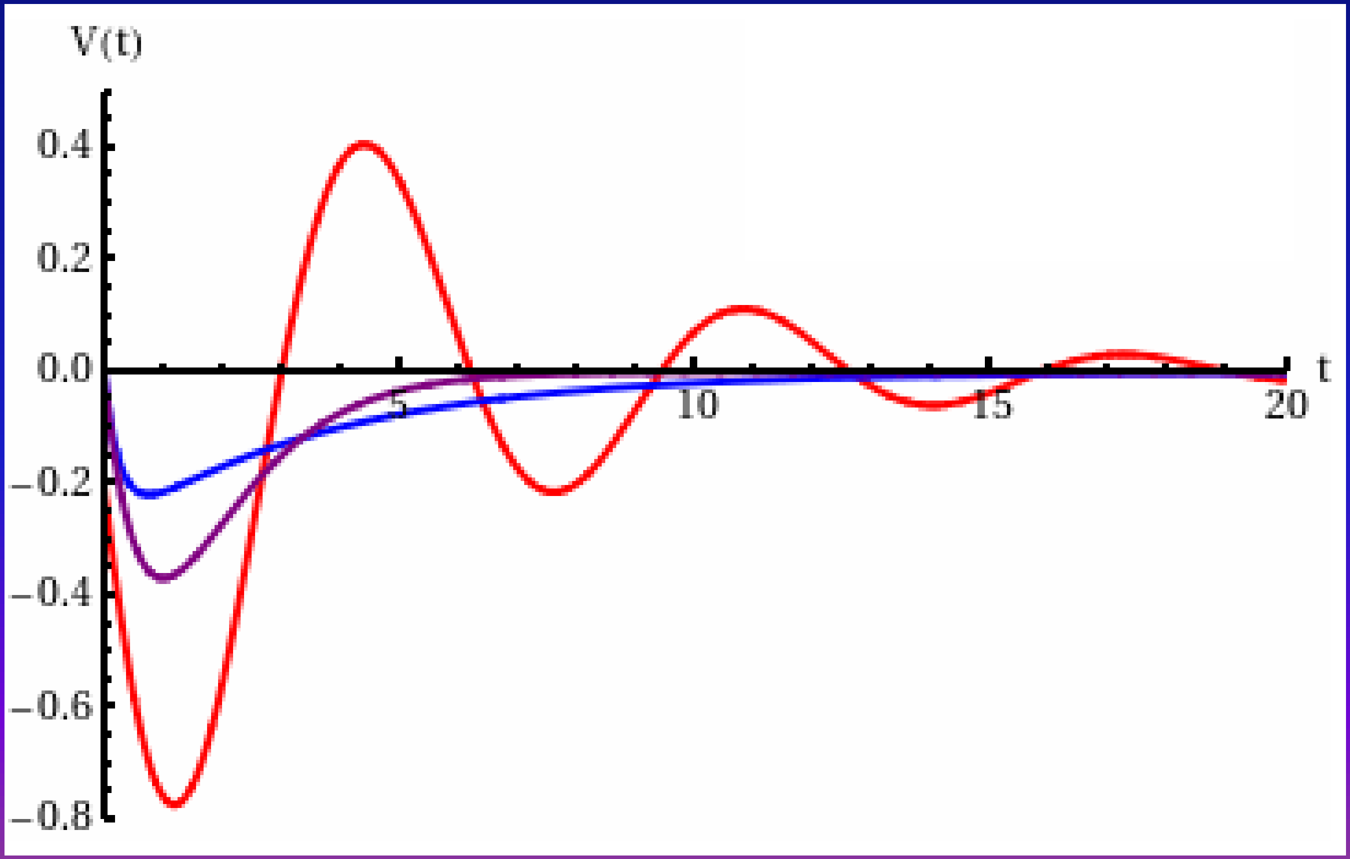
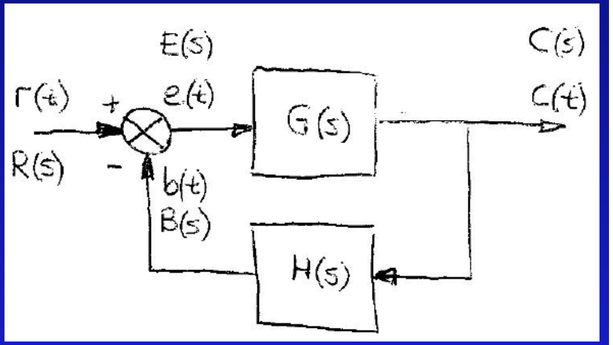
RESPUESTA TEMPORAL de los Sistemas de Control

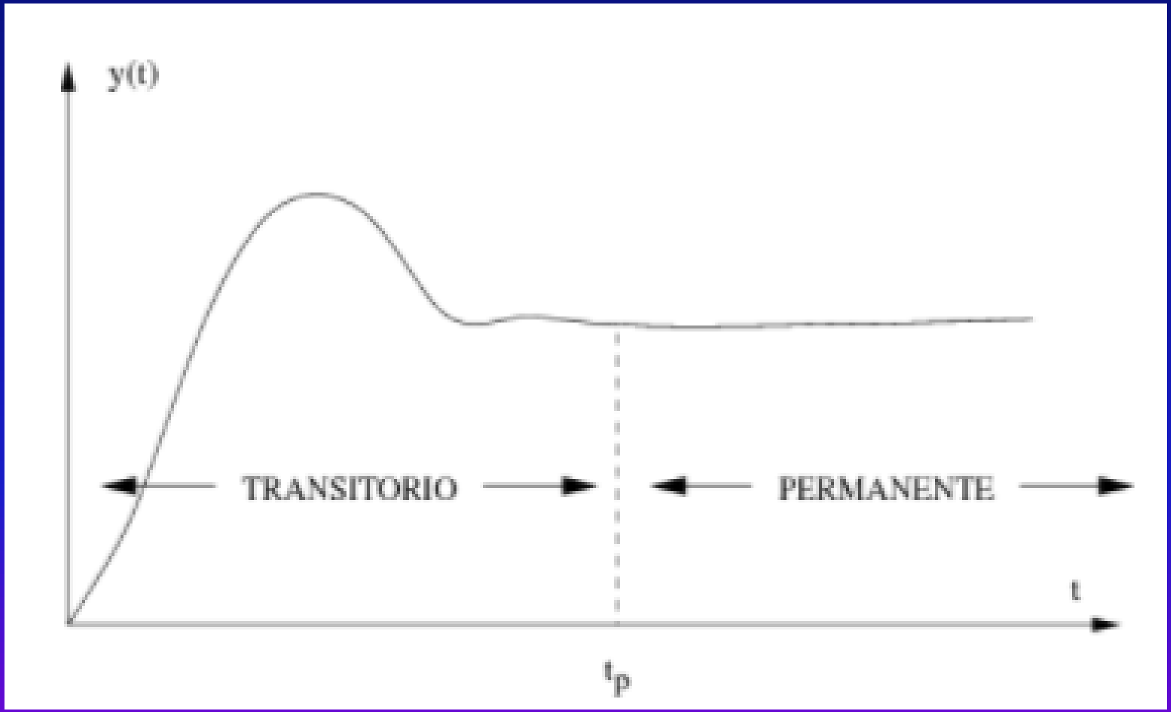


RESPUESTA TEMPORAL

Dado un Sistema de Control, la RESPUESTA TEMPORAL del mismo al aplicar una excitación en su entrada, estará constituida como:

$$C(t) = C_{transitoria} + C_{permanente}$$





RESPUESTA TEMPORAL

La Respuesta temporal de un sistema de control a una excitación en su entrada ,tiene 2 componentes , una *Respuesta Transitoria* y una *Respuesta Permanente*.

$$\boxed{C(t) = C_t(t) + C_p(t)}$$

Para el estudio de esta respuesta se usan señales de entrada normalizadas , como ser :

- Función Escalón
- Función Rampa
- Función impulso unitario
- Otras funciones (aceleración , sinusoidal , etc.)

