Simulación y Optimización

Programación entera

Enrique E. Tarifa, Facultad de Ingeniería, UNJu

Mapa curricular de la materia

- Simulación
- Optimización

Mapa curricular de la materia

Simulación

Optimización

Mapa curricular de Optimización

- Definiciones
- Modelo de optimización
- Programación no lineal
- Programación lineal
- Análisis de sensibilidad

Mapa curricular de Optimización

- Definiciones
- Modelo de optimización
- Programación no lineal
- Programación lineal
- Análisis de sensibilidad

Mapa curricular de función objetivo

1. Programación entera
2. Método gráfico
3. Costo fijo
4. Método de la gran M
5. Variables discretas
6. Actividad mínima
7. Minimax y maxmin
8. Localización de plantas

Programación matemática

Programación matemática

$$\underset{x_j}{\text{Max}}\, FO\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

s. a:

$$h_i\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$g_k\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \leq 0 \quad k = 1, 2, \ldots, o$$

$$GL = n - m$$

Clasificación de modelos

- Programación Lineal (LP, *Linear Programming*)
- Programación No Lineal (NLP, *Nonlinear Programming*)
- Programación Lineal Entera (ILP, *Integer Linear Programming*)
- Programación No Lineal Entera (INLP, *Integer Nonlinear Programming*)
- Programación Lineal Entera Mixta (MILP, *Mixed Integer Linear Programming*)
- Programación No Lineal Entera Mixta (MINLP, *Mixed Integer Nonlinear Programming*)

$$FO\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n$$

Programación entera

Programación entera

$$\max_{x_1, x_2} x_1 + 2x_2$$

s. a:

$$-x_1 + x_2 \leq 3.5$$

$$x_1 + x_2 \leq 16.5$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{N}$$

- Solución relajada:
  - $x_1 = 6.5$ y $x_2 = 10$
  - $FO = 26.5$
- Solución redondeada:

Programación entera

$$\underset{x_1, x_2}{\text{Max}}\; x_1 + 2x_2$$

s. a:

$$-x_1 + x_2 \le 3.5$$

$$x_1 + x_2 \le 16.5$$

$$x_1 \ge 0$$

$$x_2 \ge 0$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{N}$$

- Solución relajada:
  - $x_1 = 6.5$ y $x_2 = 10$
  - $FO = 26.5$
- Solución redondeada:
  - No factible: $x_1 = 7$ y $x_2 = 10$

Programación entera

$$\underset{x_1, x_2}{\text{Max}}\ x_1 + 2x_2$$

s. a:

$$-x_1 + x_2 \leq 3.5$$

$$x_1 + x_2 \leq 16.5$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{N}$$

- Solución relajada:
  - x_1 = 6.5 y x_2 = 10
  - *FO* = 26.5
- Solución redondeada:
  - No factible: x_1 = 7 y x_2 = 10
  - No factible: x_1 = 6 y x_2 = 10

Programación entera

$$\underset{x_1, x_2}{\text{Max}}\; x_1 + 2x_2$$

s. a:

$$-x_1 + x_2 \le 3.5$$

$$x_1 + x_2 \le 16.5$$

$$x_1 \ge 0$$

$$x_2 \ge 0$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{N}$$

Programación entera.lg4

- Solución relajada:
  - $x_1 = 6.5$ y $x_2 = 10$
  - *FO* = 26.5
- Solución redondeada:
  - No factible: $x_1 = 7$ y $x_2 = 10$
  - No factible: $x_1 = 6$ y $x_2 = 10$
  - Solución no óptima.
- Solución entera:
  - $x_1 = 7$, $x_2 = 9$, *FO* = 25

Modelo en LINGO

Lingo Model - Programación entera

```
! Programación entera;
[FO] Max = x1 + 2*x2;
[R1] -x1 + x2 <= 3.5;
[R2] x1 + x2 <= 16.5;
@gin(x1);
@gin(x2);
```

