

TRANSFORMADA DE LAPLACE

A decorative graphic consisting of several parallel white lines of varying lengths, all slanted upwards from left to right, located in the bottom right quadrant of the slide.

TRANSFORMADA DE LAPLACE

La transformada de Laplace de una función $f(t)$ definida para todos los números positivos $t \geq 0$, es la función $F(s)$, definida por:

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

La transformada de Laplace es un método operacional que se usa para resolver ecuaciones diferenciales lineales en los problemas de dinámica de control. Con este método se transforma una ecuación diferencial lineal en una algebraica .

TRANSFORMADA DE LAPLACE

PROPIEDADES

1) $L[A \cdot f(t)] = A \cdot L[f(t)]$ con $A = \text{cte}$

2) $L[f_1(t) + f_2(t)] = L[f_1(t)] + L[f_2(t)]$

3) Linealidad: la transformada de una combinación lineal de funciones es la suma de la combinación lineal de las transformadas.

$$L[a \cdot f(t) + b \cdot h(t)] = a L[f(t)] + b L[h(t)]$$

4) Transformada de la Derivada Primera: La transformada de la derivada primera de una función es igual a la transformada de la función sin derivar multiplicada por s , menos el valor de la función sin derivar para $t=0$

$$L[f'(t)] = s L[f(t)] - f(0)$$

TRANSFORMADA DE LAPLACE

PROPIEDADES

5) Transformada de la Derivada Segunda:

$$L[f''(t)] = s^2 L[f(t)] - s f(0) - f'(0)$$

6) Teorema de la integracion

$$L\left[\int_0^t f(t) dt\right] = \frac{1}{s} F(s)$$

7) Teorema del Valor Inicial

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot g(s)$$

TRANSFORMADA DE LAPLACE

PROPIEDADES

6) Teorema del Valor Final

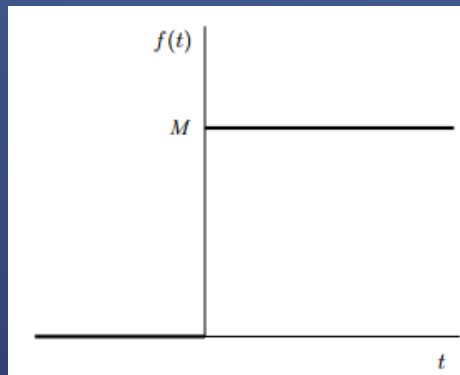
$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s g(s)$$

TRANSFORMADA DE LAPLACE

TRANSFORMADAS DE ALGUNAS FUNCIONES SINGULARES

FUNCION ESCALON

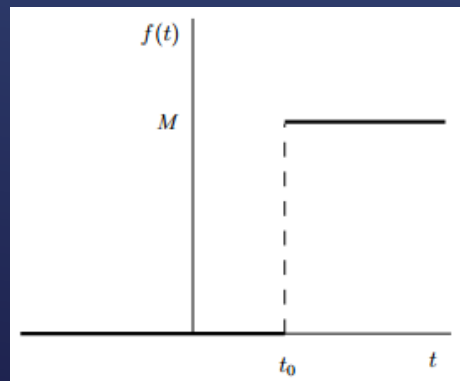
Es una función cuyo valor para tiempos menores que cero es nulo y que alcanza el valor M para tiempo mayores que 0:



$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ M & t > 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{M}{s}$$

FUNCION ESCALON retardada



$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ M & t > t_0 \end{cases}$$



$$f(t - t_0) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ M & t > 0 \end{cases}$$

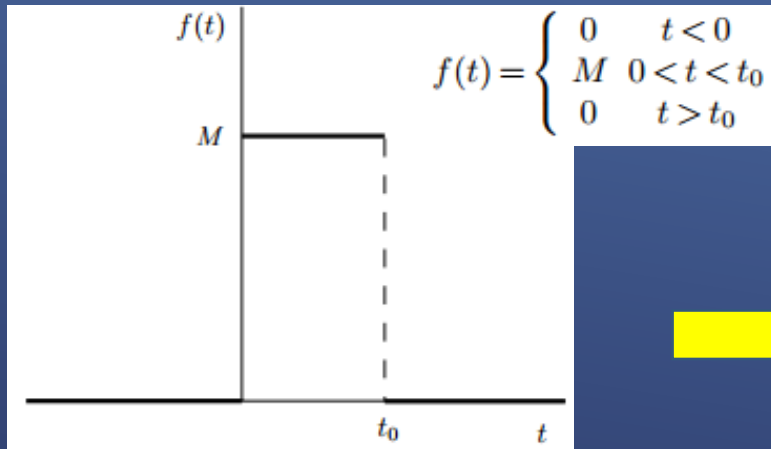
$$\mathcal{L}[f(t - t_0)] = \frac{M}{s} e^{-s t_0}$$

TRANSFORMADA DE LAPLACE

TRANSFORMADAS DE ALGUNAS FUNCIONES SINGULARES

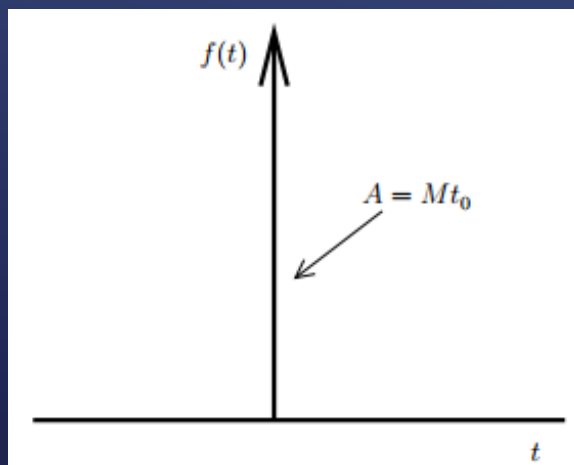
FUNCION PULSO

Se trata de una función pulso con área $A = M \cdot t_0$



$$\mathcal{L}[f(t)] = \bar{f}(s) = M \left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-st_0}}{s} \right) = \frac{M}{s} (1 - e^{-st_0})$$