CALCULO DE LA RESPUESTA TEMPORAL

Dada $g(t) = \dfrac{y(t)}{x(t)}$ $\Rightarrow$ $G(s) = \dfrac{Y(s)}{X(s)}$

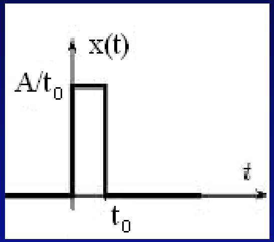
Luego $Y(s) = G(s).X(s)$

Entonces $\boxed{y(t) = L^{-1}[Y(s)]}$

RESPUESTA TEMPORAL

FUNCIONES DE EXITACION

1) Función Impulso



$x(t) = \lim_{t0 \to 0} \frac{A}{t0} \quad 0<t<t_0$

$x(t)=0$ p/ $t<0$, $t>t_0$

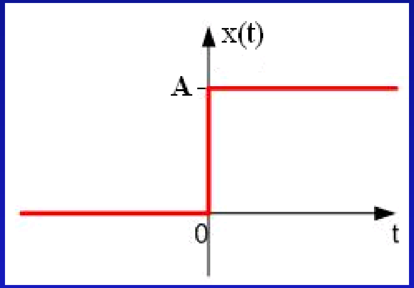
→ **X(s)= A**

2) Función Escalón

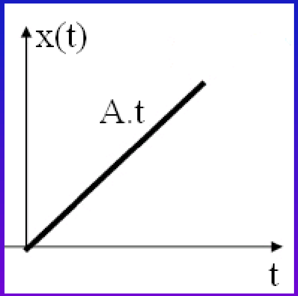
$x(t)=0$ p/ $t<0$

$x(t)=A$ p/ $t>0$

→ **X(s)= A/s**



3) Función Rampa



$x(t)=0$ p/ $t<0$

$x(t)=A.t$ p/ $t>0$

→ $$X(s) = \frac{A}{s^2}$$

RESPUESTA TEMPORAL

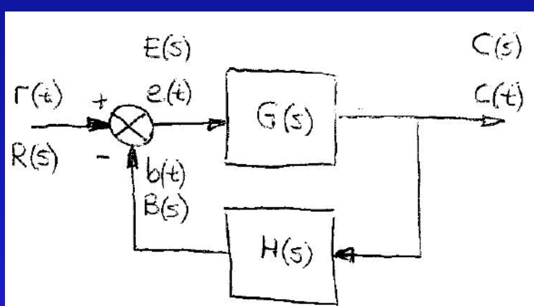
<u>Respuesta Transitoria</u> (o Temporal)

Es la respuesta inicial de un Sistema cuando el mismo es sometido a una perturbacion.

<u>Respuesta en Régimen Permanente</u>

Es la respuesta del sistema que permanece después de finalizado el Regimen transitorio.

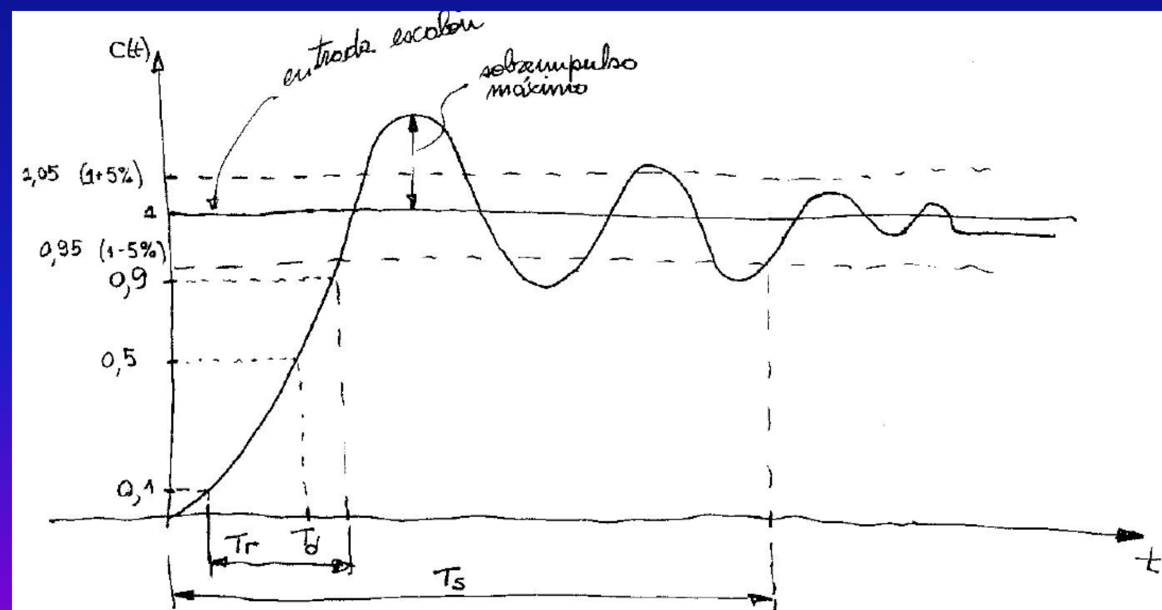
Si aplicamos una función escalón unitario a un Sistema de control , su respuesta será la siguiente



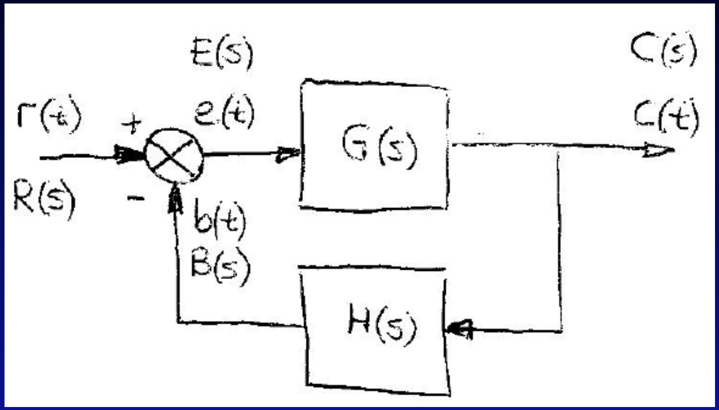
Td: Tiempo de Retardo

Tr: Tiempo de Crecimiento

Ts: Tiempo de Restablecimiento



ERROR DE UN SISTEMA DE CONTROL



Definimos el error como :

$$e(t)=r(t)-b(t)$$

$$E(s)=R(s)-B(s)=R(s)-H(s).C(s)$$
$$=R(s)-H(s).G(s).E(s)$$

Despejando :

$$\boxed{E(s)=\frac{R(s)}{1+G(s).H(s)}}$$

El error en ***régimen permanente*** $\mathbf{e_p}$ como :

$$e_P=\lim_{t\to\infty} e(t)$$

Aplicando el Teorema del Valor Final tenemos que :

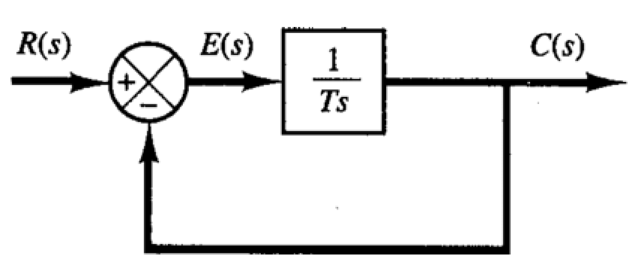
$$e_P=\lim_{t\to\infty} e(t)=\lim_{s\to 0} s.E(s)$$

SISTEMAS DE 1° ORDEN

SISTEMAS DE 1° ORDEN

Son aquellos que responden a una ecuación diferencial de 1° orden

$$\frac{dc(t)}{dt} + a_0.c(t) = b_0.r(t)$$

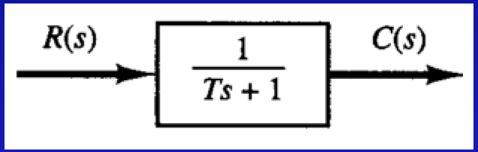


Aplicando Transformada de Laplace

$$S.C(s) + a_0.C(s) = b_0.R(s)$$

Luego la Función de Transferencia será

$$\boxed{\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0}{s+a_0} = \frac{K}{\tau s+1}}$$



