

Análisis de sensibilidad

Enrique E. Tarifa, Facultad de Ingeniería, UNJu

Mapa curricular de la materia

Simulación



Optimización

Mapa curricular de la materia

Simulación

Optimización



Mapa curricular de Optimización

Definiciones

Modelo de optimización

Programación no lineal

Programación lineal

Análisis de sensibilidad

Mapa curricular de Optimización

Definiciones

Modelo de optimización

Programación no lineal

Programación lineal

Análisis de sensibilidad

Mapa curricular de análisis de sensibilidad

1. Método gráfico
2. Holgura y exceso
3. Precio dual
4. Costo reducido
5. Rango
6. Análisis de sensibilidad
7. Estabilidad del óptimo
8. Mejora del óptimo

Análisis de sensibilidad

Etapas de la optimización

1. Especificación del problema
2. Formulación del modelo
3. Resolución del modelo
4. Verificación de las condiciones de optimalidad
5. Análisis de sensibilidad

Utilidad del análisis de sensibilidad

- ¿Qué tan sensible es el óptimo a variaciones de los parámetros?
- ¿Qué se puede hacer para obtener un mejor óptimo?
- ¿Dónde se debe concentrar una nueva inversión?
- ¿Cómo se puede ahorrar recursos?

Fábrica de vidrio

Artículos de vidrio

Una empresa produce dos tipos de vidrio de alta calidad. Cada producto es producido en sendas plantas. En una tercera, se realiza el *packaging* de ambos. Se desea determinar la proporción correcta a producir.

Parámetros

Planta	Producto 1 (kW·min/m ²)	Producto 2 (kW·min/m ²)	Capacidad (kW)
1	1	no se fabrica	4
2	no se fabrica	2	12
3	3	2	18

	Producto 1	Producto 2
Beneficios (\$/m ²)	3	5

Elementos del modelo

- Variables de decisión:
 - x_1 : Velocidad de producción del artículo 1 (m^2/min).
 - x_2 : Velocidad de producción del artículo 2 (m^2/min).
- Función objetivo:
 - Beneficios (\$/min): $3 x_1 + 5 x_2$.
- Restricciones:
 - Potencia consumida por la planta 1 (kW): $1 x_1 \leq 4$.
 - Potencia consumida por la planta 2 (kW): $2 x_2 \leq 12$.
 - Potencia consumida por la planta 3 (kW): $3 x_1 + 2 x_2 \leq 18$.

Fábrica de vidrio

$$\text{Max}_{x_1, x_2} 3x_1 + 5x_2$$

s. a:

$$x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Solución gráfica

Método gráfico

Región factible y curvas de nivel

$$z = 3x_1 + 5x_2$$

s. a:

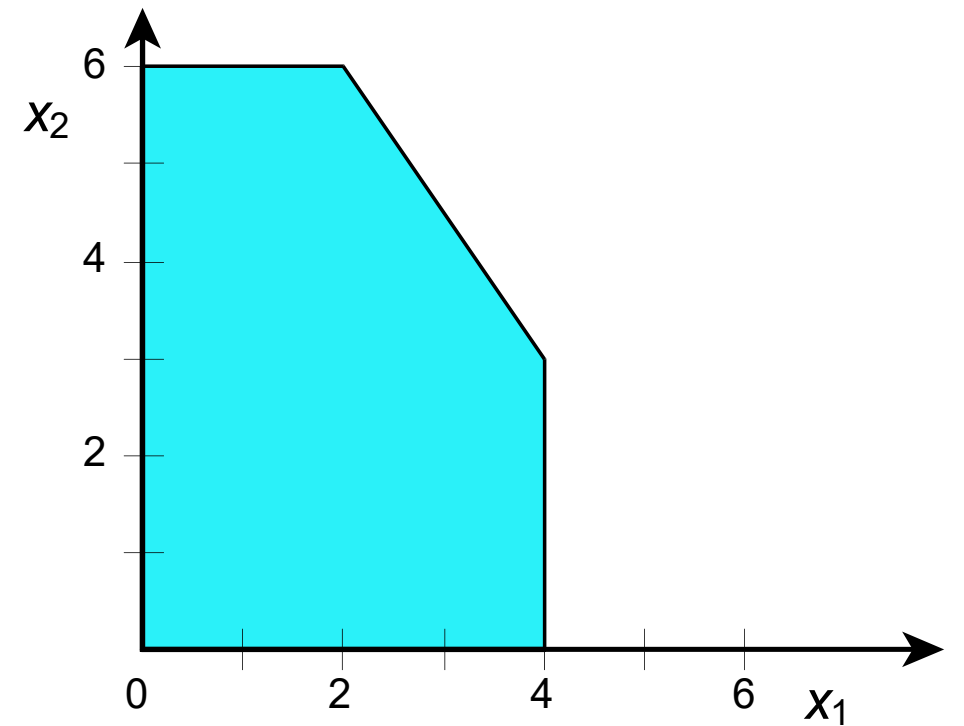
$$x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$



Región factible y curvas de nivel

$$z = 3x_1 + 5x_2$$

s. a:

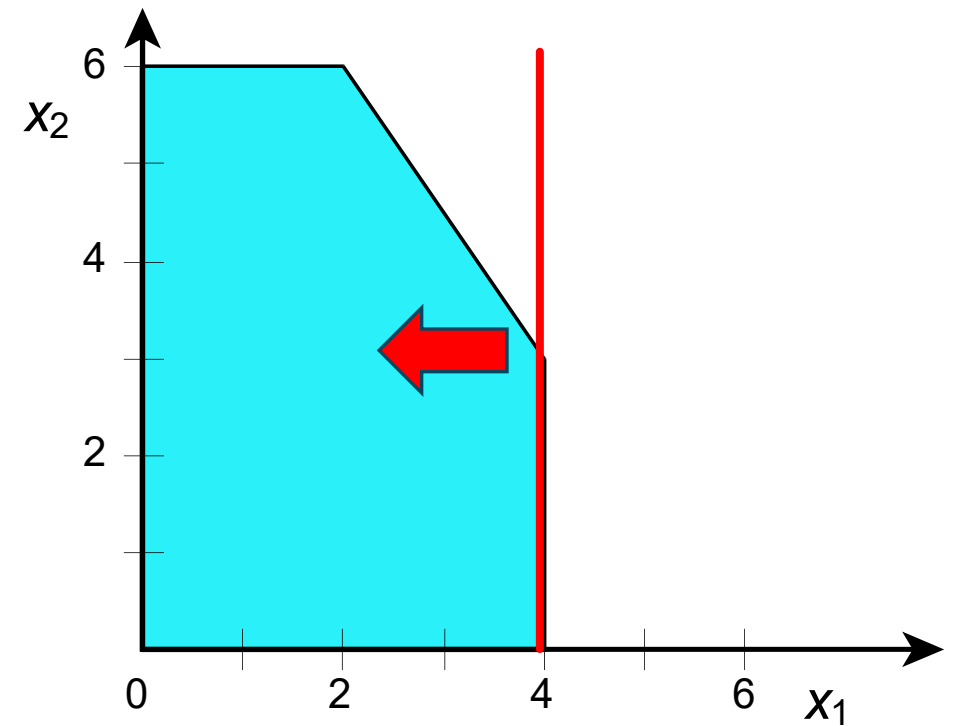
$$x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$



Región factible y curvas de nivel

$$z = 3x_1 + 5x_2$$

s. a:

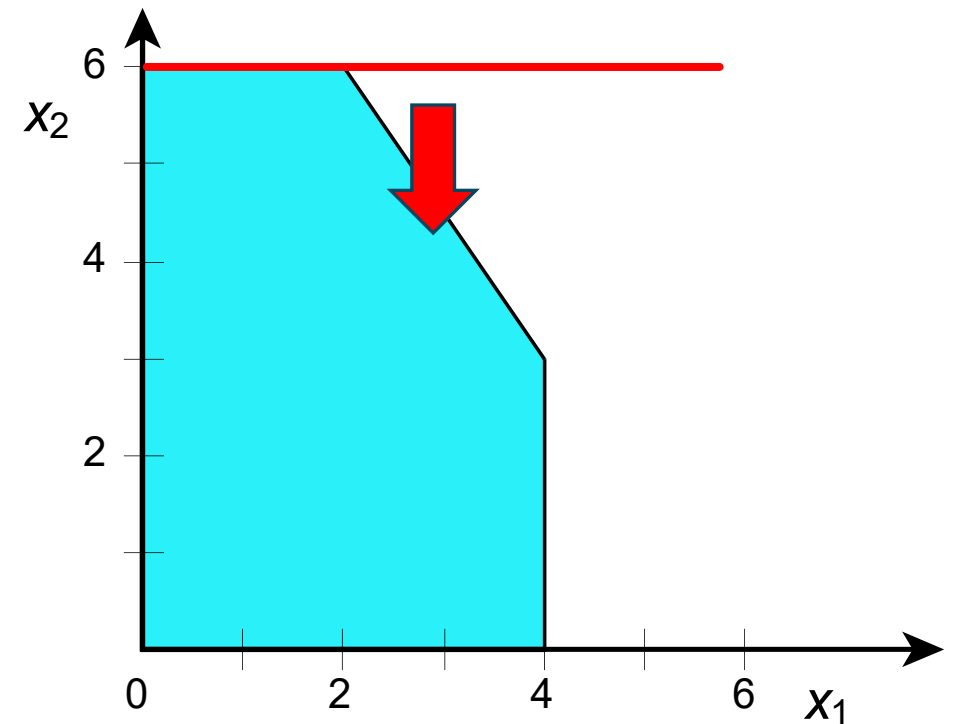
$$x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$



Región factible y curvas de nivel

$$z = 3x_1 + 5x_2$$

s. a:

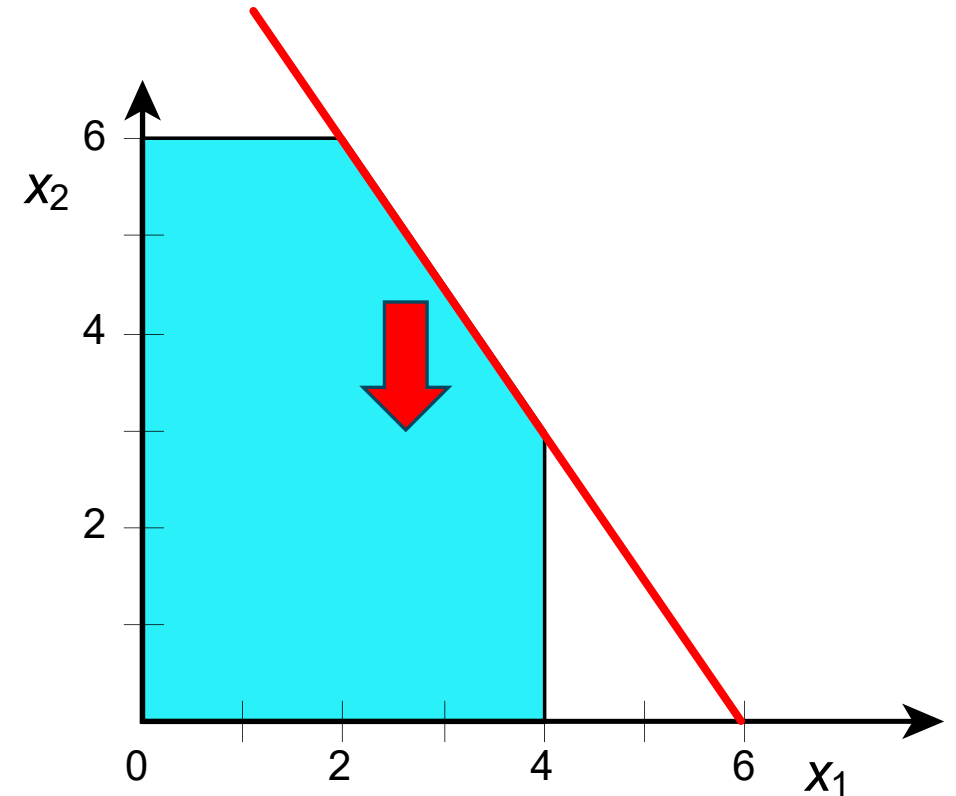
$$x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$



Región factible y curvas de nivel

$$z = 3x_1 + 5x_2$$

s. a:

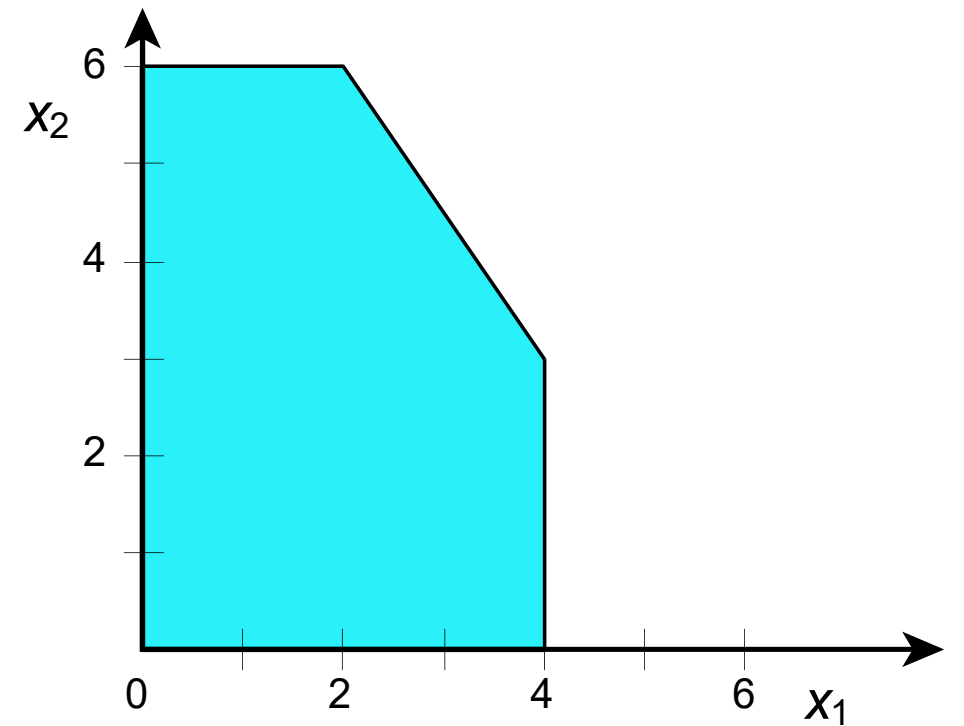
$$x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

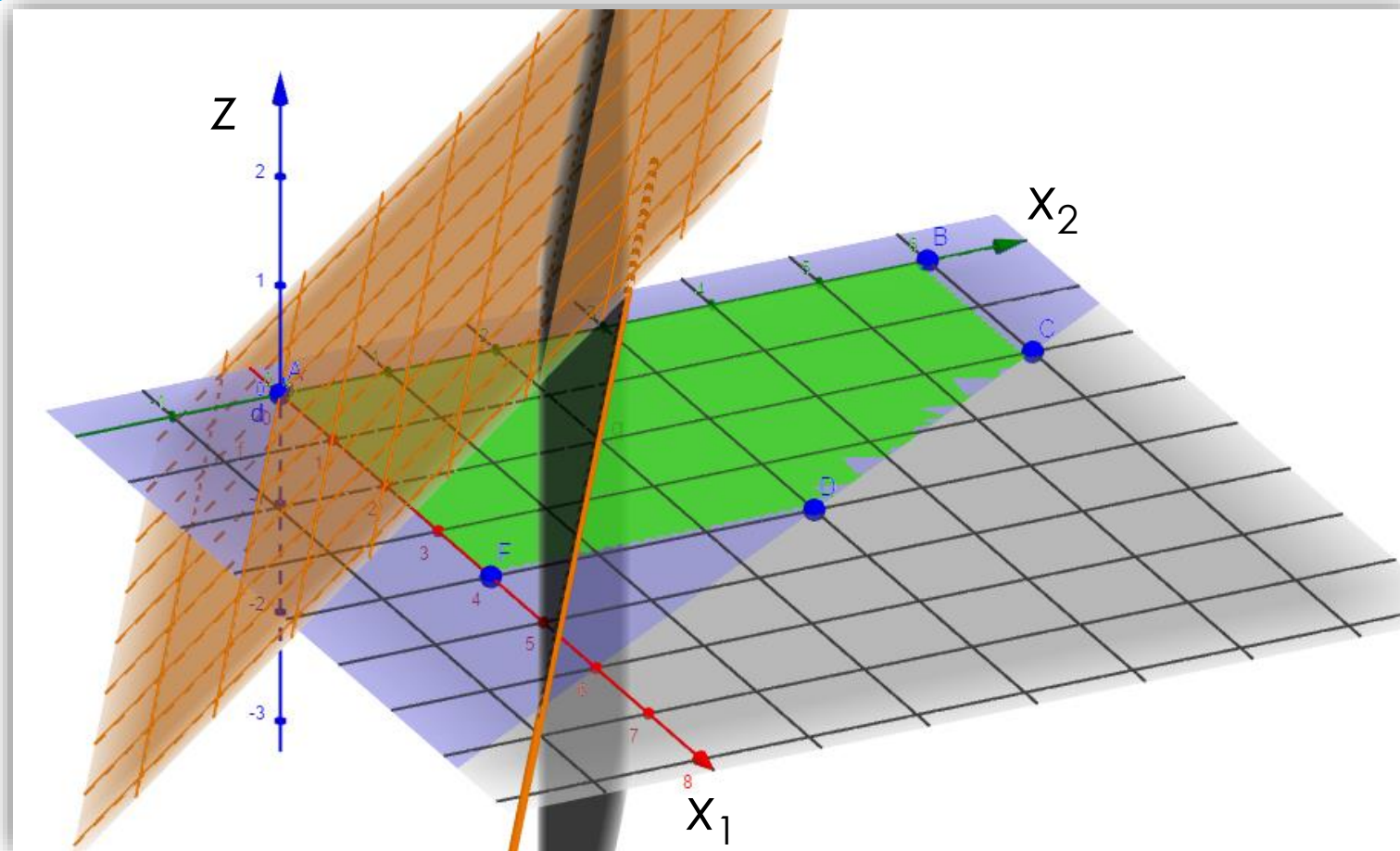
$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$



Región factible y curvas de nivel



Región factible y curvas de nivel

$$z = 3x_1 + 5x_2$$

s. a:

$$x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$x_2 = \frac{1}{5}z - \frac{3}{5}x_1$$

s. a:

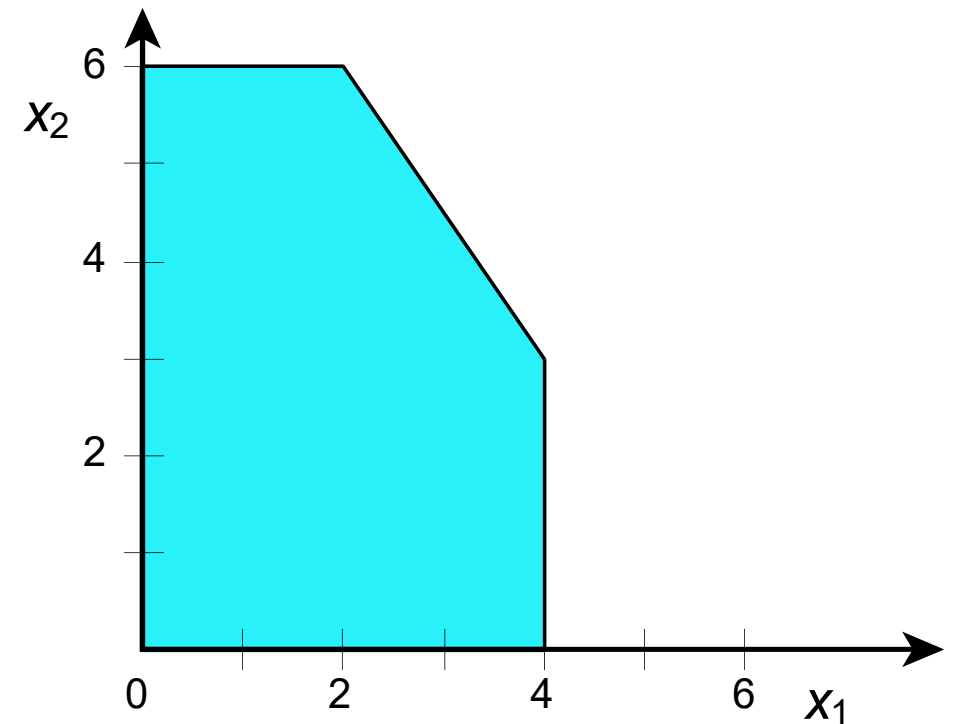
$$x_1 \leq 4$$

$$x_2 \leq 6$$

$$x_2 \leq 9 - \frac{3}{2}x_1$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$



Región factible y curvas de nivel

$$z = 3x_1 + 5x_2$$

s. a:

$$x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$x_2 = \frac{1}{5}z - \frac{3}{5}x_1$$

s. a:

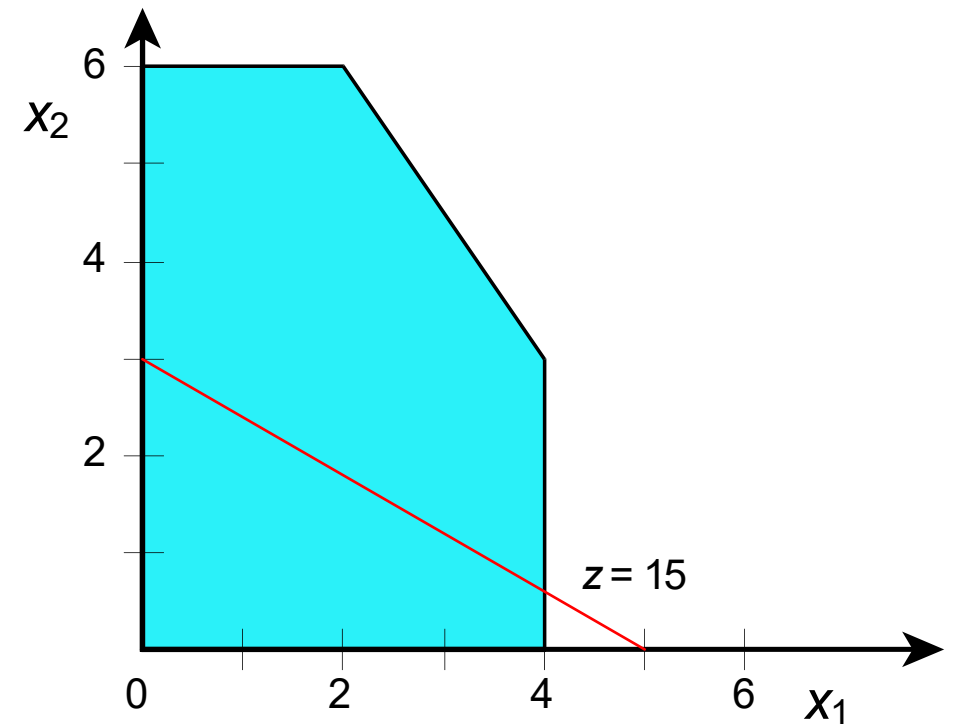
$$x_1 \leq 4$$

$$x_2 \leq 6$$

$$x_2 \leq 9 - \frac{3}{2}x_1$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$



Región factible y curvas de nivel

$$z = 3x_1 + 5x_2$$

s. a:

$$x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$x_2 = \frac{1}{5}z - \frac{3}{5}x_1$$

s. a:

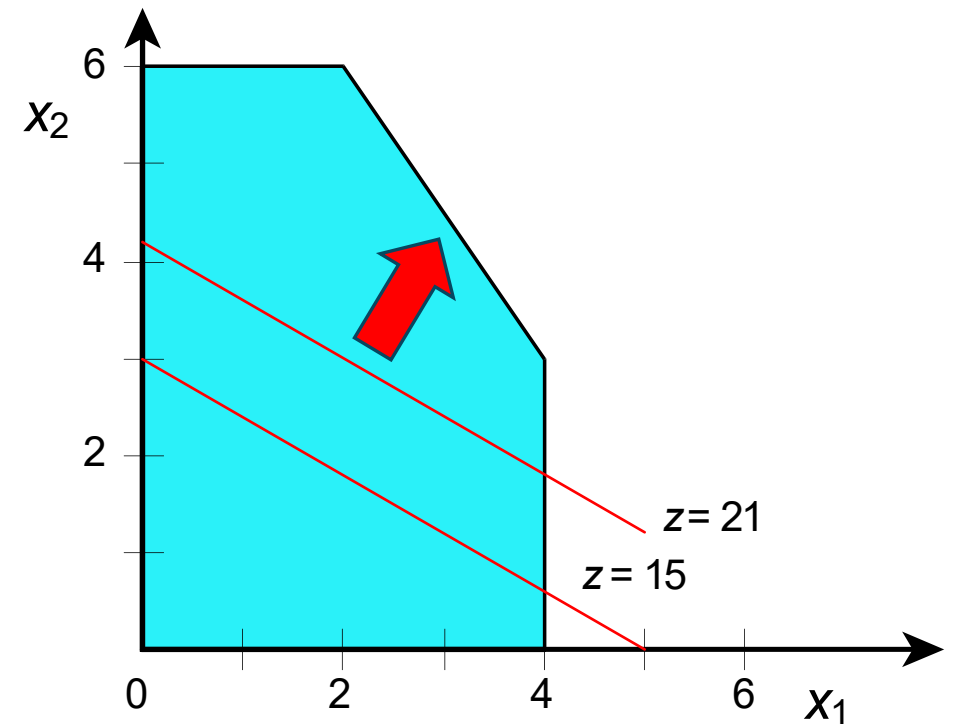
$$x_1 \leq 4$$

$$x_2 \leq 6$$

$$x_2 \leq 9 - \frac{3}{2}x_1$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$



Región factible y curvas de nivel

$$z = 3x_1 + 5x_2$$

s. a:

$$x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$x_2 = \frac{1}{5}z - \frac{3}{5}x_1$$

s. a:

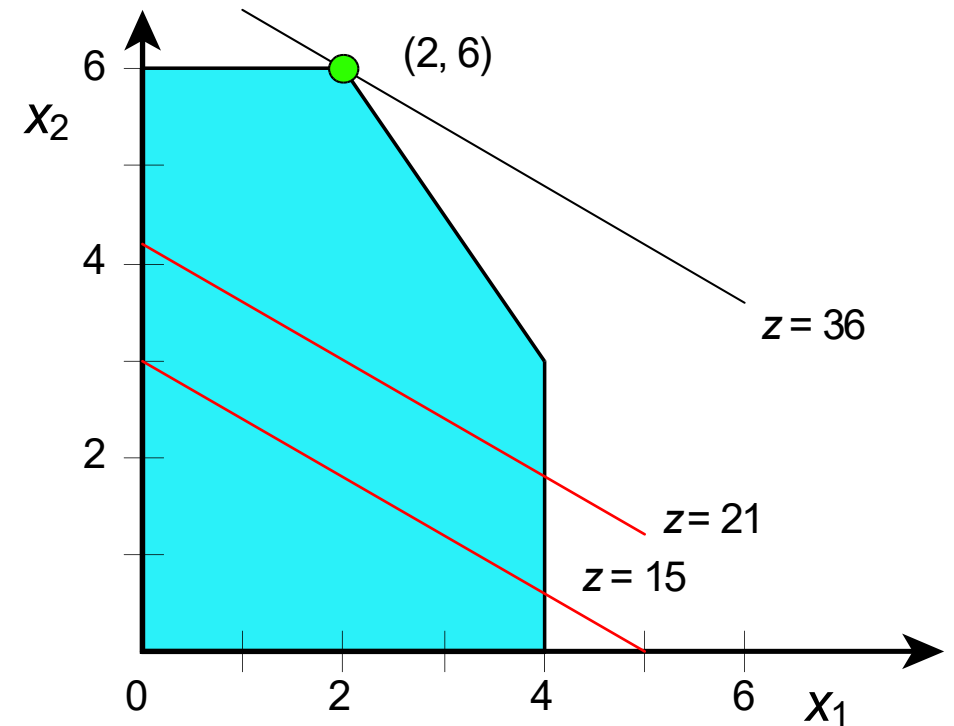
$$x_1 \leq 4$$

$$x_2 \leq 6$$

$$x_2 \leq 9 - \frac{3}{2}x_1$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$



Solución gráfica

$$\text{Max } 3x_1 + 5x_2$$

x_1, x_2

s. a:

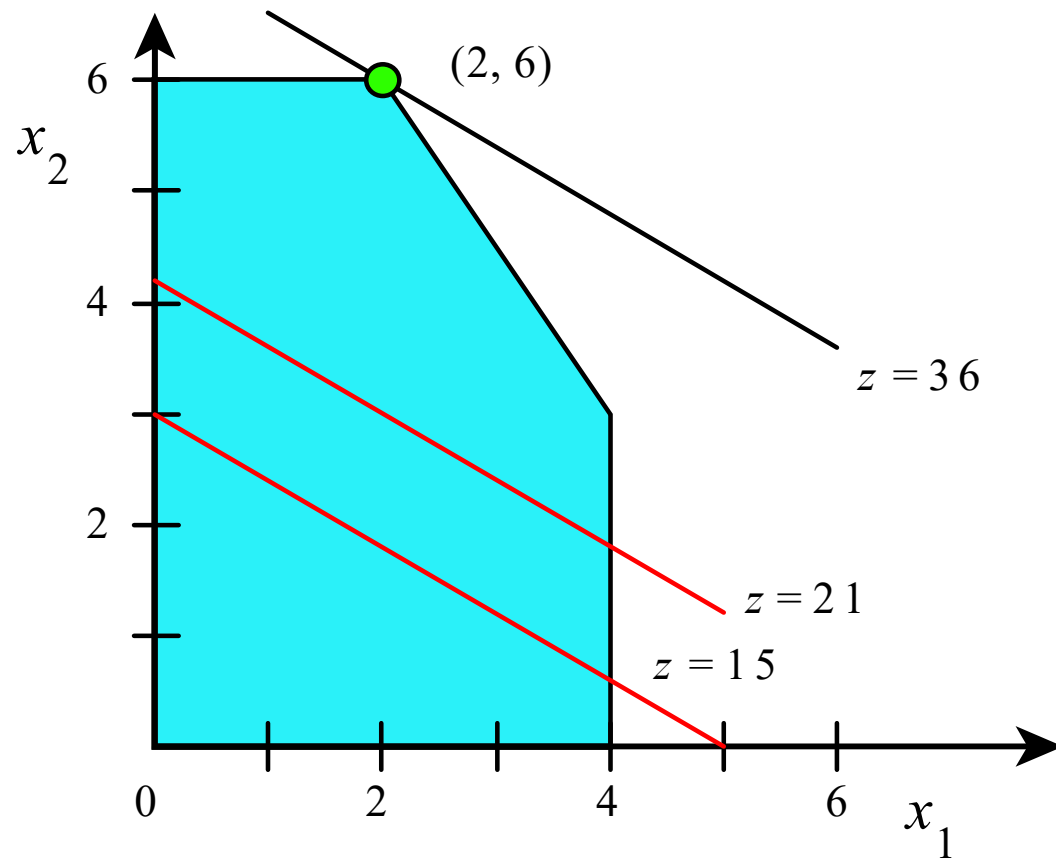
$$x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$



Fábrica de pinturas

Fábrica de pinturas

Una fábrica produce pintura amarilla (A) y pintura celeste (C). Existen dos líneas de producción, una para cada color. La capacidad de la línea A es 60 m^3 por día, mientras que la capacidad de la línea C es 50 m^3 por día. Un metro cúbico de A requiere 1 h-hombre de labor, mientras que un metro cúbico de C requiere 2 h-hombre. Se disponen de 120 h-hombre como máximo por día que pueden ser asignadas indistintamente a la producción de ambos colores. La contribución a los beneficios de la empresa es \$20 y \$30 por metro cúbico de A y C, respectivamente. Se debe determinar el plan de producción diaria óptimo.

Elementos del modelo

- Parámetros:

- $m = 3$, LA, LC y MO

- $n = 2$, A y C

- $b = 20\ 30$ (\$/m³)

- $s = 60$ (m³/d)

- 50 (m³/d)

- 120 (h-hombre/d)

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & C \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{matrix} LA \\ LC \\ MO \end{matrix} \end{matrix}$$

Elementos del modelo

- Variables de decisión:
 - $x = A \ C \ (\text{m}^3/\text{d})$
- Función objetivo:
 - Beneficios (\$/d): $20 A + 30 C$
- Restricciones:
 - Capacidad de la línea A (m^3/d): $A \leq 60$
 - Capacidad de la línea C (m^3/d): $C \leq 50$
 - Mano de obra (h-hombre/d): $A + 2 C \leq 120$

Fábrica de pinturas

$$\text{Max}_{A,C} 20 A + 30 C$$

s. a :

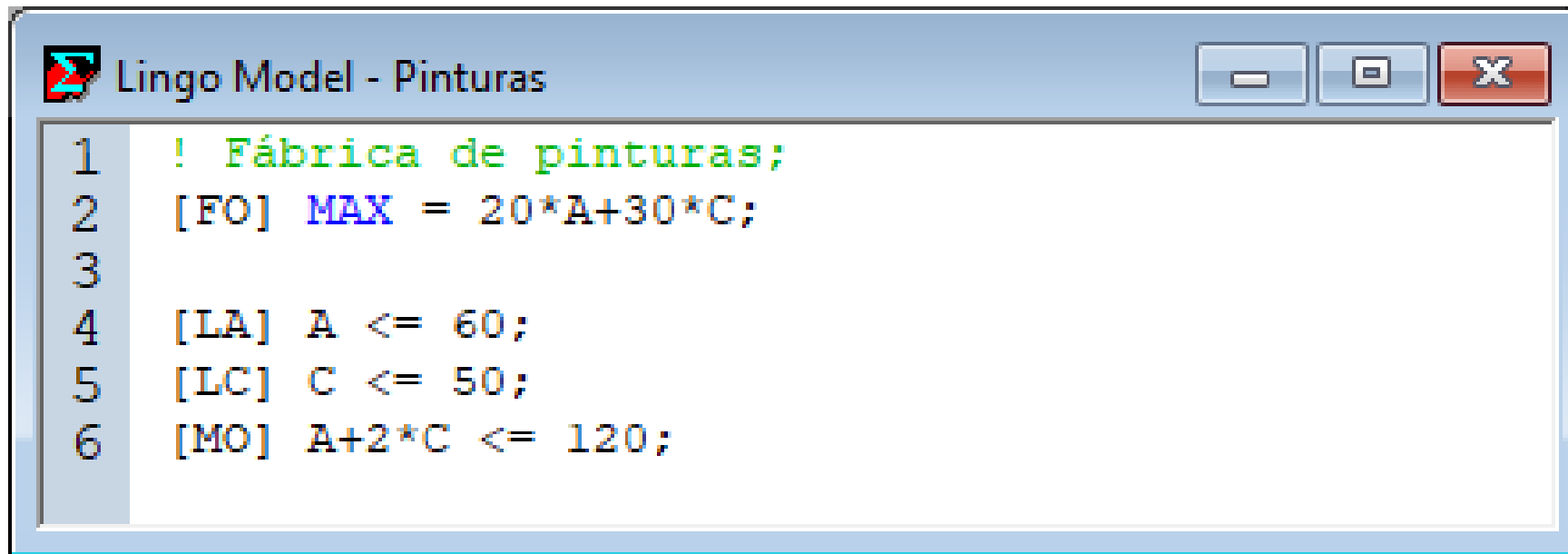
$$A \leq 60$$

$$C \leq 50$$

$$A + 2 C \leq 120$$

$$A \geq 0, C \geq 0$$

Modelo en LINGO



```
1  ! Fábrica de pinturas;  
2  [FO] MAX = 20*A+30*C;  
3  
4  [LA] A <= 60;  
5  [LC] C <= 50;  
6  [MO] A+2*C <= 120;
```

Resultados en LINGO

Variable	Value	Reduced Cost
A	60.00000	0.000000
C	30.00000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
FO	2100.000	1.000000
LA	0.000000	5.000000
LC	20.00000	0.000000
MO	0.000000	15.00000

Se activaron LA y MO. Hacen valer la igualdad. Se acabaron esos recursos.

Fábrica de pinturas

Enter the linear programming problem here:

☒ Maximize $z = 20x + 30y$ subject to the constraints:
☐ Minimize
☐ Show only the region defined by the following constraints:

$x \leq 60$
 $y \leq 50$
 $x + 2y \leq 120$

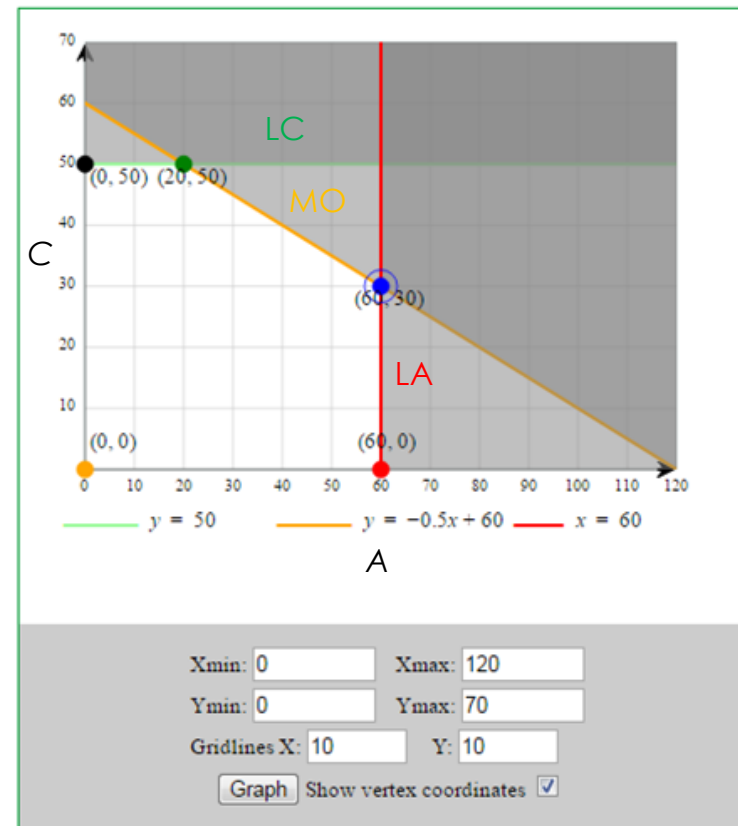
LP Examples Graphing Examples Solve

Rounding: 4 decimal places Fraction Mode ☐

Erase Everything

The solution will appear below.