FUNCION IMPULSO



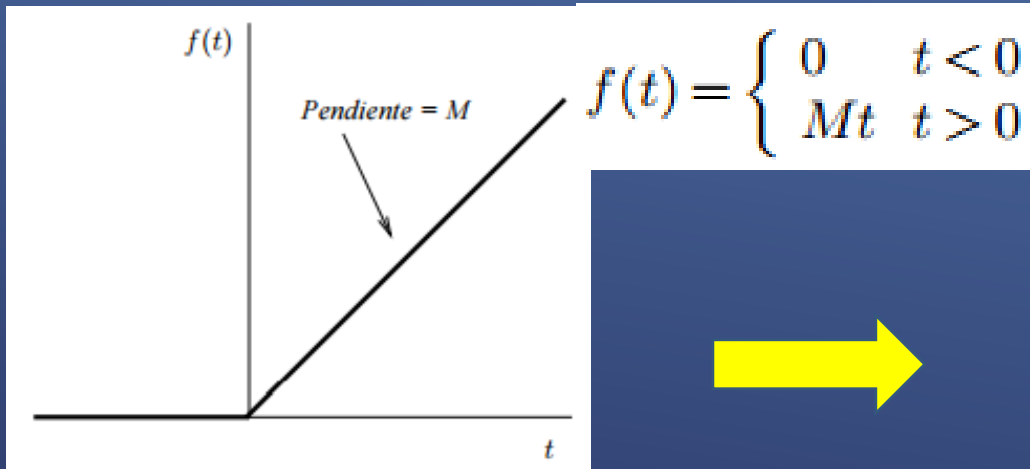
$$\mathcal{L}[f(t)] = \bar{f}(s) = A$$

TRANSFORMADA DE LAPLACE

TRANSFORMADAS DE ALGUNAS FUNCIONES SINGULARES

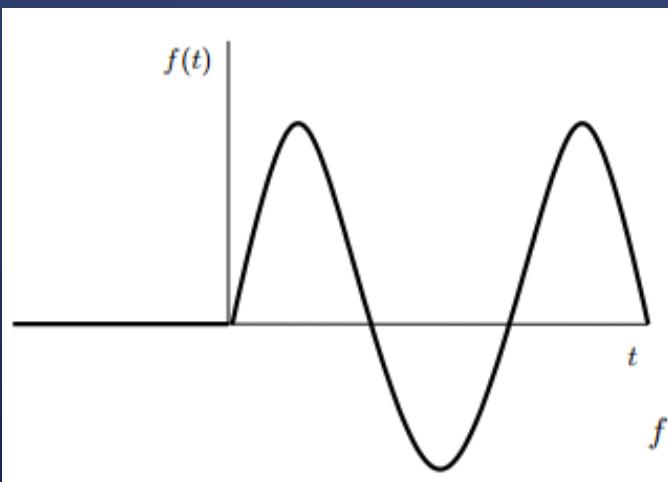
FUNCION RAMPA

Se trata de una función lineal de pendiente M



$$\mathcal{L}[Mt] = \frac{M}{s^2}$$

FUNCION SENOIDAL



$$\mathcal{L}[M \text{ sen}(\omega t)] = \frac{M\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ M \text{ sen}(\omega t) & t > 0 \end{cases} = MU(t) \text{ sen}(\omega t)$$

TRANSFORMADA DE LAPLACE

TABLA DE TRANSFORMADAS

UNJU - INSTALACIONES Y CONTROL

Operación o función	Función $f(t)$	Transformada $F(s)$
Derivadas	$\frac{d}{dt} f(t)$ $\frac{d^2}{dt^2} f(t)$ $\frac{d^3}{dt^3} f(t)$	$sF(s) - f(0)$ $s^2 F(s) - s f(0) - f'(0)$ $s^3 F(s) - s^2 f(0) - s f'(0) - f''(0)$
Integral	$\int f(t) dt$	$\frac{1}{s} F(s) + \frac{1}{s} f^{-1}(0)$
Desplazamiento	$f(t-c)$	$e^{-cs} F(s)$
Impulso unitario	$\delta(t)$	1
Salto unitario Escalón	$H(t)$	$\frac{1}{s}$
Rampa	t t^n	$\frac{1}{s^2}$ $\frac{n!}{s^{n+1}}$
Senoidales	$\text{sen } \omega t$ $\text{cos } \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ $\frac{s}{s^2 + \omega^2}$

TRANSFORMADA DE LAPLACE

TABLA DE TRANSFORMADAS

UNJU - INSTALACIONES Y CONTROL

Operación o función	Función f(t)	Transformada F(s)
Exponencial	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
Valor inicial	$\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$	$\lim_{s \rightarrow \infty} s F(s)$
Valor final	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$	$\lim_{s \rightarrow 0} s F(s)$
1er. orden	$(1 - e^{-t/T})$	$\frac{1}{s(Ts + 1)}$
Rampa sobre 1er orden	$t - T(1 - e^{-t/T})$	$\frac{1}{s^2(Ts + 1)}$
n sistemas de 1er orden	$1 - \left(1 + \frac{t}{T} + \frac{t^2}{2T^2} + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)T^{n-1}}\right) * e^{-t/T}$	$\frac{1}{s(Ts + 1)^n}$