$K=\frac{b_0}{a_0}$ Ganancia en estado estable

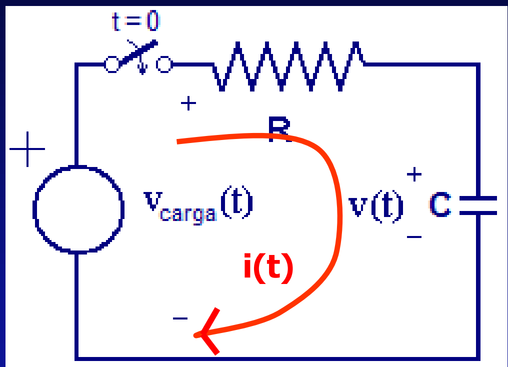
$\tau=\frac{1}{a_0}$ Constante de tiempo del sistema

SISTEMAS DE 1° ORDEN

EJEMPLO DE ANALISIS TEMPORAL

$\tau = R.C$ Constante de tiempo

Sea el siguiente Sistema de 1° Orden



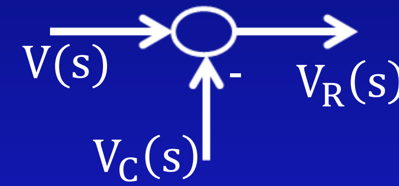
$$v(t) = R.i(t) + \frac{1}{C}\int i.\,dt$$

$$V(s) = R.I(s) + \frac{1}{Cs}I(s)$$

$$V(s) = V_R(s) + V_C(s)$$

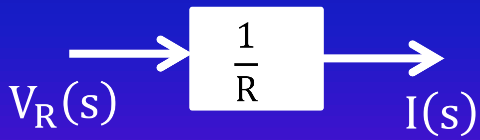
Luego

$$V_R(s) = V(s) - V_C(s)$$



Vemos que…

$$V_R(s) = R.\,I(s) \Rightarrow I(s) = \frac{V_R(s)}{R}$$

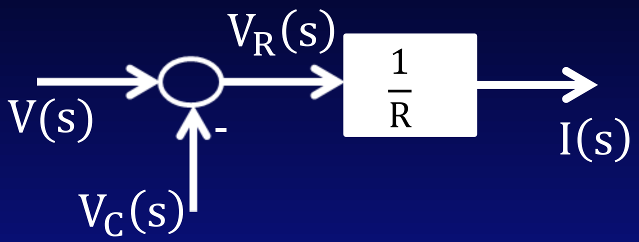


SISTEMAS DE 1° ORDEN

EJEMPLO DE ANALISIS TEMPORAL

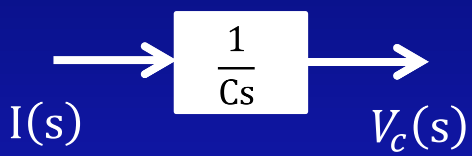
τ=R.C Constante de tiempo

Luego

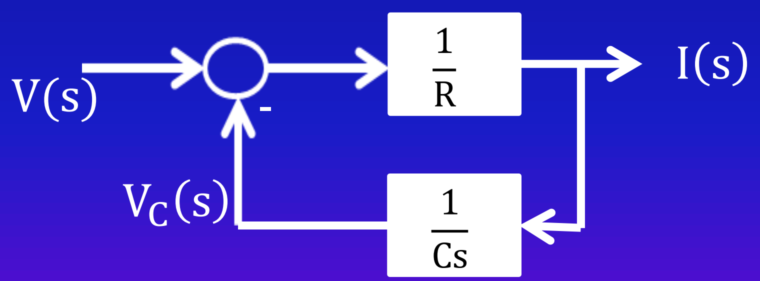


Además que

$$V_c(s) = \frac{1}{C.s}.I(s)$$



Entonces

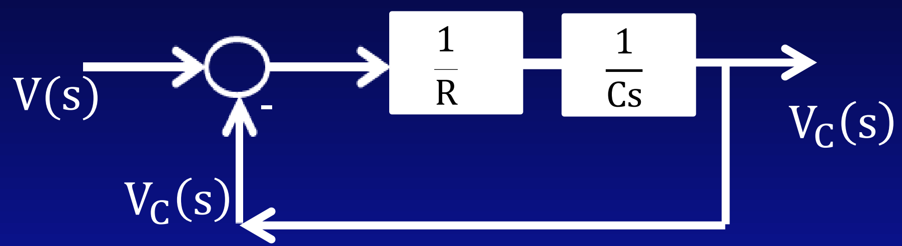


SISTEMAS DE 1° ORDEN

EJEMPLO DE ANALISIS TEMPORAL

τ=R.C Constante de tiempo

Si ahora queremos encontrar la Función de Transferencia $\dfrac{V_c(s)}{V(s)}$



$$G(s) = \frac{V_c(s)}{V(s)} = \frac{\frac{1}{RCs}}{1 + \frac{1}{RCs}} = \frac{1}{1 + RCs} = \frac{1}{1 + Ts}$$

$$\mathbf{T = RC}$$

Cte. de Tiempo del Sistema

$$\boxed{\mathbf{G(s) = \frac{1}{1 + Ts}}}$$

Función de Transferencia de un Sistema de 1° Orden

SISTEMAS DE 1° ORDEN

Ejemplo: Respuesta a un Escalón Unitario

Si ahora queremos encontrar la Función de Transferencia $\dfrac{V_c(s)}{\mathrm{V(s)}}$

$$V_c(s) = \mathrm{G(s)}.V(s) = \frac{1}{s}.\frac{1}{(1+Ts)} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{1+Ts}$$

$$A_1 = \lim_{s\to 0} s.V_c(s) = \lim_{s\to 0}\frac{1}{1+Ts} = \mathbf{1}$$

$$A_2 = \lim_{s\to -\frac{1}{T}} (1+Ts).V_c(s) = \lim_{s\to -\frac{1}{T}} \frac{1}{s} = \boldsymbol{-T}$$

$$\mathbf{T = RC}$$

Cte. de Tiempo del Sistema

Entonces

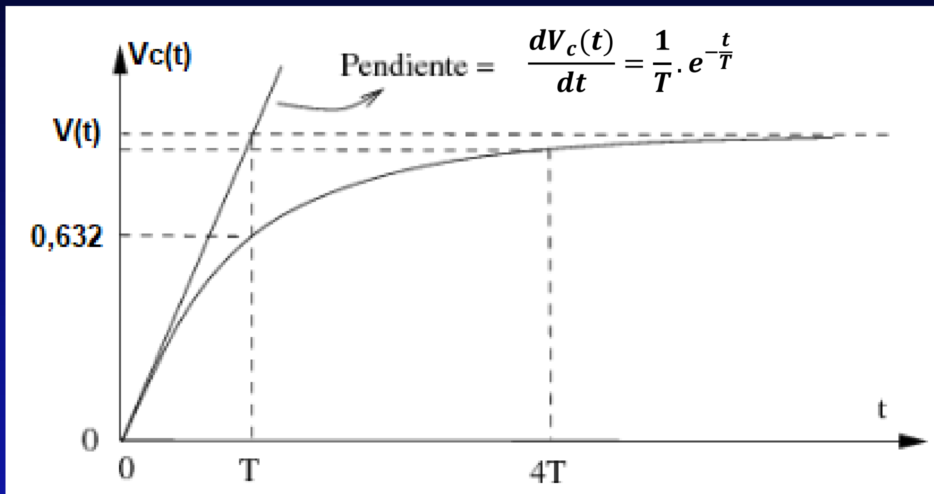
$$\boxed{V_c(s) = \frac{1}{s} - \frac{T}{1+Ts}}$$