Vertex	Lines through vertex	Value of objective
• (60, 30)	$x = 60$ $x + 2y = 120$	2100 Maximum
• (60, 0)	$x = 60$ $y = 0$	1200
• (20, 50)	$y = 50$ $x + 2y = 120$	1900
• (0, 50)	$y = 50$ $x = 0$	1500
• (0, 0)	$x = 0$ $y = 0$	0



Simplex

Holgura y exceso

Resultados en LINGO

Variable	Value	Reduced Cost
A	60.00000	0.000000
C	30.00000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
FO	2100.000	1.000000
LA	0.000000	5.000000
LC	20.00000	0.000000
MO	0.000000	15.00000

Holgura

- Holgura o *slack*: Es una variable no negativa que se suma a una restricción para convertirla en igualdad.
- Representa la cantidad de recurso no utilizado.

$$g(x) \leq 0$$

$$g(x) + \textit{Slack} = 0$$

$$-3 \leq 0$$

$$-3 + 3 = 0$$

$$3 \leq 0$$

$$3 + (-3) = 0$$

Exceso

- Exceso o *surplus*: Es una variable no negativa que se resta de una restricción para convertirla en igualdad.
- Representa la cantidad en que se excede el mínimo requerido.

$$g(x) \geq 0$$

$$g(x) - \textit{Surplus} = 0$$

$$3 \geq 0$$

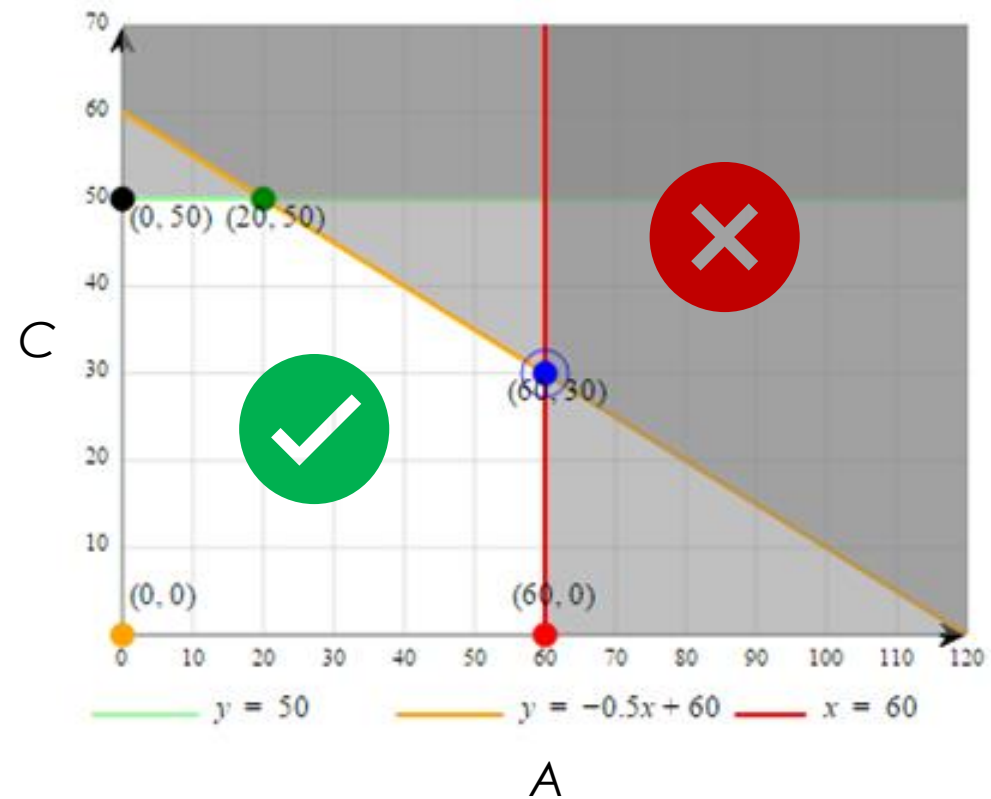
$$3 - 3 = 0$$

$$-3 \geq 0$$

$$-3 - (-3) = 0$$

Factibilidad

- En la región factible:
 - $Slack \geq 0$
 - $Surplus \geq 0$
- Fuera de la región factible:
 - $Slack < 0$
 - $Surplus < 0$

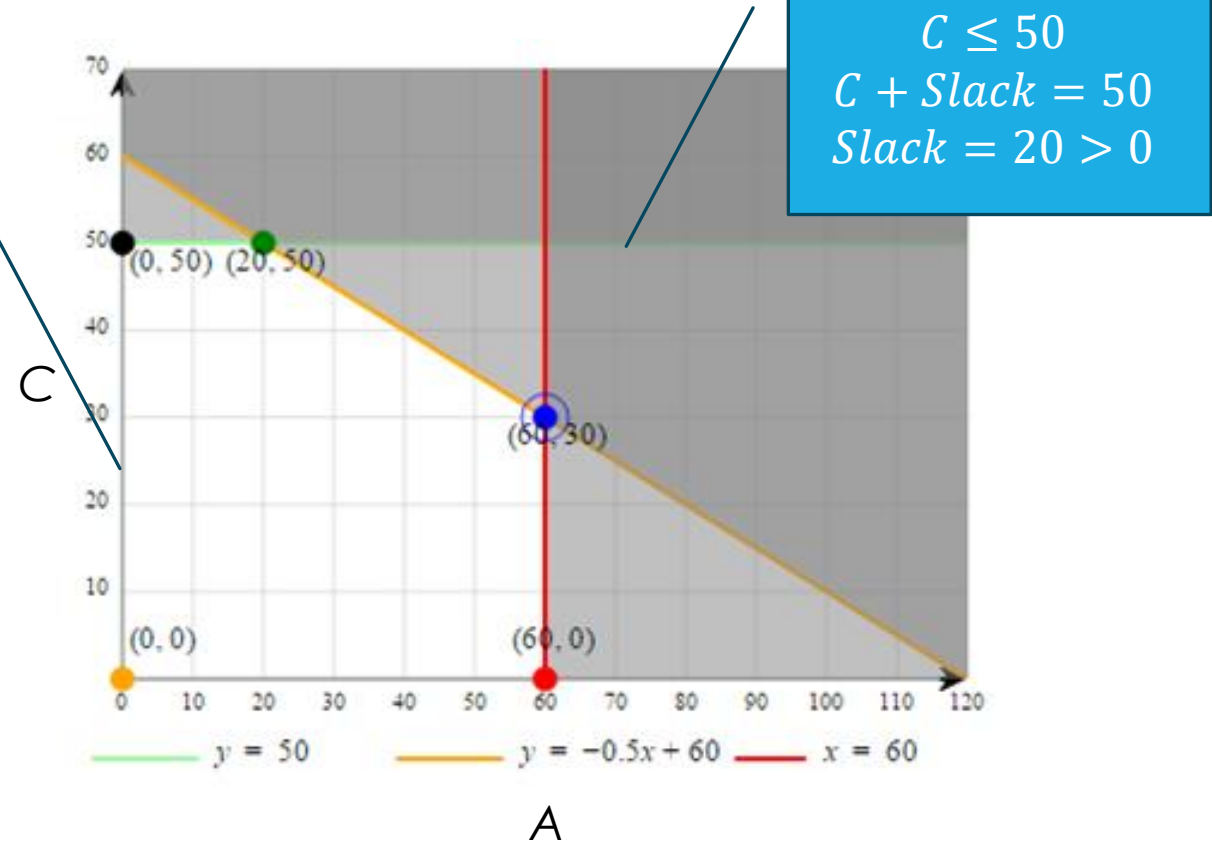


Interior de la región factible

- Restricciones no activas:

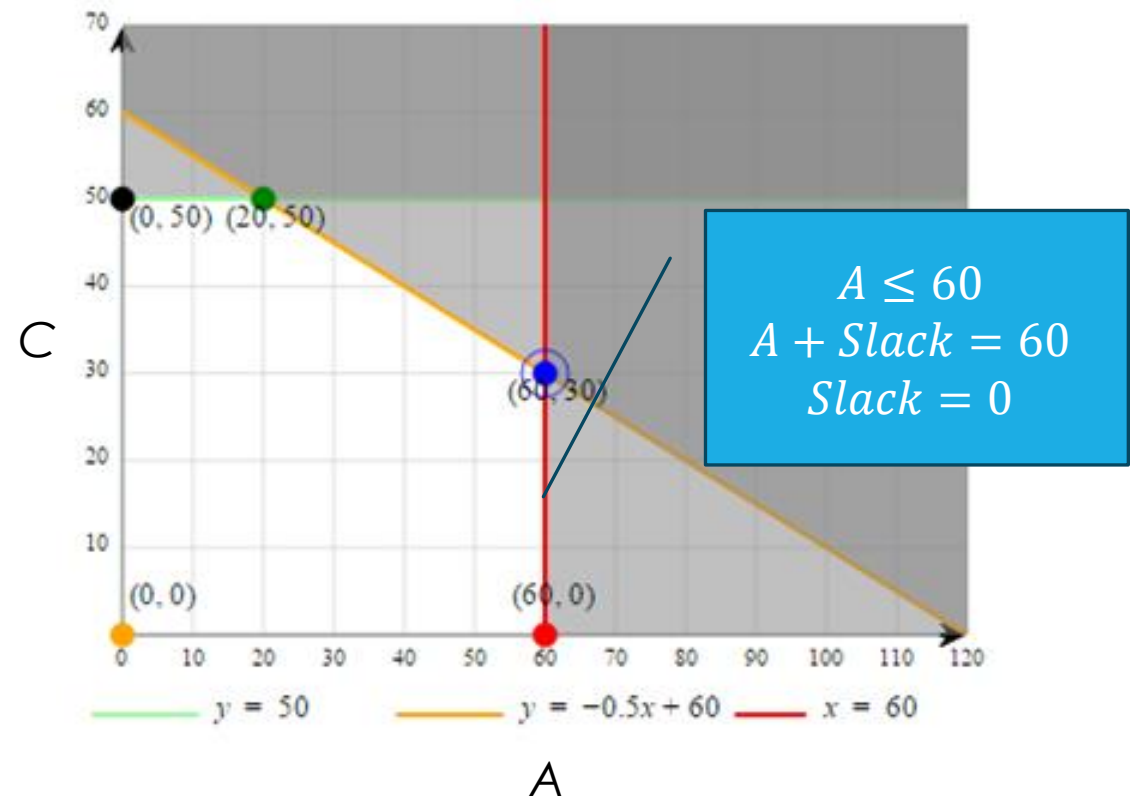
- $Slack > 0$
- $Surplus > 0$

$$\begin{aligned} A &\geq 0 \\ A - Surplus &= 0 \\ Surplus &= 60 > 0 \end{aligned}$$



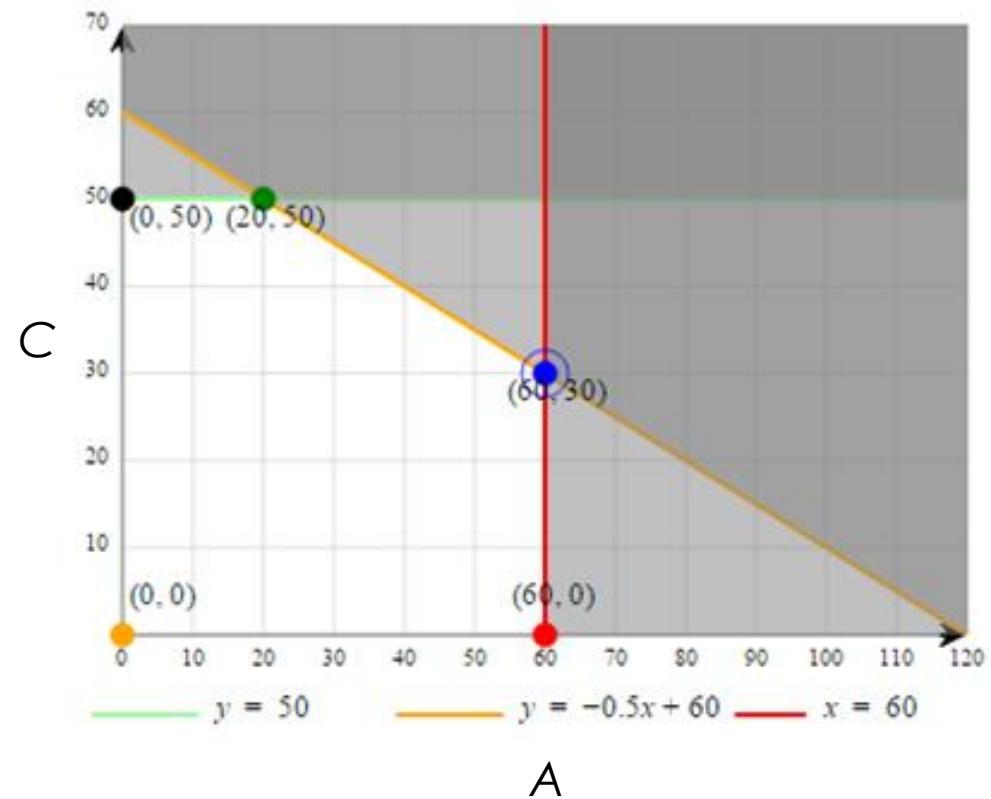
Aristas de la región factible

- Restricciones activas:
 - $Slack = 0$
 - $Surplus = 0$



Holgura y exceso

- Restricciones no activas:
 - $Slack > 0$
 - $Surplus > 0$
- Restricciones activas:
 - $Slack = 0$
 - $Surplus = 0$