Resultados en LINGO

Variable	Value	Reduced Cost
X1	7.000000	-1.000000
X2	9.000000	-2.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
FO	25.00000	1.000000
R1	1.500000	0.000000
R2	0.5000000	0.000000

Reactores y extractores

Reactores y extractores

Una planta tiene un sector de reacción seguido por uno de separación. En el primero, se colocarán reactores en serie; mientras que, en el segundo, se colocarán extractores por solvente en serie. El aporte a los beneficios de la empresa que hace cada reactor es de 1 $/min, mientras que el aporte de cada extractor es de 5 $/min. Hay espacio para instalar un máximo de 3 reactores y un máximo de 2 extractores. La legislación local fija un límite de 21 l/min de efluentes. Cada reactor produce 1 l/min de efluentes, y cada extractor produce 10 l/min de efluentes. Se requiere determinar la cantidad óptima de reactores y extractores a instalar.

Elementos del modelo

- Variables de decisión:
  - x_1: Cantidad de reactores.
  - x_2: Cantidad de extractores.

Elementos del modelo

- Función objetivo:
  - Beneficios ($/min): $x_1 + 5\, x_2$
- Restricciones:
  - Efluentes (l/min): $x_1 + 10\, x_2 \leq 21$
  - Espacio reactores: $x_1 \leq 3$
  - Espacio extractores: $x_2 \leq 2$

Reactores y extractores

$$\max_{x_1, x_2} x_1 + 5x_2$$

$$\text{s. a}:$$

$$x_1 + 10x_2 \leq 21$$

$$x_1 \leq 3$$

$$x_2 \leq 2$$

$$x_1 \in \mathbb{N}$$

$$x_2 \in \mathbb{N}$$

- Solución relajada:
  - $x_1 = 3$, $x_2 = 1.8$, *FO* = 12 $/min
- Solución redondeada:

Reactores y extractores

$$\max_{x_1, x_2} x_1 + 5x_2$$

$$\text{s. a :}$$

$$x_1 + 10x_2 \leq 21$$

$$x_1 \leq 3$$

$$x_2 \leq 2$$

$$x_1 \in \mathbb{N}$$

$$x_2 \in \mathbb{N}$$

- Solución relajada:
  - $x_1 = 3$, $x_2 = 1.8$, *FO* = 12 $/min
- Solución redondeada:
  - $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, no factible

Reactores y extractores

$$\underset{x_1, x_2}{\text{Max}}\ x_1 + 5x_2$$

$$\text{s. a}:$$

$$x_1 + 10x_2 \le 21$$

$$x_1 \le 3$$

$$x_2 \le 2$$

$$x_1 \in \mathbb{N}$$

$$x_2 \in \mathbb{N}$$

Reactores y extractores.lg4

- Solución relajada:
  - $x_1 = 3$, $x_2 = 1.8$, *FO* = 12 \$/min
- Solución redondeada:
  - $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, no factible
  - $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, *FO* = 8 \$/min
- Solución entera:
  - $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, *FO* = 11 \$/min