Antitransformando $\Rightarrow$

$$\boldsymbol{v_c(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}}$$

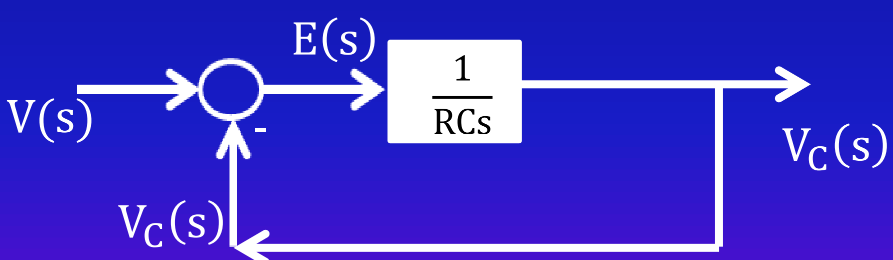
SISTEMAS DE 1° ORDEN

Ejemplo: Respuesta a un Escalón Unitario



$$v_c(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}$$

CALCULO DEL ERROR PERMANENTE



$$E(s) = V(s) - V_c(s)$$

$$E(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+\frac{1}{T}}$$

$$E(s) = \frac{1}{s+\frac{1}{T}}$$

$$e(t) = e^{-\frac{t}{T}}$$

$$e(t) = \lim_{t\to\infty} e^{-\frac{t}{T}} = 0$$

SISTEMAS DE 1° ORDEN

RESPUESTA A UNA ENTRADA IMPULSO UNITARIO

$$Y(s) = G(s) \cdot X(s)$$

$$\left.\begin{aligned} G(s) &= \frac{1}{1+\tau s} \\ X(s) &= 1 \end{aligned}\right\} \quad Y(s) = \frac{1}{1+\tau s} = \frac{1}{\tau} \cdot \frac{1}{s+1/\tau}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

NOTA

en gral si $x(t) = A\,\delta(t)$

$X(s) = A$

luego

$$\boxed{y(t) = \frac{A}{\tau} e^{-t/\tau}}$$

SISTEMAS DE 1° ORDEN

Respuesta a una Entrada Impulso Unitario (Cont.)

p/ $t = 0$ $\quad y(t) = \dfrac{1}{\tau}$

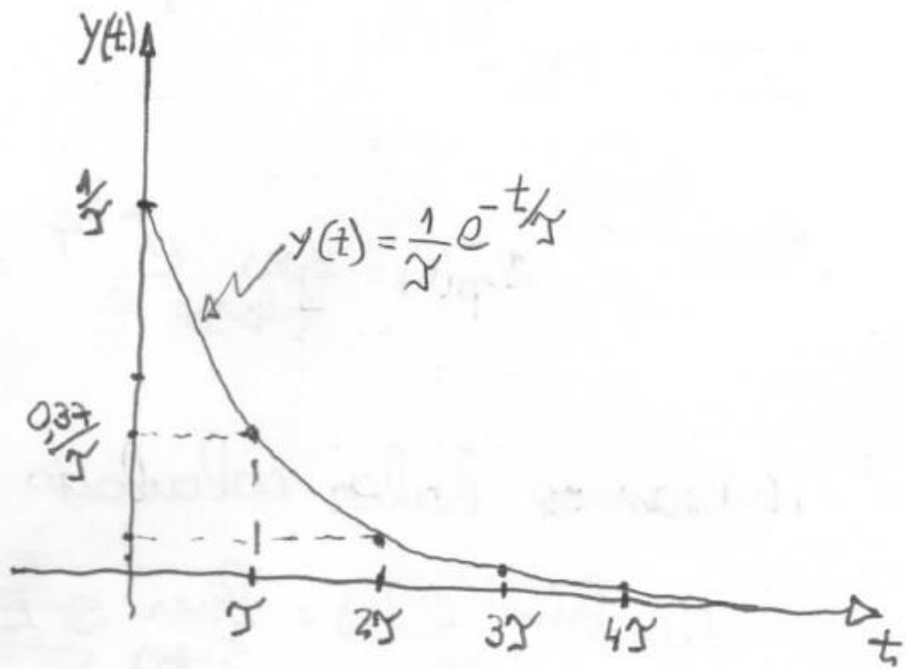
p/ $t = \infty$ $\quad y(t) = 0$

p/ $t = \tau$ $\quad y(t) = \dfrac{0{,}37}{\tau}$

p/ $t = 2\tau$ $\quad y(t) = \dfrac{0{,}135}{\tau}$

p/ $t = 3\tau$ $\quad y(t) = \dfrac{0{,}05}{\tau}$

p/ $t = 4\tau$ $\quad y(t) = \dfrac{0{,}02}{\tau}$



SISTEMAS DE 1° ORDEN

Respuesta a una Entrada Impulso Unitario (Cont.)

p/ $t=0$ $\quad y(t) = \frac{1}{\tau}$

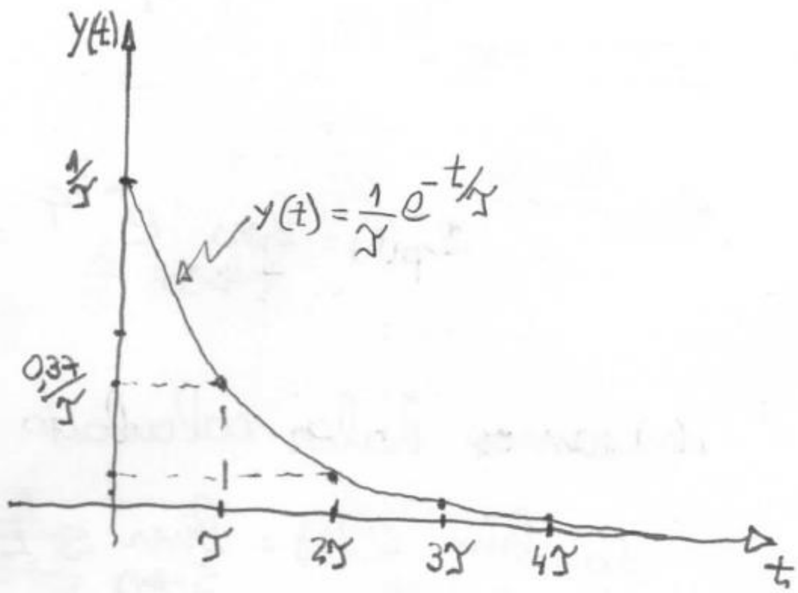
p/ $t=\infty$ $\quad y(t) = 0$

p/ $t=\tau$ $\quad y(t) = \frac{0,37}{\tau}$

p/ $t=2\tau$ $\quad y(t) = \frac{0,135}{\tau}$

p/ $t=3\tau$ $\quad y(t) = \frac{0,05}{\tau}$

p/ $t=4\tau$ $\quad y(t) = \frac{0,02}{\tau}$



En el caso de tener un impulso de Amplitud A, la respuesta será

$$\mathbf{y(t)} = \frac{A}{T}\, e^{-\frac{t}{T}}$$

RESPUESTA A UNA ENTRADA RAMPA

$$G(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$$

$$x(t) = At \Rightarrow X(s) = \frac{A}{s^2}$$

<u>luego</u>

$$Y(s) = X(s) \cdot G(s) = \frac{A}{s^2(\tau s + 1)} = \frac{A_1}{s^2} + \frac{A_2}{s} + \frac{A_3}{\tau s + 1}$$

$$A_1 = \lim_{s \to 0} s^2 Y(s) = \lim_{s \to 0} \cancel{s^2} \cdot \frac{A}{\cancel{s^2}(\tau s + 1)} = \lim_{s \to 0} \frac{A}{\tau s + 1} = \boxed{A}$$

$$A_2 = \lim_{s \to 0} \frac{d}{ds}\left[s^2 Y(s)\right] = \lim_{s \to 0} \frac{d}{ds}\left[\frac{A}{\tau s + 1}\right] = \left.\frac{-A\tau}{(\tau s + 1)^2}\right|_{s=0} = \boxed{-A\tau}$$

$$A_3 = \lim_{s \to -\frac{1}{\tau}} (\tau s + 1)\, Y(s) = \lim_{s \to -\frac{1}{\tau}} \frac{A}{s^2} = \boxed{A\tau^2}$$

SISTEMAS DE 1° ORDEN

Respuesta a una entrada rampa (Cont.)