Fábrica de pinturas

[FO] $\text{MAX} = 20 \cdot A + 30 \cdot C;$

[LA] $A \leq 60;$

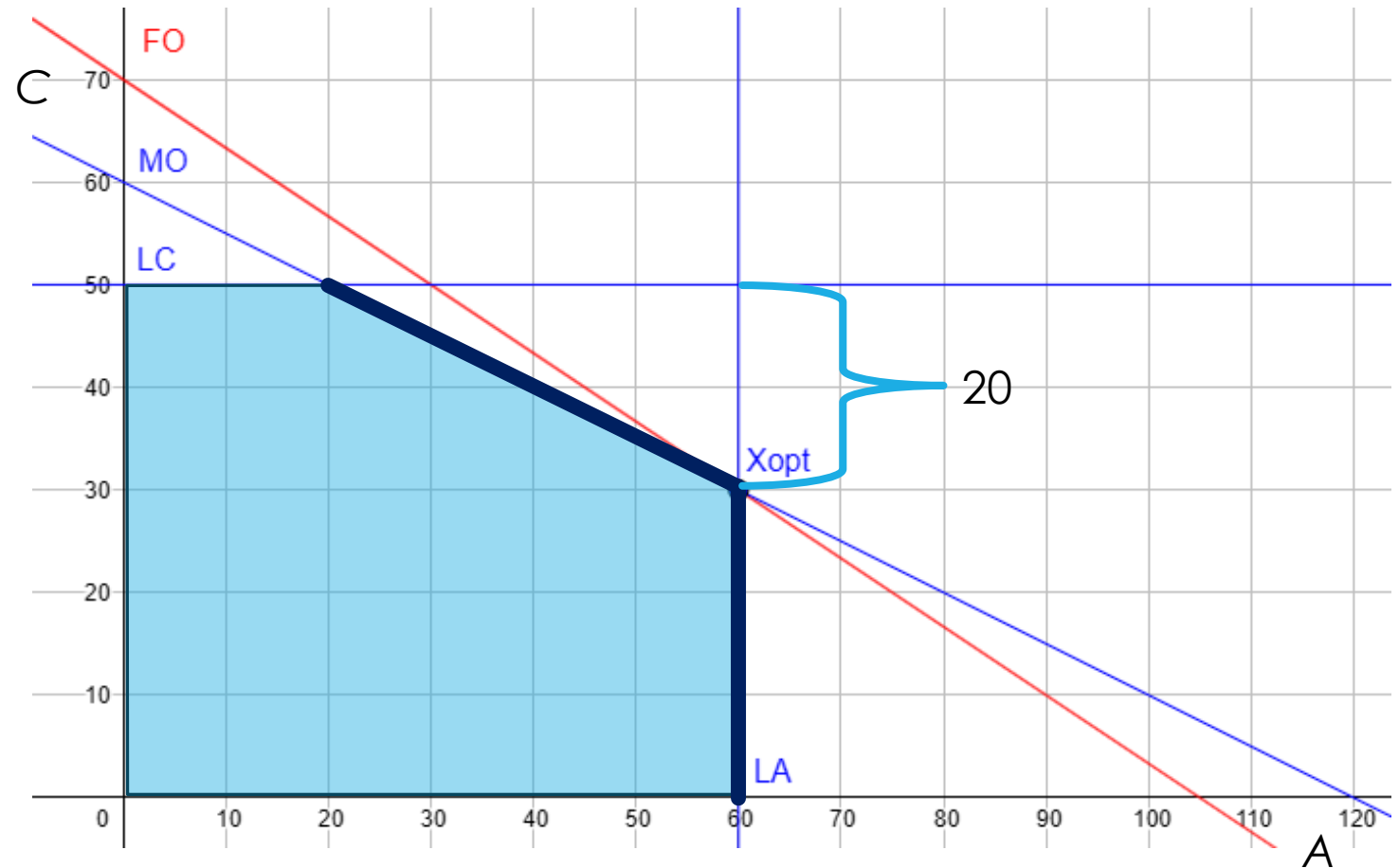
[LC] $C \leq 50;$

[MO] $A + 2 \cdot C \leq 120;$

Variable		Value	Reduced Cost
A		60.00000	0.000000
C		30.00000	0.000000
Row	Slack or Surplus		Dual Price
FO	2100.000		1.000000
LA	0.000000		5.000000
LC	20.00000		0.000000
MO	0.000000		15.00000

Fábrica de pinturas

Row	Slack or Surplus
FO	2100.000
LA	0.000000
LC	20.00000
MO	0.000000



Precio dual

Resultados en LINGO

Variable	Value	Reduced Cost
A	60.00000	0.000000
C	30.00000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
FO	2100.000	1.000000
LA	0.000000	5.000000
LC	20.00000	0.000000
MO	0.000000	15.00000

Precio dual

- El precio dual (*dual price*) de una restricción es la cantidad en que la función objetivo mejorará cuando se incremente una unidad a la constante del lado derecho de la restricción que tiene un precio dual positivo.
- Que mejore la función objetivo significa que aumenta si se está maximizando, y disminuye si se está minimizando.
- El precio dual de una restricción se llama también precio sombra debido a que indica cuánto se debería estar dispuestos a pagar como máximo por una unidad extra del recurso en consideración.

Fábrica de pinturas

[FO] $\text{MAX} = 20 \cdot A + 30 \cdot C;$

[LA] $A \leq 60;$

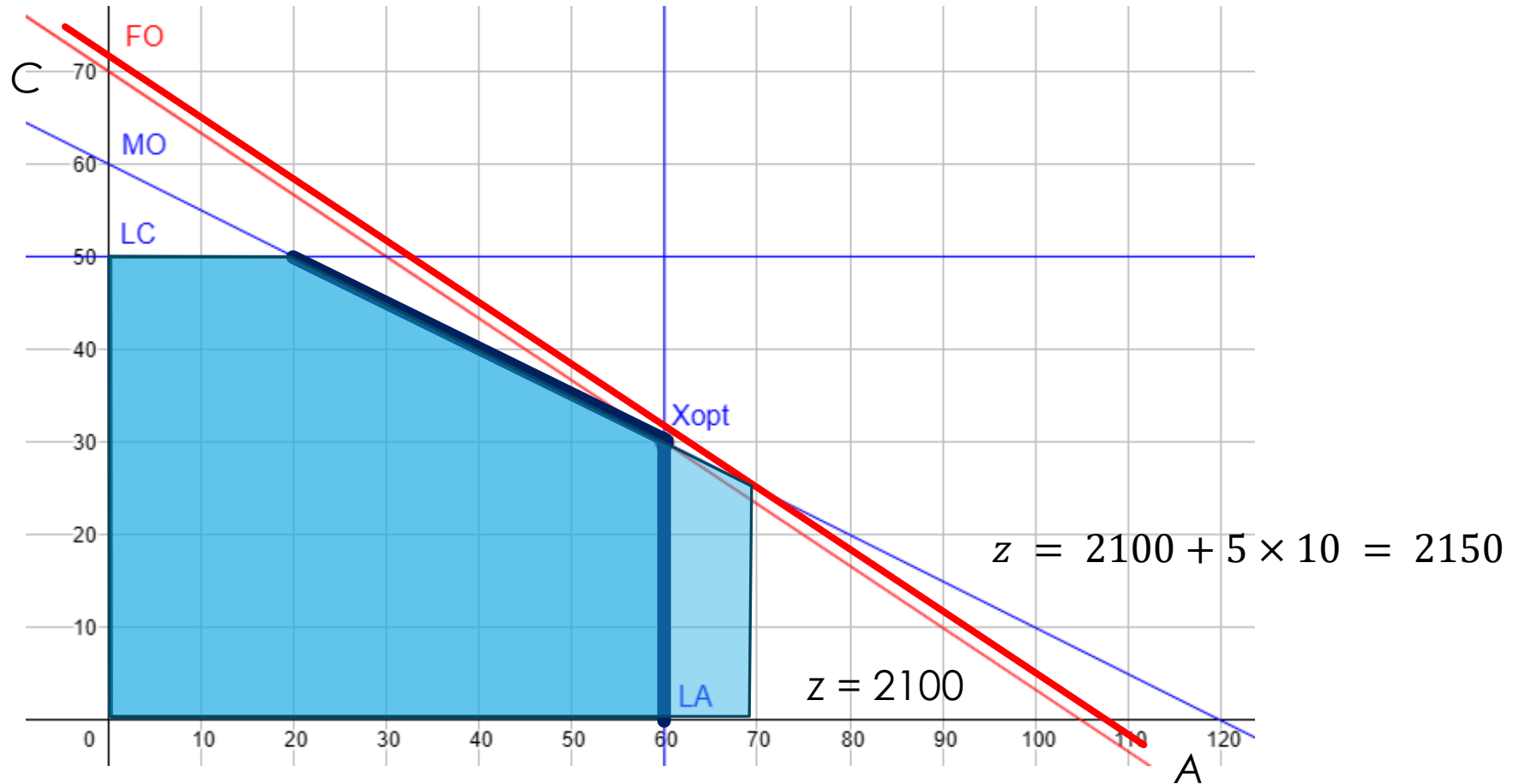
[LC] $C \leq 50;$

[MO] $A + 2 \cdot C \leq 120;$

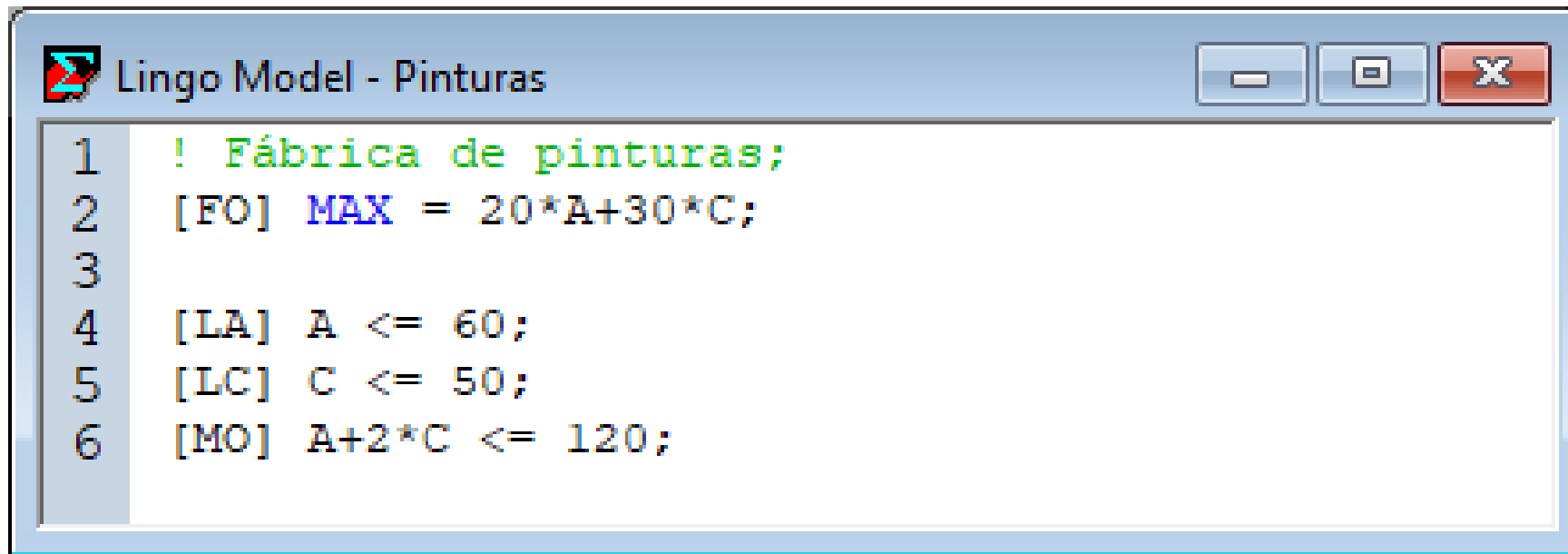
Variable		Value	Reduced Cost
A		60.00000	0.000000
C		30.00000	0.000000
Row	Slack or Surplus		Dual Price
FO	2100.000		1.000000
LA	0.000000		5.000000
LC	20.00000		0.000000
MO	0.000000		15.00000

Precio dual

Se aumenta la capacidad de la línea A en 10 unidades.

