de cada familia tienen tangentes de pendientes opuestas e inversas, o sea llamando y a la función que representa a una familia y u a la función que representa a la otra familia se tiene que, en cada punto se debe cumplir:

$$y' = -\frac{1}{u'} \qquad [139]$$

Esto permite establecer el siguiente método para determinar trayectorias ortogonales a una familia de curvas uniparamétrica:

Primer paso:

Determinar la ecuación diferencial de la familia de curvas dadas en la forma $y' = f(x,y)$.

Segundo paso:

Plantear la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales, aplicando [139]

Tercer paso:

Resolver la ecuación diferencial planteada.

Ejemplo 25:

Determinar las trayectorias ortogonales a la familia de parábolas $y = c \cdot x^2$

Resolución:

Aplicando el método se tiene:

Primer paso:

Derivando: $y' = 2c \cdot x$; eliminando c : $\frac{y}{x^2} = \frac{y'}{2x}$, o sea $y' = \frac{2y}{x}$.

Segundo paso:

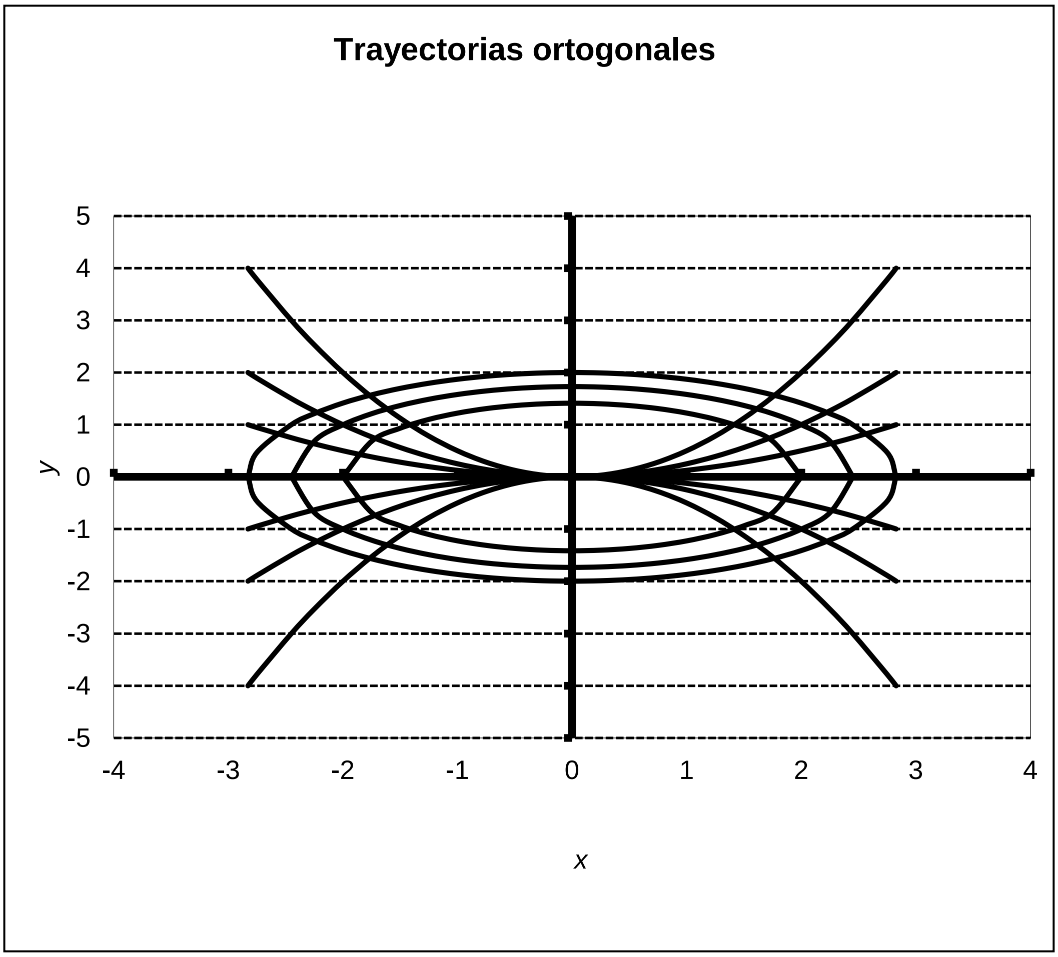
$$y' = -\frac{x}{2y}$$

Tercer paso:

Separando las variables : $2yy' = -x$; o sea $2ydy = -xdx$, e integrando, resulta

$y^2 = -\frac{x^2}{2} + c^*$; es decir $\frac{x^2}{2} + y^2 = c^*$ que es una familia de elipses como se ve en la Figura 8.

Figura 8



Ejemplo 26:

Los experimentos muestran que las líneas de fuerza eléctrica de dos cargas opuestas de la misma intensidad ubicadas en $(-1{,}0)$ y $(1{,}0)$ son circunferencias que pasan por $(-1{,}0)$ y $(1{,}0)$.

Mostrar que estas circunferencias pueden representarse por la ecuación $x^2+(y-C)^2=1+C^2$.

Verificar que las líneas equipotenciales (trayectorias ortogonales) son los círculos $(x+A)^2+u^2=A^2-1$.

Resolución:

Para determinar la ecuación que define a la familia de circunferencias que pasan por los puntos $(-1{,}0)$ y $(1{,}0)$, se parte de la ecuación general de una circunferencia, es decir

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2 \qquad [140]$$

donde (h,k) son las coordenadas del centro y r el radio.

Como las circunferencias de la familia deben pasar simultáneamente por los puntos $(-1{,}0)$ y $(1{,}0)$, se debe cumplir

$$\left.\begin{aligned}(-1-h)^2+(0-k)^2&=r^2\\(1-h)^2+(0-k)^2&=r^2\end{aligned}\right\} \qquad [141]$$

y desarrollando los cuadrados, el sistema queda

$$\left.\begin{aligned} 1+2h+h^2+k^2&=r^2\\ 1-2h+h^2+k^2&=r^2\end{aligned}\right\} \qquad [142]$$

resolviendo [142]

$$4h=0 \quad \therefore \quad h=0$$

$$k^2=r^2-1$$

y reemplazando en [140] queda

$$x^2+\left(y-k\right)^2=1+k^2 \qquad [143]$$

Llamando C a k se obtiene la ecuación buscada

$$x^2+\left(y-C\right)^2=1+C^2 \qquad [144]$$

El primer paso para hallar las trayectorias ortogonales a la familia [144] es determinar la ecuación $y'=f\left(x,y\right)$ correspondiente a ella.

Operando sobre [144] se tiene

$$x^2+y^2-2Cy+C^2=1+C^2$$

$$x^2+y^2-2Cy=1.$$

derivando

$$2x+2yy'-2Cy'=0$$

$$x+yy'-Cy'=0.$$

Eliminando el parámetro C y operando se llega a

$$-\frac{1-x^2-y^2}{2y}=\frac{x+yy'}{y'}$$

o sea

$$y'=\frac{2xy}{-1+x^2-y^2} \qquad [145]$$

es la ecuación diferencial de la familia de curvas dada.

Aplicando la condición de ortogonalidad, es decir $y'=-\left(1/u'\right)$ donde u es la función uniparamétrica que representará a las trayectorias ortogonales, se tiene

$$-\frac{1}{u'}=\frac{2xu}{-1+x^2-u^2} \qquad [146]$$

y operando se llega a

$$u'=\frac{1-x^2+u^2}{2xu} \ ,$$

que se puede escribir

$$2uu'-\frac{1}{x}u^2=\frac{1}{x}-x \qquad [147]$$

que es una ecuación no lineal de primer orden tipo Bernoulli.