Luego

$$Y(s) = \frac{A}{s^2} - \frac{A\tau}{s} + \frac{A\tau^2}{\tau s + 1} = \frac{A}{s^2} - \frac{A\tau}{s} + \frac{A\tau^{\cancel{2}}}{\cancel{\tau}\left(s + \frac{1}{\tau}\right)}$$

$$\boxed{Y(s) = A\left(\frac{1}{s^2} - \frac{\tau}{s} + \frac{\tau}{s + \frac{1}{\tau}}\right)}$$

Antritransformando

$$y(t) = A\left(t - \tau + \tau e^{-t/\tau}\right) = A\tau\left(\frac{t}{\tau} - 1 + e^{-t/\tau}\right)$$

SISTEMAS DE 1° ORDEN

Respuesta a una entrada rampa (Cont.)

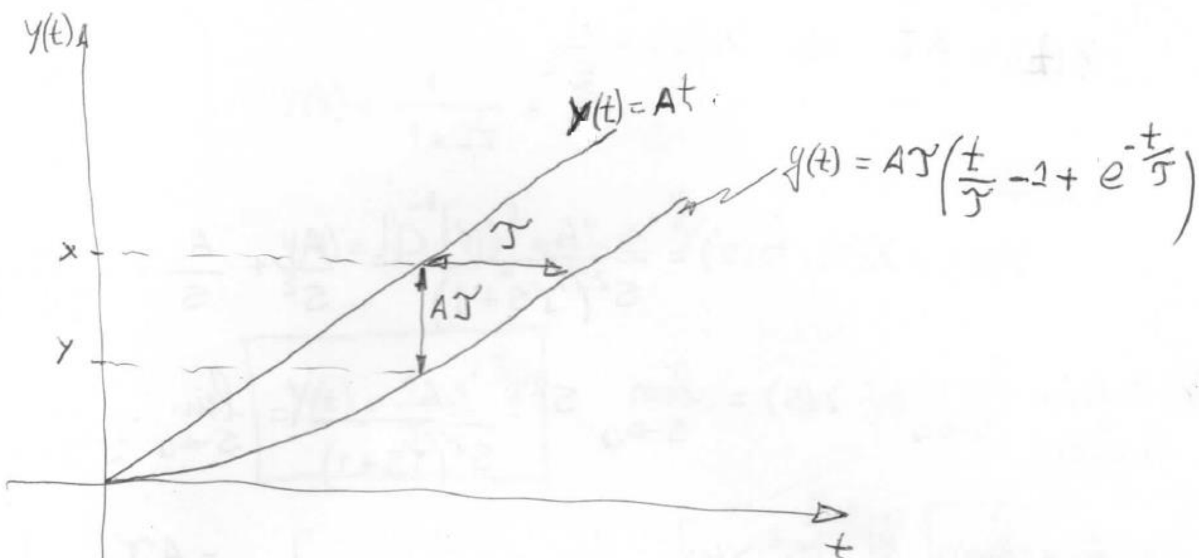
Trazado de la Gráfica

$$p/\ t=0 \Rightarrow y(0) = A\tau\,(0 - 1 + 1) = 0$$
$$t=\infty \Rightarrow y(\infty) = \infty$$

Antritransformando

$$x - y = \cancel{At} - \cancel{At} + A\tau - A\tau e^{-t/\tau}$$
$$= A\tau\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$
$$\boxed{\lim_{t\to\infty}(x-y) = A\tau}$$

Supongamos $\left.\begin{array}{l} A = 1 \\ \tau = 1\ \text{min} \end{array}\right\}$ $y(t) = t - 1 + e^{-t}$

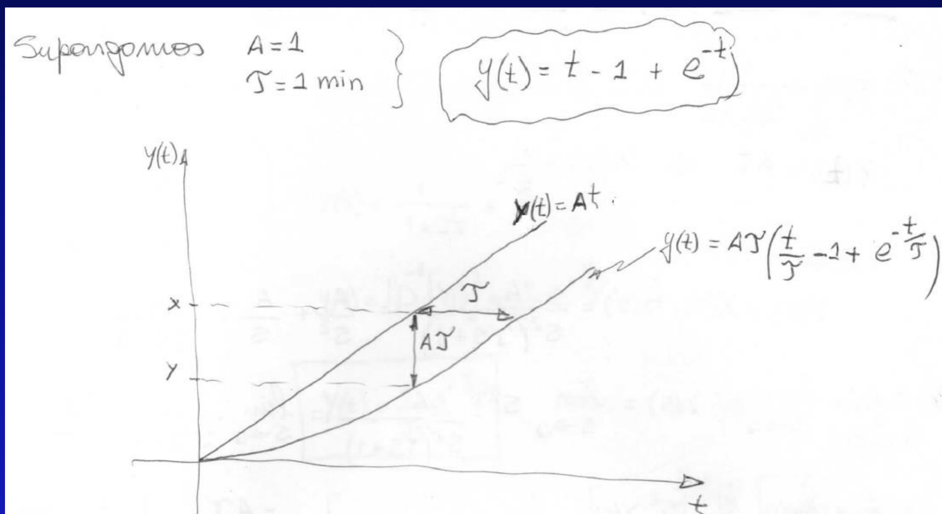


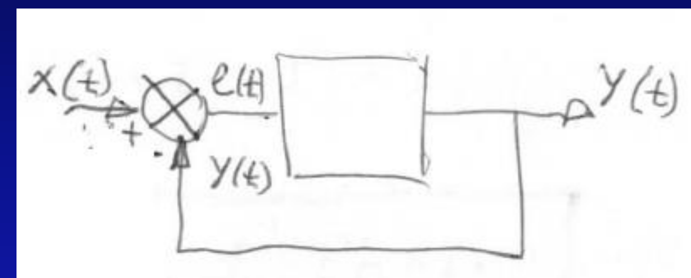
SISTEMAS DE 1° ORDEN

Antritransformando

Respuesta a una entrada rampa (Cont.)

Error Permanente





$$e(t) = x(t) - y(t)$$

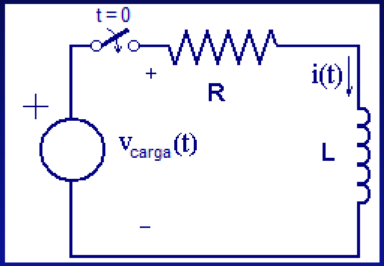
$$e_\infty = \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{t \to \infty} \left[\cancel{At} - \cancel{At} + AT + AT e^{-t/T}\right]$$

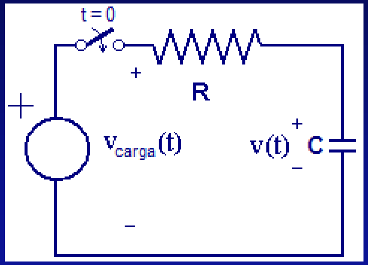
$$\boxed{e_\infty = AT}$$

Se puede demostrar que la pendiente de la función salida será similar a la de exitacion de entrada (pendiente A). De igual forma el retardo será igual a un valor T.