Modelo en LINGO

Lingo Model - Reactores y extractores

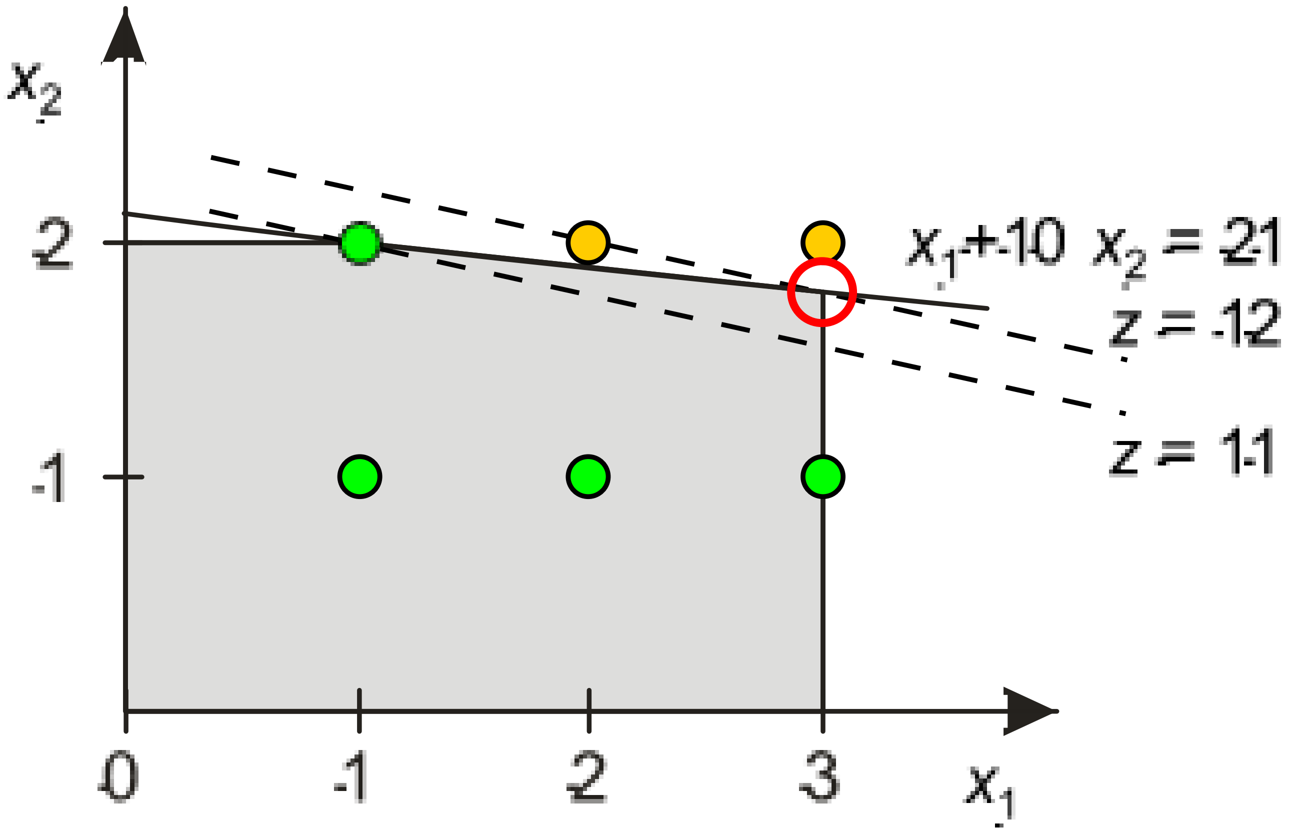
```
! Reactores y extractores;
[FO] Max = x1+5*x2;
[RL] x1+10*x2 <= 21;
[RR] x1 <= 3;
[RE] x2 <= 2;
@gin(x1);
@gin(x2);
```

Resultados en LINGO

Variable	Value	Reduced Cost
X1	1.000000	-1.000000
X2	2.000000	-5.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
FO	11.00000	1.000000
RL	0.000000	0.000000
RR	2.000000	0.000000
RE	0.000000	0.000000

Reactores y extractores



Costo fijo

Función objetivo

- Criterio económico:
  - Valor del dinero en el tiempo: VAN y TIR
  - Beneficios = Ingresos - Costos
  - Ingresos constantes → Costos
  - Costo = Costo de operación + Costo de capital
  - Costo = Costo fijo + Costo variable

Tipos de costos

- Costo fijo (CF): Es el costo que no depende del nivel de producción Q (alquiler, sueldos del personal administrativo y de seguridad, Internet). Existe aunque no haya producción.
- Costo variable (CV): Es el costo que depende del nivel de producción Q (materia prima, insumos, transporte). Es proporcional a Q; por lo tanto, es nulo si no hay producción.
- Costo variable unitario (CVU): Es el costo variable por unidad de nivel de producción. Es la constante de proporcionalidad.
- $C = CF + CV = CF + CVU\ Q$

Fábrica de pinturas

Fábrica de pinturas

Una fábrica produce pintura amarilla (A) y pintura celeste (C). Existen dos líneas de producción, una para cada color. La capacidad de la línea A es 60 m^3 por día, mientras que la capacidad de la línea C es 50 m^3 por día. Un metro cúbico de A requiere 1 h-hombre de labor, mientras que un metro cúbico de C requiere 2 h-hombre. Se disponen de 120 h-hombre como máximo por día que pueden ser asignadas indistintamente a la producción de ambos colores. La contribución a los beneficios de la empresa es \$20 y \$30 por metro cúbico de A y C, respectivamente. Se debe determinar el plan de producción diaria óptimo.