Haciendo $v=u^2$, $v'=2uu'$, la ecuación [9] tiene la solución

$$v=e^{-\int -\frac{1}{x}dx}\cdot\left[\int\left(\frac{1}{x}-x\right)\cdot e^{\int -\frac{1}{x}dx}\cdot dx+B\right] \qquad [148]$$

y resolviendo las integrales expresadas, queda

$$v=-1-x^2+B\,x \qquad [149]$$

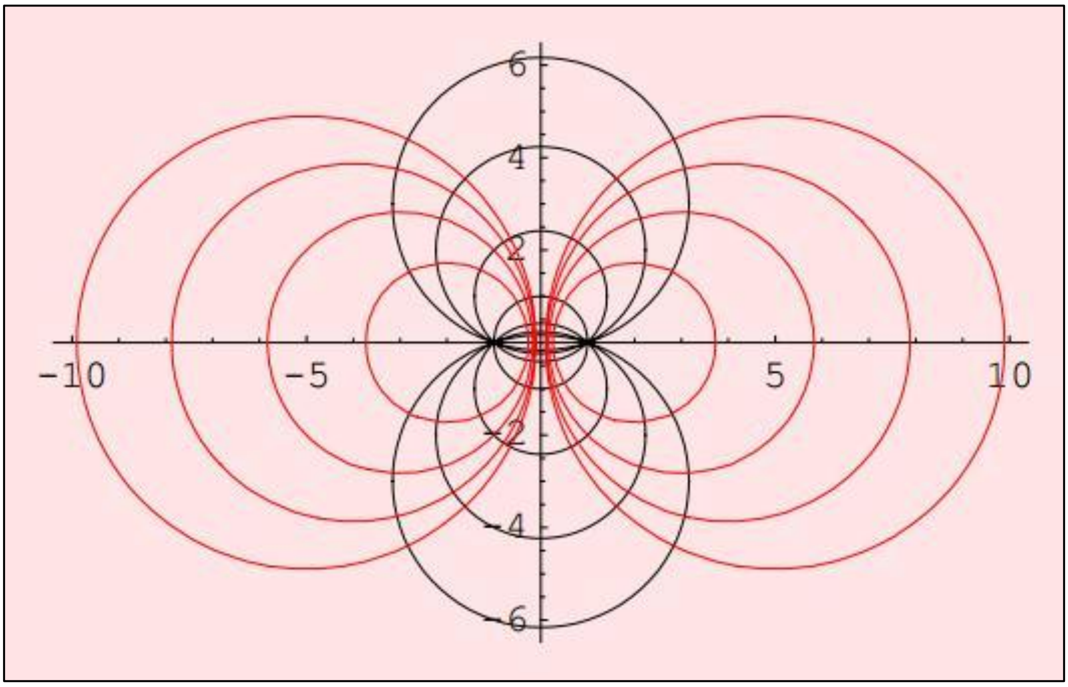
volviendo a la variable u, operando y haciendo $B=2A$ se tiene

$$\left(x-A\right)^2+u^2=A^2-1 \qquad [150]$$

que es lo que se quería demostrar.

La representación de la familia de curvas dadas, la función $y(x)$ en negro, y la de sus correspondientes trayectorias ortogonales la función $u(x)$ en rojo, o sea las líneas de fuerza eléctrica y las equipotenciales respectivamente, se muestra en la Figura 9.

Figura 9



9. Comentarios para el final del Tema

Durante el desarrollo de este capítulo se ha presentado el concepto de ecuación diferencial ordinaria, desde una perspectiva general: sus características principales, su utilidad en el contexto del análisis y la solución de problemas abiertos y los tipos de soluciones que se pueden obtener.

Se propuso una clasificación general de las ecuaciones diferenciales basada centralmente en la cantidad de funciones desconocidas y variables independientes que aparecen y el orden de las derivadas involucradas.

Se describió el papel de las constantes arbitrarias en las soluciones generales de las ecuaciones diferenciales ordinarias y la relación entre su número y el orden de la EDO.

La pequeña pausa en el punto 6 permite reflexionar sobre las cuestiones anteriores, en especial teniendo en cuenta las conclusiones que surgen de los ejemplos propuestos, tanto en la forma de resolución de ejercicios como en el planteo y la solución de problemas abiertos de ingeniería y otras disciplinas.

Luego se presentan procedimientos específicos para resolver algunos casos de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, que es el objetivo básico de este Tema.

Por último se mostró una aplicación geométrica y física del conocimiento de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.