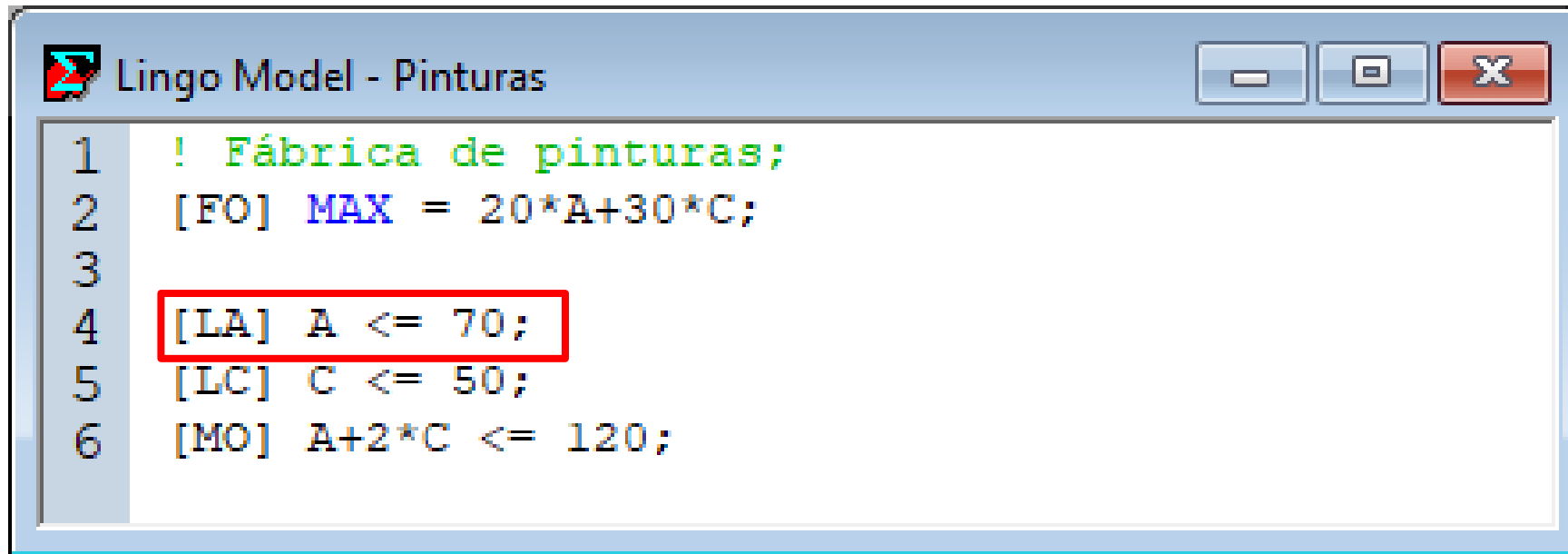


Problema con LA original



```
1  ! Fábrica de pinturas;  
2  [FO] MAX = 20*A+30*C;  
3  
4  [LA] A <= 60;  
5  [LC] C <= 50;  
6  [MO] A+2*C <= 120;
```

Aumento de 10 unidades en LA



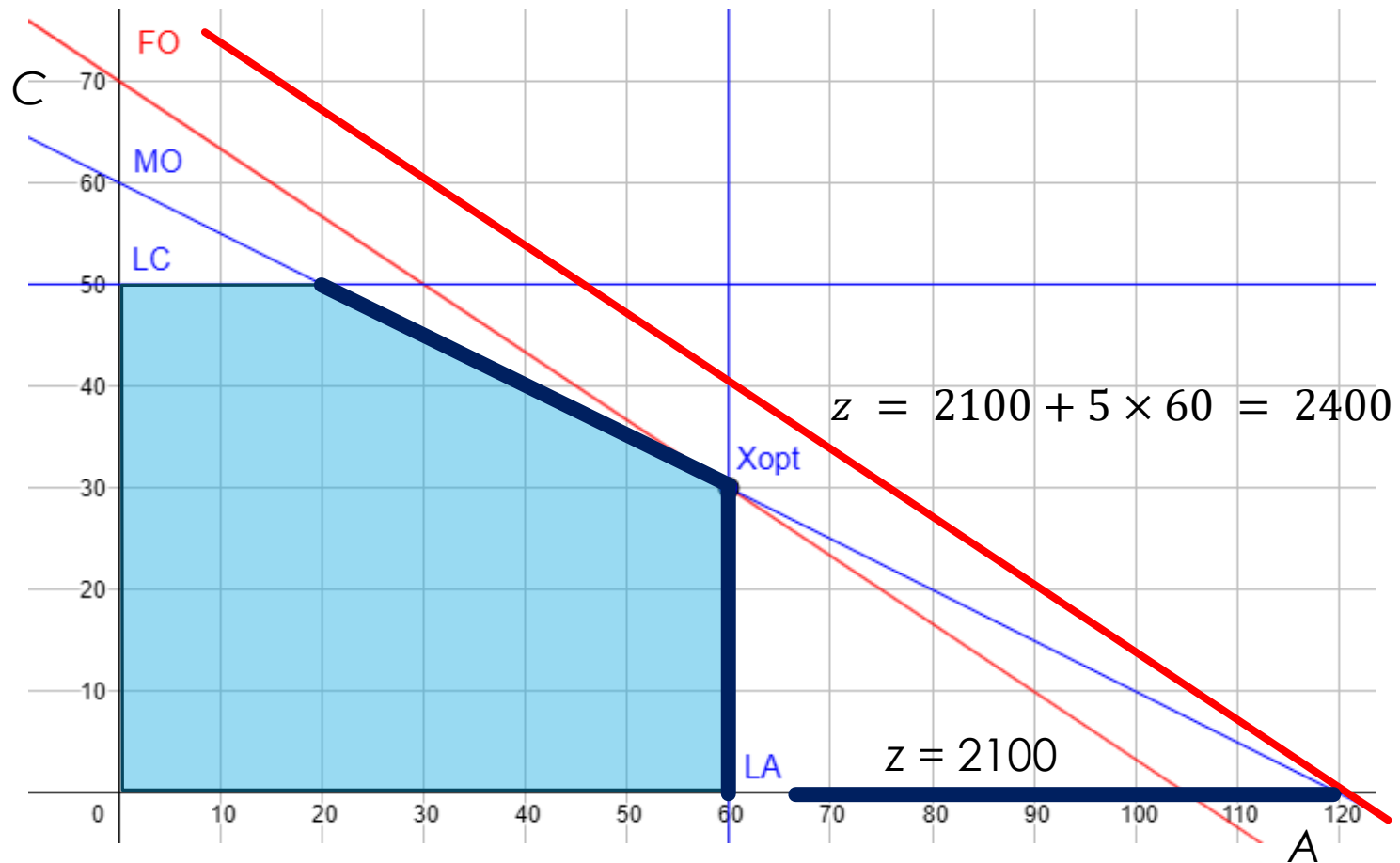
```
1  ! Fábrica de pinturas;  
2  [FO] MAX = 20*A+30*C;  
3  
4  [LA] A <= 70;  
5  [LC] C <= 50;  
6  [MO] A+2*C <= 120;
```

Aumento de 10 unidades en LA

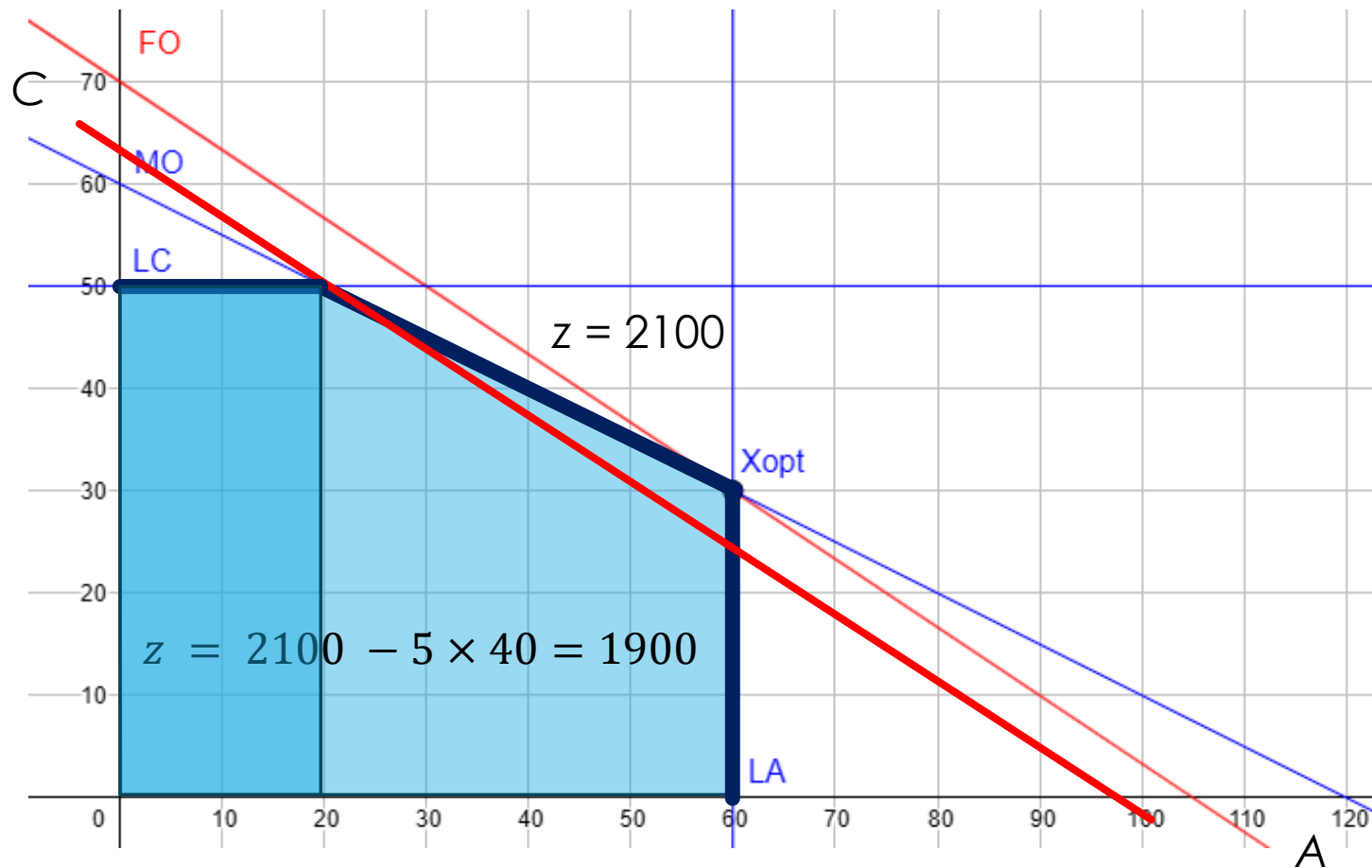
Variable	Value	Reduced Cost
A	70.00000	0.000000
C	25.00000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
FO	2150.000	1.000000
LA	0.000000	5.000000
LC	25.00000	0.000000
MO	0.000000	15.00000

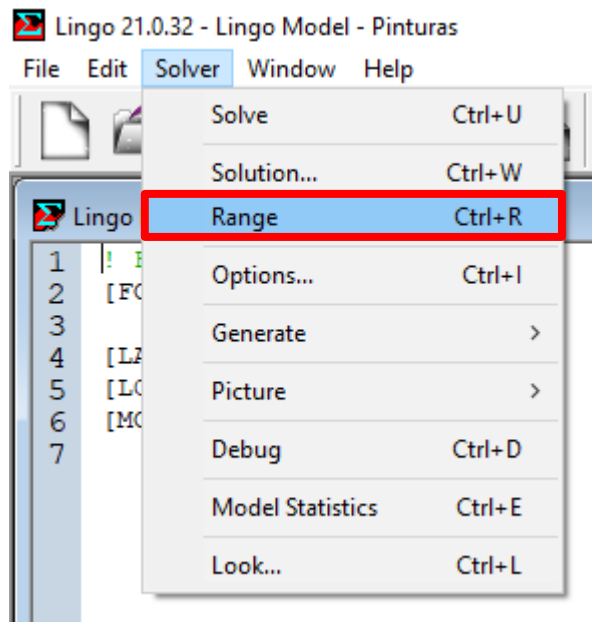
Máximo incremento de LA



Máximo decremento de LA



Informe *Range*



Lingo Options

Nonlinear Solver	Integer Pre-Solver	Integer Solver
Global Solver	Model Generator	SP Solver
Interface	General Solver	Linear Solver

Multithreading: Threads: 1 Mode: Solver Decides	Runtime Limits: Iterations: None Time (sec): None
Debugger: Output Level: 5 Cold Start Solver: Solver Decides Warm Start Solver: Solver Decides	@SOLVE Time Limit: Time (sec): None ☐ Kill scripts on limit
Dual Computations: Prices & Ranges	Scaling Warning Threshold: 1e+12
Solver Log Level: None	Default Starting Point: 1.2345678
☒ Variables assumed non-negative ☐ Use R/C format names for MPS I/O ☒ Favor reproducibility	

Buttons: Help, Cancel, Default, Save, Aplicar, OK

Informe Range

Ranges in which the basis is unchanged:

Objective Coefficient Ranges:

Variable	Current Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
A	20.00000	INFINITY	5.000000
C	30.00000	10.00000	30.00000

Righthand Side Ranges:

Row	Current RHS	Allowable Increase	Allowable Decrease
LA	60.00000	60.00000	40.00000
LC	50.00000	INFINITY	20.00000
MO	120.0000	40.00000	60.00000

Informe *Range*

En la segunda sección, para cada restricción, se indica el valor de la constante del miembro derecho y el valor en que esta puede ser aumentada o disminuida sin alterar el valor que adoptan los precios duales y los costos reducidos en el punto óptimo.

Costo reducido

Fábrica de pinturas con C nulo

Como en este ejemplo ambas variables de decisión adoptaron valores no nulos, para analizar la sensibilidad de la solución con respecto a los coeficientes de las variables, se modifica ligeramente el problema elevando la capacidad de la línea A a $130 \text{ m}^3/\text{d}$.