SISTEMAS DE 1° ORDEN
SISTEMAS TIPICOS

a) Circuitos Eléctricos





$$\frac{V_L(s)}{V(s)} = \frac{1}{\tau s + 1}$$

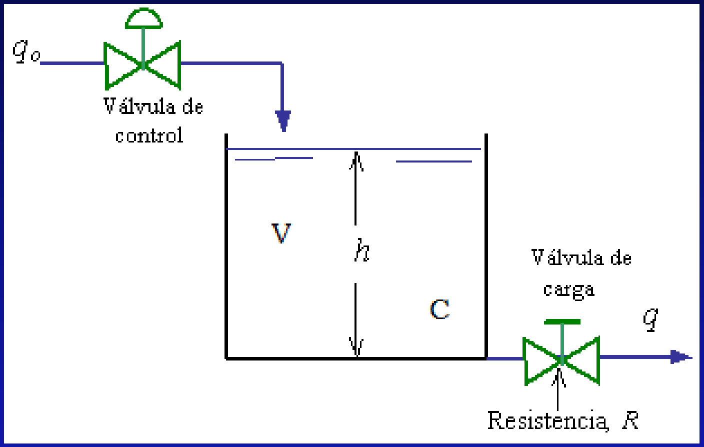
$$\frac{V_C(s)}{V(s)} = \frac{1}{\tau s + 1}$$

$\tau = \frac{L}{R}$ Constante de tiempo

$\tau = R.C$ Constante de tiempo

SISTEMAS TIPICOS

b) Tanque con almacenamiento de líquido



V: Volumen del Tanque

C: Capacidad del Tanque

H: altura de líquido

R: restricción de la válvula

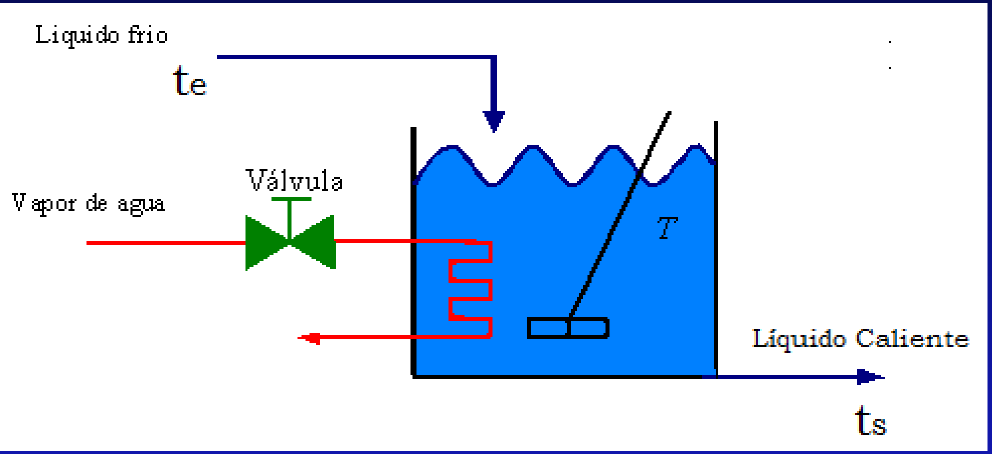
$$\boxed{\frac{Q(s)}{Q_0(s)} = \frac{1}{RC+1} = \frac{1}{\tau s+1}}$$

τ=R.C Constante de tiempo

C=V/h

SISTEMAS DE 1° ORDEN
SISTEMAS TIPICOS

c) Intercambiador de Calor



te: temperatura de entrada

ts: temperatura de salida

C: Capacitancia térmica (Kcal/°C)

R: resistencia térmica a la transferencia de calor (°C. seg/Kcal)

$$\boxed{\frac{T_s(s)}{T_0(s)} = \frac{1}{RC+1} = \frac{1}{\tau s+1}}$$

τ=R.C Constante de tiempo

d) Válvula de Control

Se puede considerar a una válvula de control como un sistema de 1° orden , con la siguiente Función de Transferencia.

Q(s): Caudal (variable manipulada)

U(s): señal proveniente del controlador (mA)

Kv: Ganancia de la Válvula

Tv: Constante de tiempo de la válvula

$$G_V(s) = \frac{Q(s)}{U(s)} = \frac{K_v}{\tau_v s + 1}$$

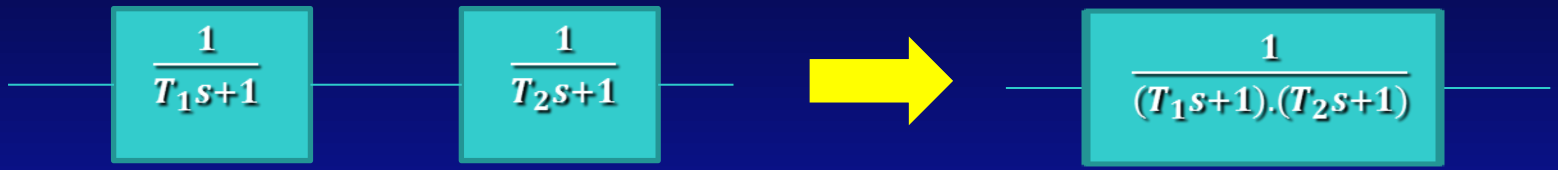
En muchos sistemas prácticos, la constante de tiempo de la válvula es muy pequeña comparada con las constantes de tiempo de otros componentes del sistema de control, y la función de transferencia de la válvula puede ser aproximada a una constante.

$$G_V(s) = \frac{Q(s)}{U(s)} = K_V$$

SISTEMAS DE 2° ORDEN

SISTEMAS DE 2° ORDEN

Los Sistemas de 2° orden pueden originarse simplemente por la concatenación en serie de 2 elementos de 1° orden.



La Transmitancia correspondiente a un Sistema de 2° orden , se caracteriza por tener el denominador de la misma forma.

Es un polinomio de 2°grado denominado ECUACION CARACTERISTICA y tiene la forma siguiente :

$$\boxed{\Delta = \tau^2 . \boldsymbol{s} + \mathbf{2}\xi\tau\boldsymbol{s} + \mathbf{1}}$$

Por lo tanto un Sistema de 2° Orden tiene la siguiente Función de Transferencia :

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{s}) = \frac{\mathbf{1}}{\tau^2 . \boldsymbol{s} + \mathbf{2}\xi\tau\boldsymbol{s} + \mathbf{1}}$$

τ: Constante de Tiempo del Sistema

ξ: Factor de amortiguamiento

SISTEMAS DE 2° ORDEN

Las dos raíces del polinomio Δ serán:

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = -\xi.\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -\alpha \pm j\omega$$

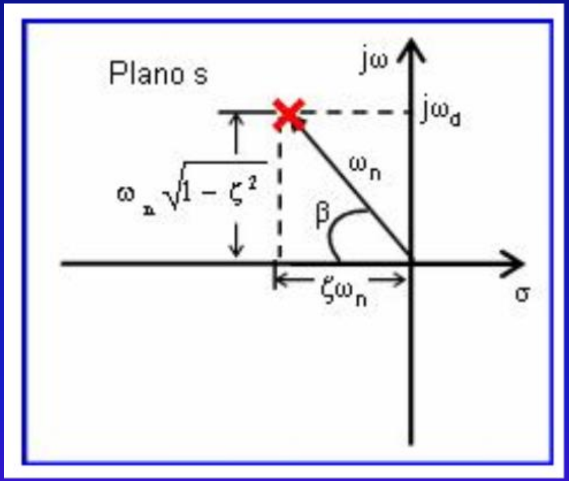
α : Constante de Amortiguamiento

ω : Frecuencia amortiguada

Para analizar la respuesta en frecuencia de un sistema de 2° Orden , se exita el mismo con una función escalón unitario R(s)=1/s .