Fábrica de pinturas con C nulo

Enter the linear programming problem here:

☒ Maximize $z = 20x + 30y$ subject to the constraints:
☐ Minimize
☐ Show only the region defined by the following constraints:

$x \leq 130$
 $y \leq 50$
 $x + 2y \leq 120$

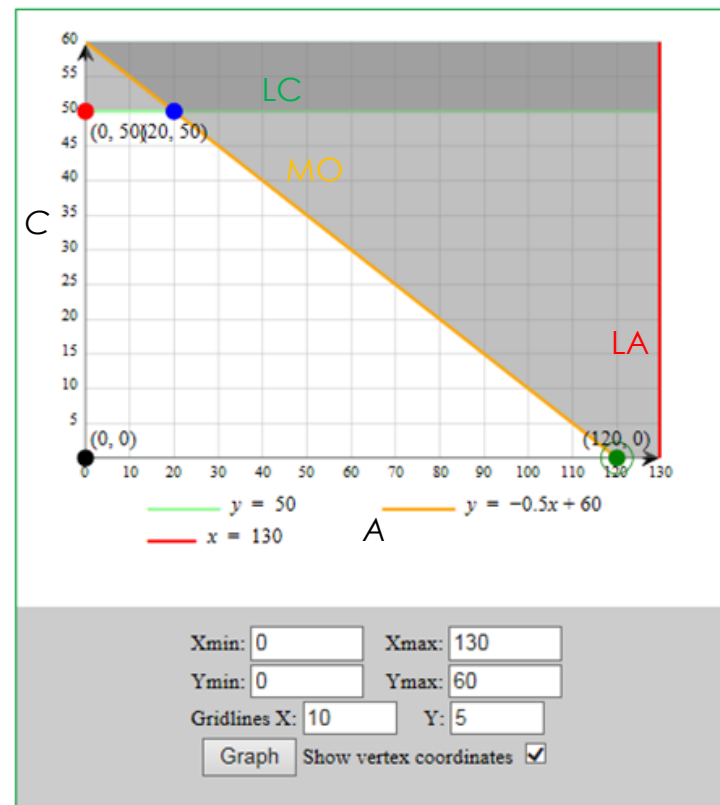
LP Examples Graphing Examples Solve

Rounding: 4 decimal places Fraction Mode ☐

Erase Everything

The solution will appear below.

Vertex	Lines through vertex	Value of objective
• (20, 50)	$y = 50$ $x + 2y = 120$	1900
• (0, 50)	$y = 50$ $x = 0$	1500
• (120, 0)	$x + 2y = 120$ $y = 0$	2400 Maximum
• (0, 0)	$x = 0$ $y = 0$	0



Fábrica de pinturas con C nulo

[FO] $\text{MAX} = 20 \cdot A + 30 \cdot C;$

[LA] $A \leq 130;$

[LC] $C \leq 50;$

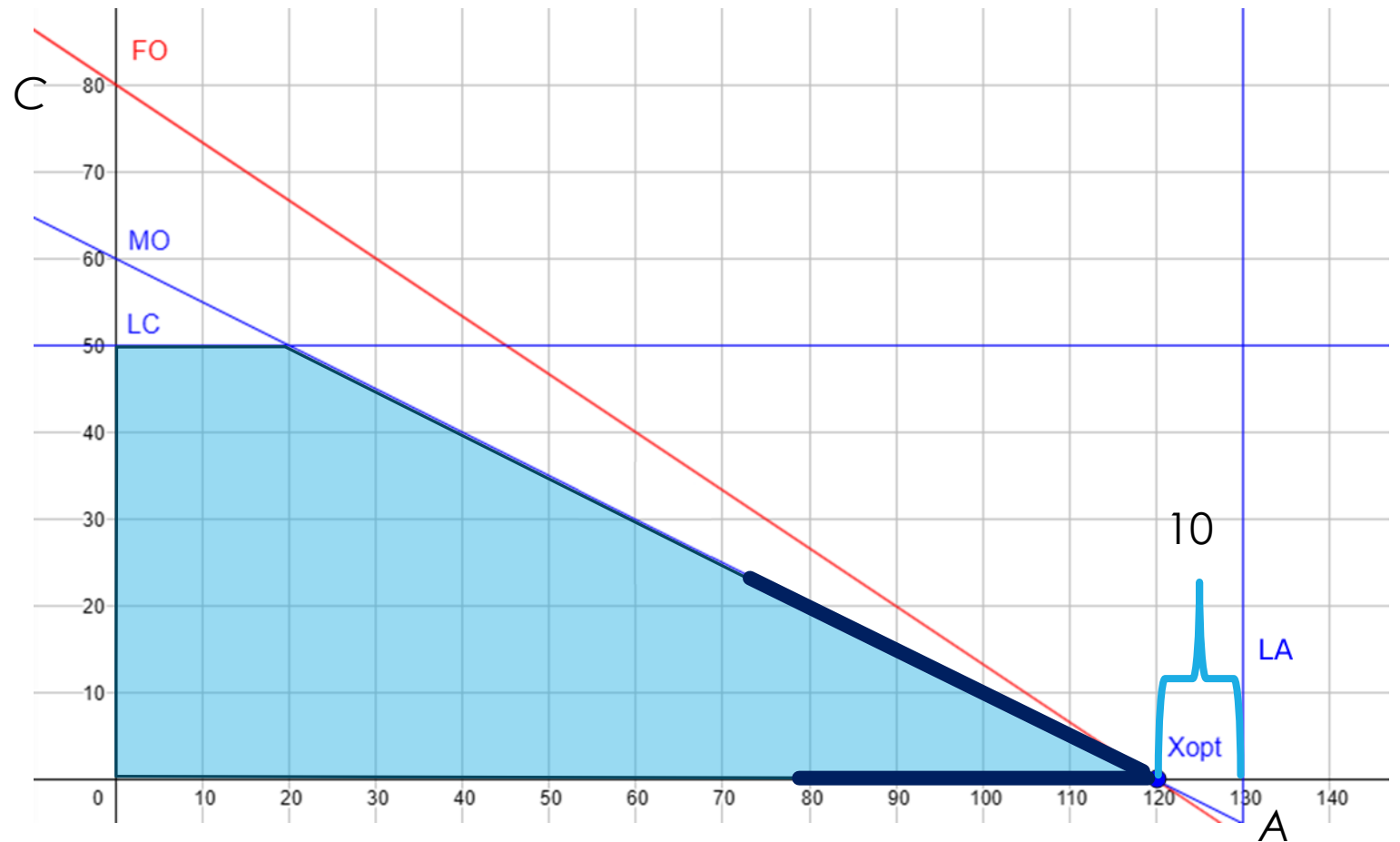
[MO] $A + 2 \cdot C \leq 120;$

Variable	Value	Reduced Cost
A	120.0000	0.000000
C	0.000000	10.00000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
FO	2400.000	1.000000
LA	10.00000	0.000000
LC	50.00000	0.000000
MO	0.000000	20.00000

Fábrica de pinturas con C nulo

Row	Slack or Surplus
FO	2400.000
LA	10.00000
LC	50.00000
MO	0.000000



Costo reducido

- El costo reducido (*reduced cost*) de una variable es la cantidad que debe mejorar el coeficiente que tiene en la función objetivo para que convenga dar un valor positivo a dicha variable.
- Que mejore el coeficiente significa que aumente si se está maximizando, y disminuya si se está minimizando.
- El costo reducido, o costo marginal, de una variable es la penalidad que se tendría que pagar por incrementar una unidad de la variable que tiene un valor nulo en el punto óptimo.

Fábrica de pinturas con C nulo

[FO] $\text{MAX} = 20 \cdot A + 30 \cdot C;$

[LA] $A \leq 130;$

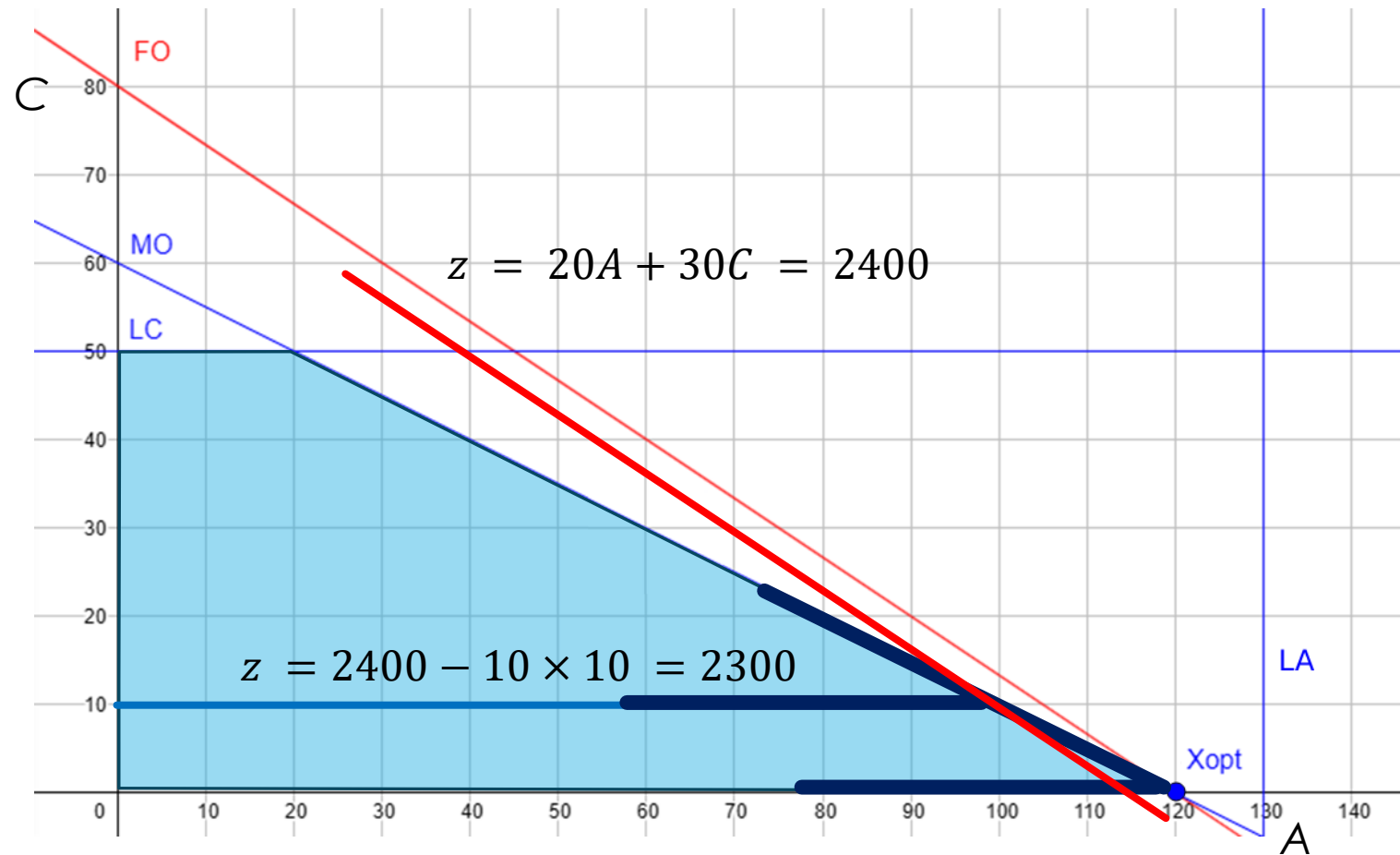
[LC] $C \leq 50;$

[MO] $A + 2 \cdot C \leq 120;$

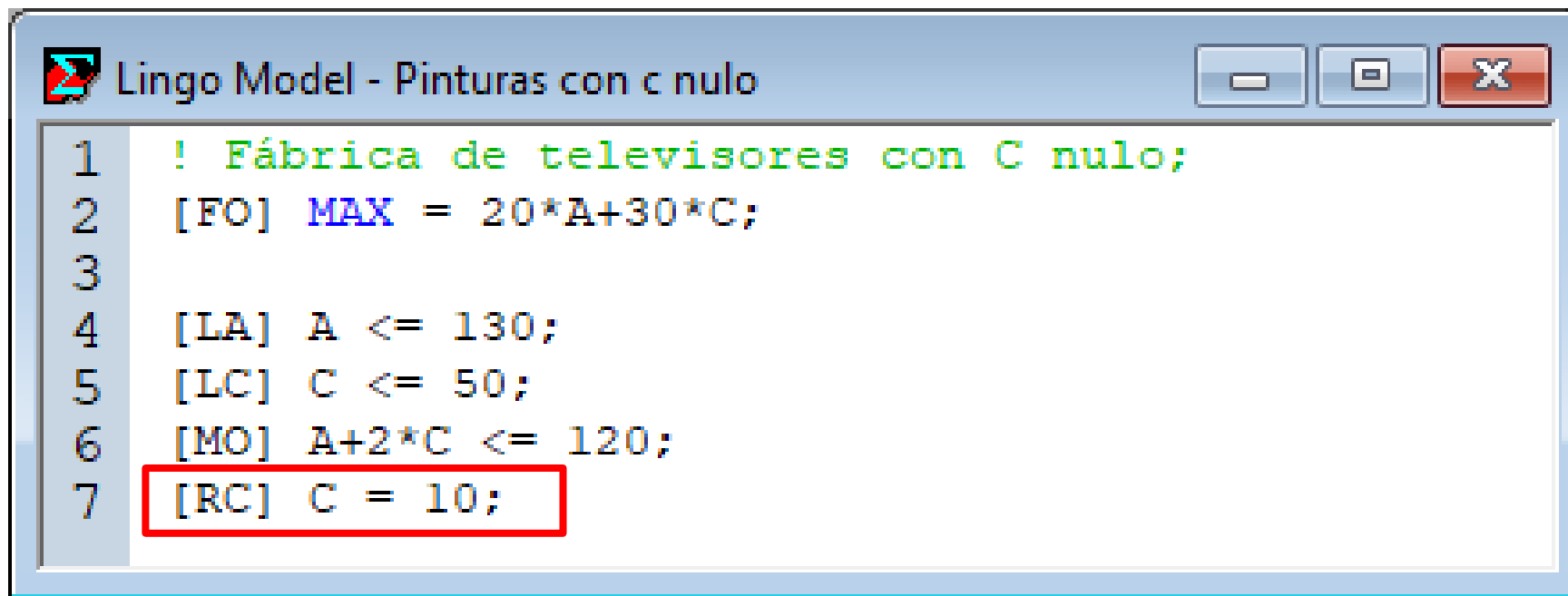
Variable	Value	Reduced Cost
A	120.0000	0.000000
C	0.000000	10.00000
Row	Slack or Surplus	Dual Price
FO	2400.000	1.000000
LA	10.00000	0.000000
LC	50.00000	0.000000
MO	0.000000	20.00000

Costo reducido

Se producen 10 unidades de C.