Luego la salida del sistema será :

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2).s}$$



Antitransformando

$$c(t)=1+\frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\,sen\left(\omega_n.\sqrt{1-\xi^2}.t+Tg^{-1}\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)$$

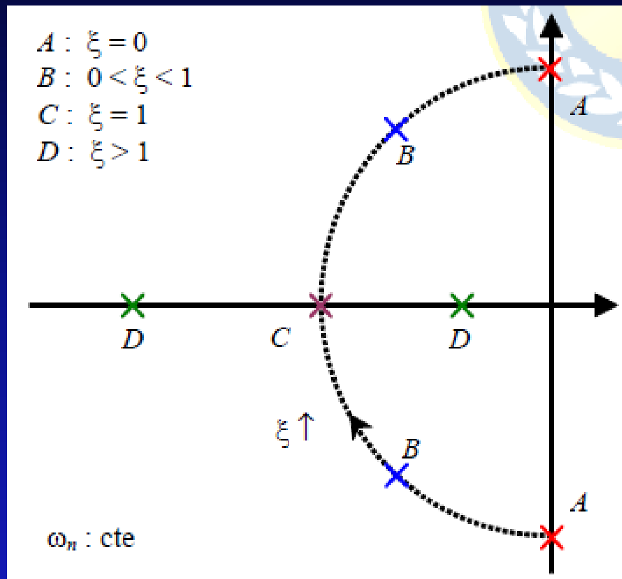
$t \geq 0$

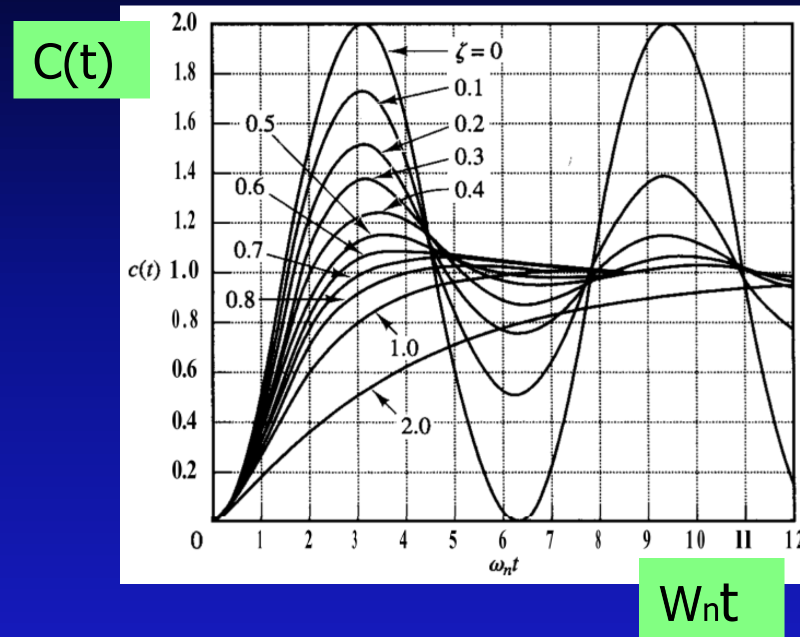
$\omega_n = \frac{1}{\tau}$ Frecuencia natural no amortiguada

$\xi =$ Factor de amortiguamiento

SISTEMAS DE 2° ORDEN

Luego para distintos valores de ξ el sistema tendrá la siguiente respuesta





Si ξ=0 el sistema oscila indefinidamente a una frecuencia ω_n y se denomina ***Sistema Oscilatorio puro***

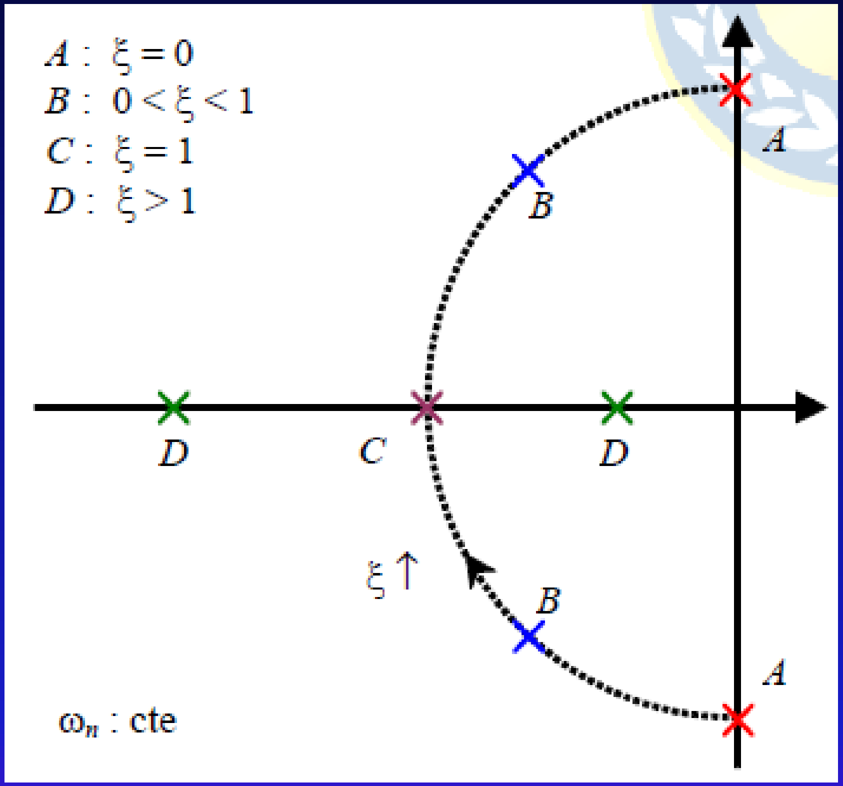
Si 0<ξ<1 el Sistema se denomina ***Subamortiguado***

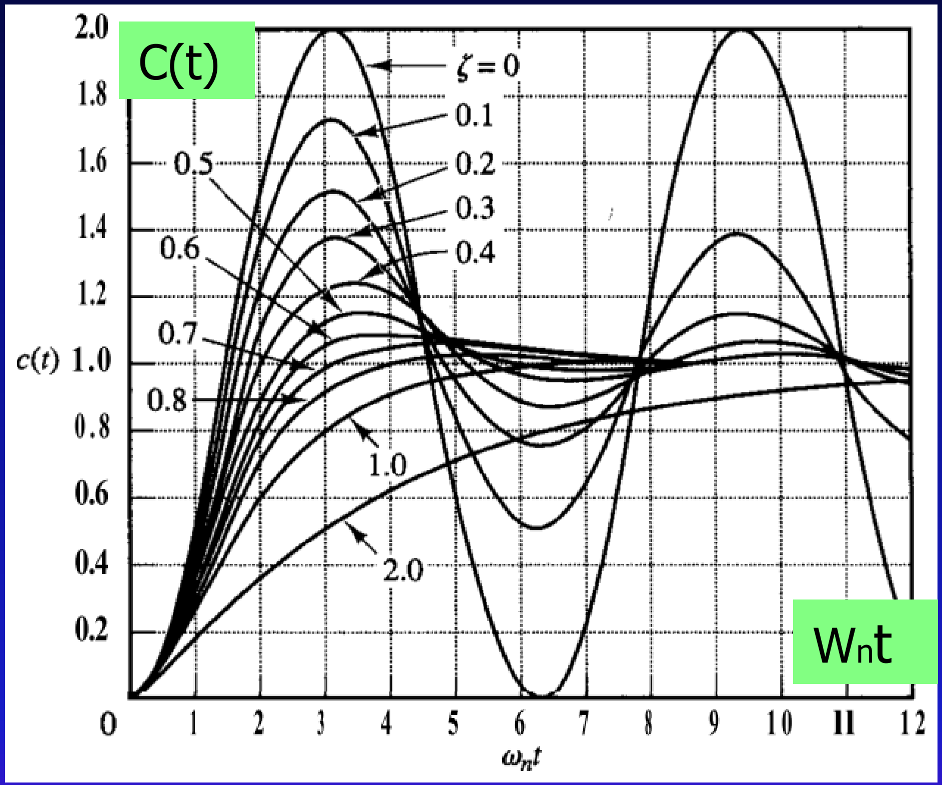
Si ξ=1 el Sistema se denomina ***Críticamente Amortiguado***