Fábrica de pinturas con $C = 10$



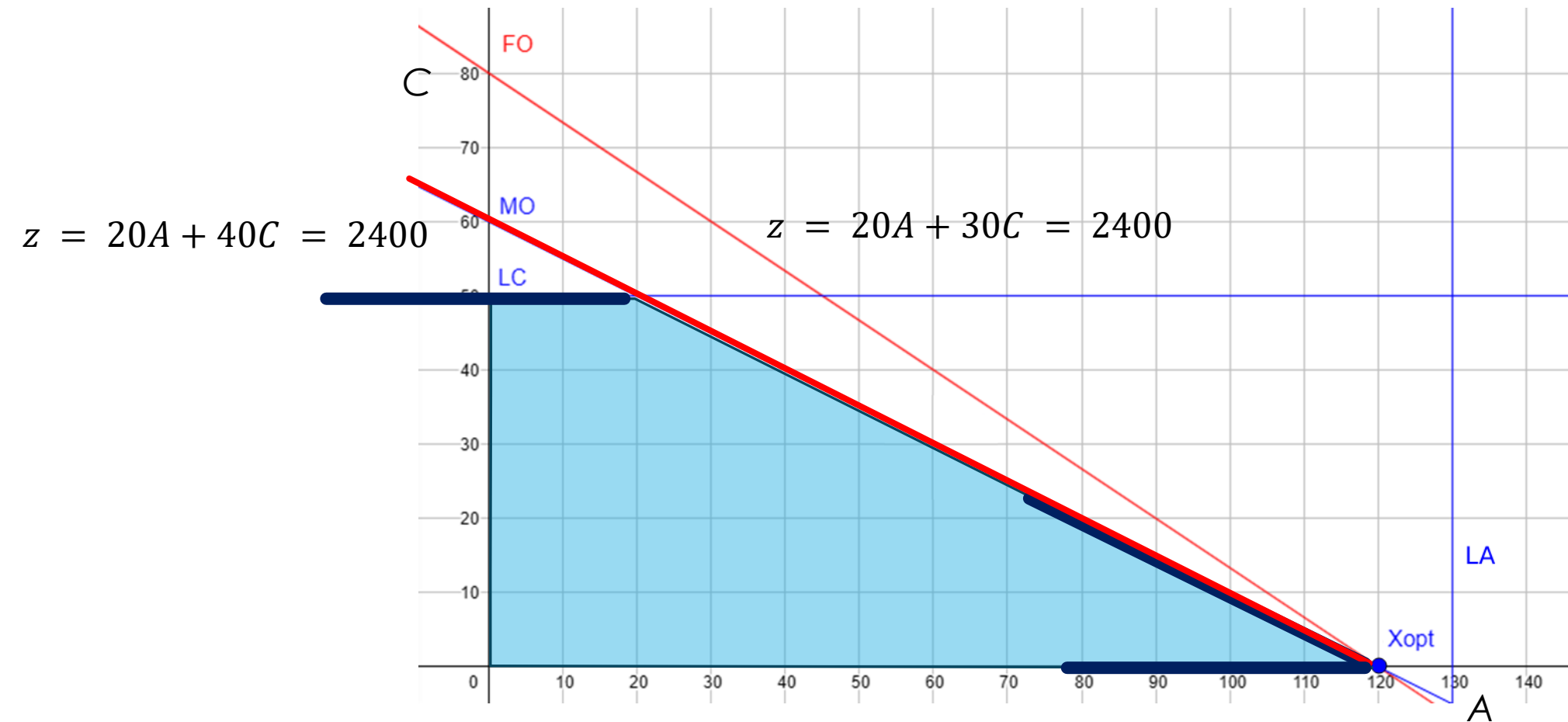
```
1  ! Fábrica de televisores con C nulo;  
2  [FO] MAX = 20*A+30*C;  
3  
4  [LA] A <= 130;  
5  [LC] C <= 50;  
6  [MO] A+2*C <= 120;  
7  [RC] C = 10;
```

Fábrica de pinturas con $C = 10$

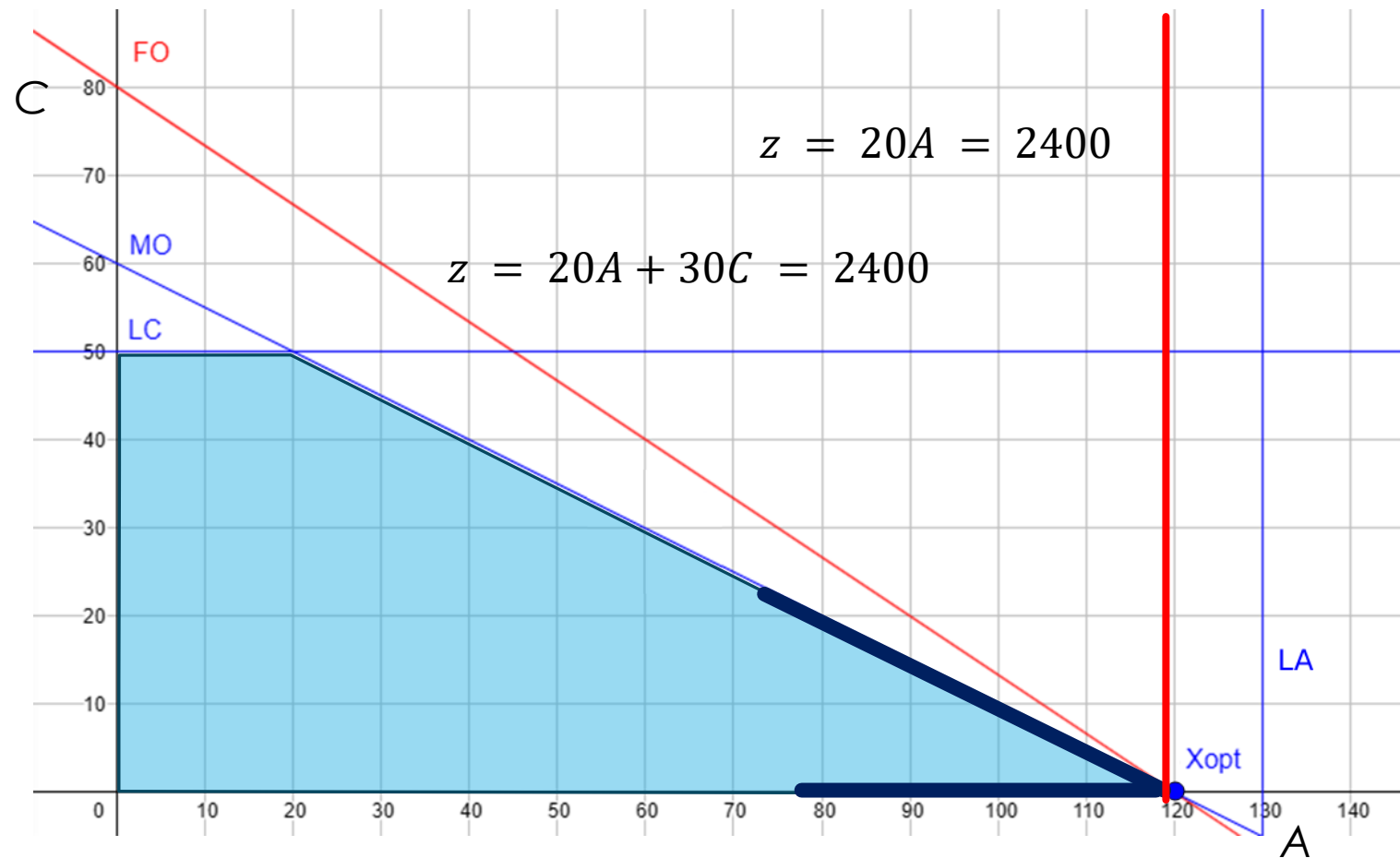
Variable	Value	Reduced Cost
A	100.0000	0.000000
C	10.00000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
FO	2300.000	1.000000
LA	30.00000	0.000000
LC	40.00000	0.000000
MO	0.000000	20.00000
RC	0.000000	-10.00000

Máximo incremento



Máximo decremento



Informe Range

Ranges in which the basis is unchanged:

Objective Coefficient Ranges:

Variable	Current Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
A	20.00000	INFINITY	5.000000
C	30.00000	10.00000	INFINITY

Righthand Side Ranges:

Row	Current RHS	Allowable Increase	Allowable Decrease
LA	130.0000	INFINITY	10.00000
LC	50.00000	INFINITY	50.00000
MO	120.0000	10.00000	120.0000

Informe *Range*

En la primera sección, para cada variable, se indica el valor del coeficiente en la función objetivo y el valor en que este puede ser aumentado o disminuido sin alterar el valor que adoptan las variables de decisión en el punto óptimo.

Análisis de sensibilidad

Etapas de la optimización

1. Especificación del problema
2. Formulación del modelo
3. Resolución del modelo
4. Verificación de las condiciones de optimalidad
5. Análisis de sensibilidad

Utilidad del análisis de sensibilidad

- ¿Qué tan sensible es el óptimo a variaciones de los parámetros?
- ¿Qué se puede hacer para obtener un mejor óptimo?
- ¿Dónde se debe concentrar una nueva inversión?
- ¿Cómo se puede ahorrar recursos?

Fábrica de pinturas

Enter the linear programming problem here:

☒ Maximize $z = 20x + 30y$ subject to the constraints:
☐ Minimize
☐ Show only the region defined by the following constraints:

$x \leq 60$
 $y \leq 50$
 $x + 2y \leq 120$

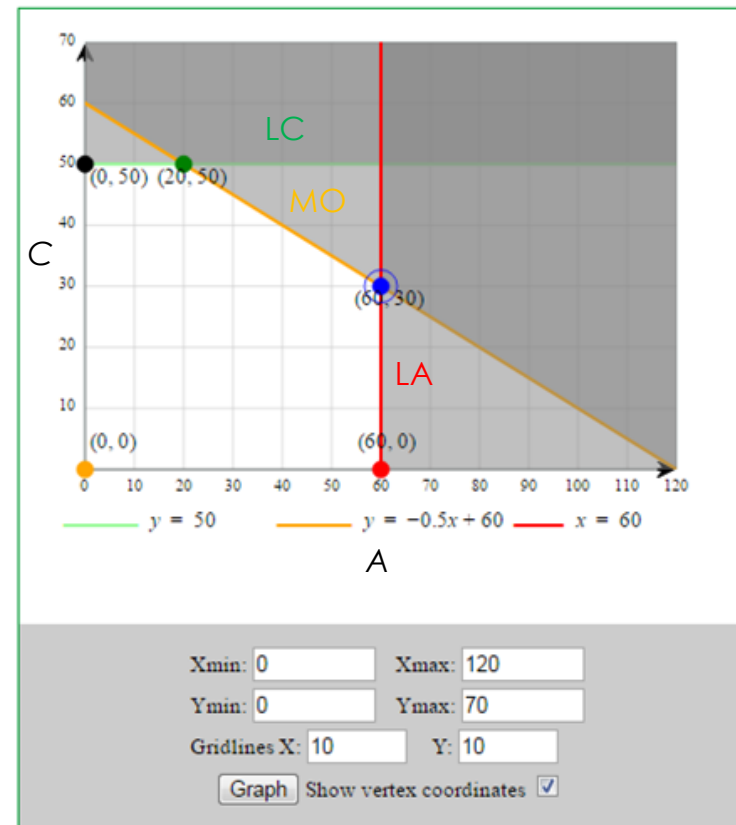
LP Examples Graphing Examples Solve

Rounding: 4 decimal places Fraction Mode ☐

Erase Everything

The solution will appear below.

Vertex	Lines through vertex	Value of objective
• (60, 30)	$x = 60$ $x + 2y = 120$	2100 Maximum
• (60, 0)	$x = 60$ $y = 0$	1200
• (20, 50)	$y = 50$ $x + 2y = 120$	1900
• (0, 50)	$y = 50$ $x = 0$	1500
• (0, 0)	$x = 0$ $y = 0$	0



Simplex

Estabilidad del óptimo

El informe de rango establece qué grado de variación pueden tener los coeficientes de la función objetivo sin que afecte al óptimo.

Mejora del óptimo

- Se pueden aumentar los recursos de las restricciones activas.
- Se pueden mejorar los coeficientes de las actividades en la función objetivo.

Inversión adicional

- Se debe invertir solo en las restricciones activas.
- El precio dual de las restricciones activas permiten planificar la inversión adicional.
- El costo de los recursos adicionales no debe superar al correspondiente precio dual.

Reasignación de recursos

- Las restricciones no activas tienen recursos sobrantes.
- Se pueden reasignar esos excedentes.

Mapa curricular de análisis de sensibilidad

1. Método gráfico
2. Holgura y exceso
3. Precio dual
4. Costo reducido
5. Rango
6. Análisis de sensibilidad
7. Estabilidad del óptimo
8. Mejora del óptimo