Si ξ>1 el Sistema se denomina ***Sobreamortiguado***

SISTEMAS DE 2° ORDEN

Luego para distintos valores de ξ el sistema tendrá la siguiente respuesta

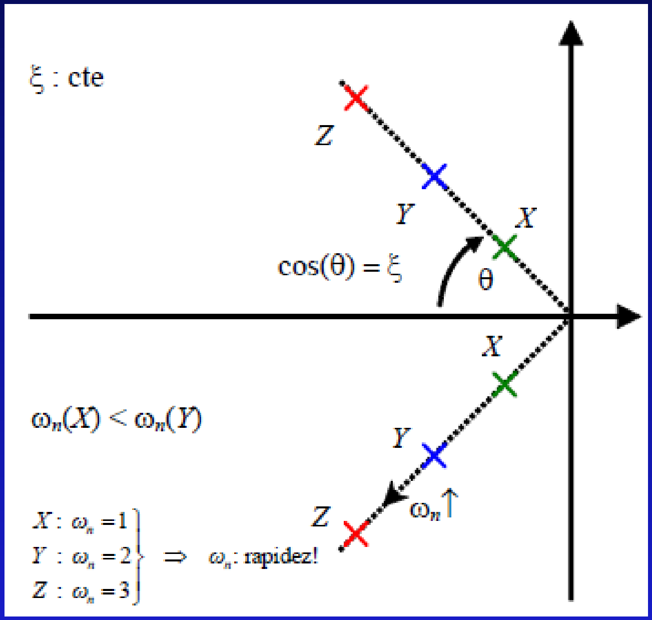


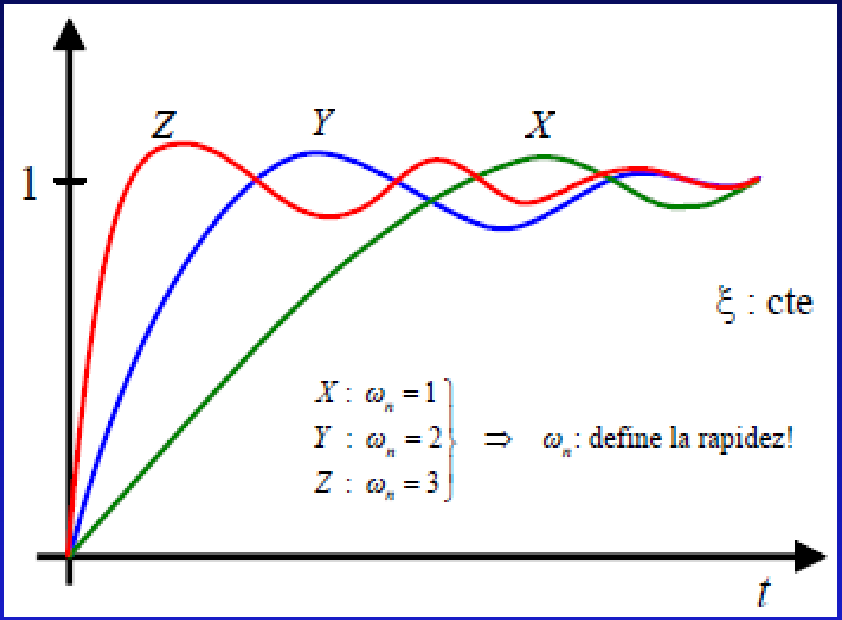


El valor de ξ define la estabilidad del sistema ante una perturbación

SISTEMAS DE 2° ORDEN

Luego para distintos valores de w_n el sistema tendrá la siguiente respuesta



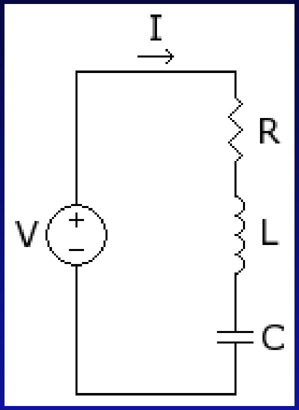


El valor de Wn define la rapidez de respuesta del sistema ante una perturbación

Un valor de Wn mas alto indica un sistema cuya respuesta es mas rápida

SISTEMAS DE 2° ORDEN
SISTEMAS TIPICOS

a) Circuito RLC serie

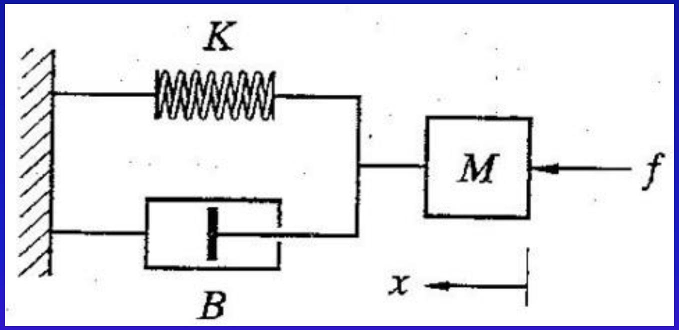


$$G(s) = \frac{I(s)}{V(s)} = \frac{1}{\tau^2 . s^2 + 2\xi\tau s + 1}$$

$$\tau = \sqrt{LC}$$

$$\xi = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$$

b) Masa suspendida de un resorte con amortiguación



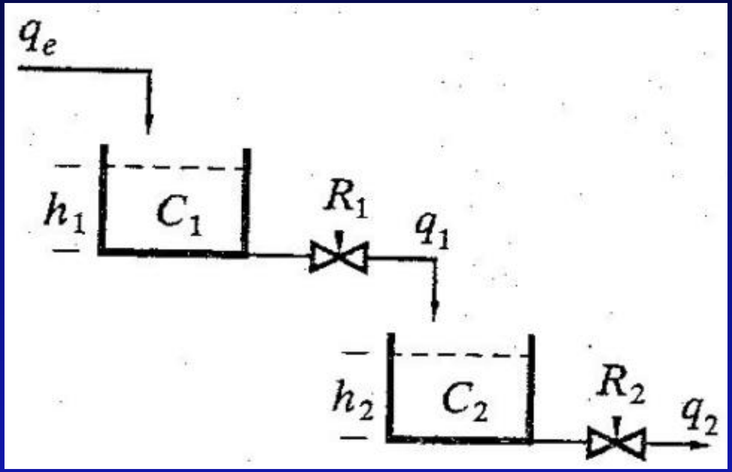
$$\tau = \sqrt{\frac{M}{K}}$$

$$\xi = \frac{B}{2\sqrt{KM}}$$

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{M . s^2 + Bs + K} = \frac{1/K}{\frac{M}{K} . s^2 + \frac{B}{K} . s + 1}$$

SISTEMAS DE 2° ORDEN
SISTEMAS TIPICOS

c) 2 Tanques conectados en serie (Sistema no interactivo)

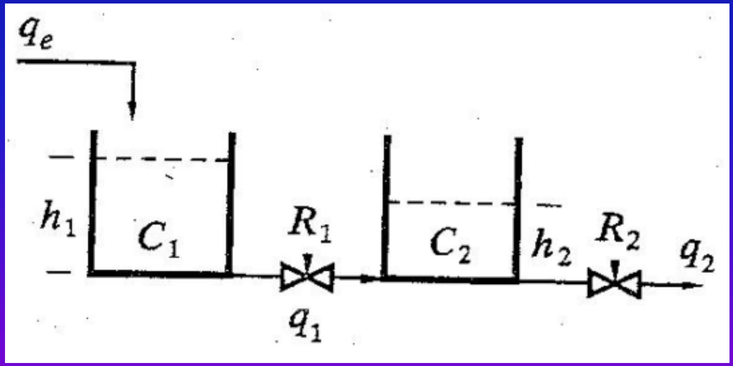


$$G(s) = \frac{Q_2}{Q_e} = \frac{1}{\tau^2 . s^2 + 2\xi\tau s + 1}$$

$$\tau = \sqrt{\tau_1 . \tau_2} \qquad \tau = R.C$$

$$\xi = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2\sqrt{\tau_1 . \tau_2}} \geq 1 \qquad C = \frac{V}{h}$$

d) 2 Tanques conectados en serie (Sistema interactivo)



$$\tau = \sqrt{\tau_1 . \tau_2}$$

$$\xi = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2\sqrt{\tau_1 . \tau_2}} + \frac{R_2 . C_1}{2\sqrt{\tau_1 . \tau_2}} > 1$$

$$G(s) = \frac{Q_2}{Q_e} = \frac{1}{\tau^2 . s^2 + 2\xi\tau s + 1}$$