Elementos del modelo

- Parámetros:
  - m = 3, LA, LC y MO
  - n = 2, A y C
  - b = 20 30 ($\$/m^3$)
  - s = 60 (m^3/d)

    50 (m^3/d)

    120 (h-hombre/d)

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A & C \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} LA \\ LC \\ MO \end{array} \end{array}$$

Elementos del modelo

- Variables de decisión:
  - x = A C (m^3/d)
- Función objetivo:
  - Beneficios ($/d): $20\ A + 30\ C$
- Restricciones:
  - Capacidad de la línea A (m^3/d): $A \leq 60$
  - Capacidad de la línea C (m^3/d): $C \leq 50$
  - Mano de obra (h-hombre/d): $A + 2\ C \leq 120$

Fábrica de pinturas

$$\max_{A,C} 20A + 30C$$

s. a:

$$A \le 60$$

$$C \le 50$$

$$A + 2C \le 120$$

$$A \ge 0, C \ge 0$$

Pinturas.lg4

Modelo en LINGO

Lingo Model - Pinturas

```
! Fábrica de pinturas;
[FO] MAX = 20*A+30*C;

[LA] A <= 60;
[LC] C <= 50;
[MO] A+2*C <= 120;
```

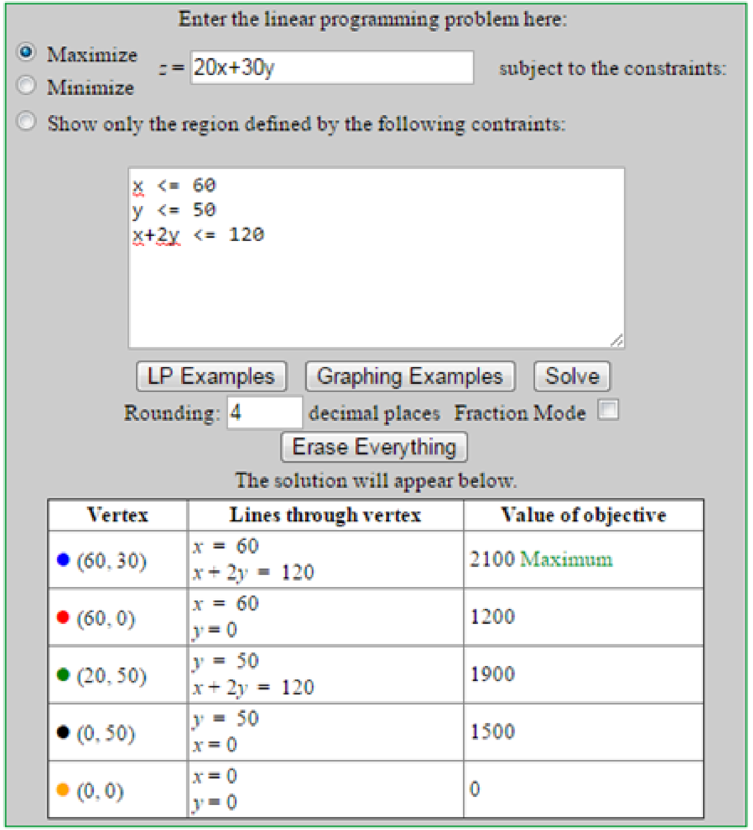
Resultados en LINGO

Variable	Value	Reduced Cost
A	60.00000	0.000000
C	30.00000	0.000000

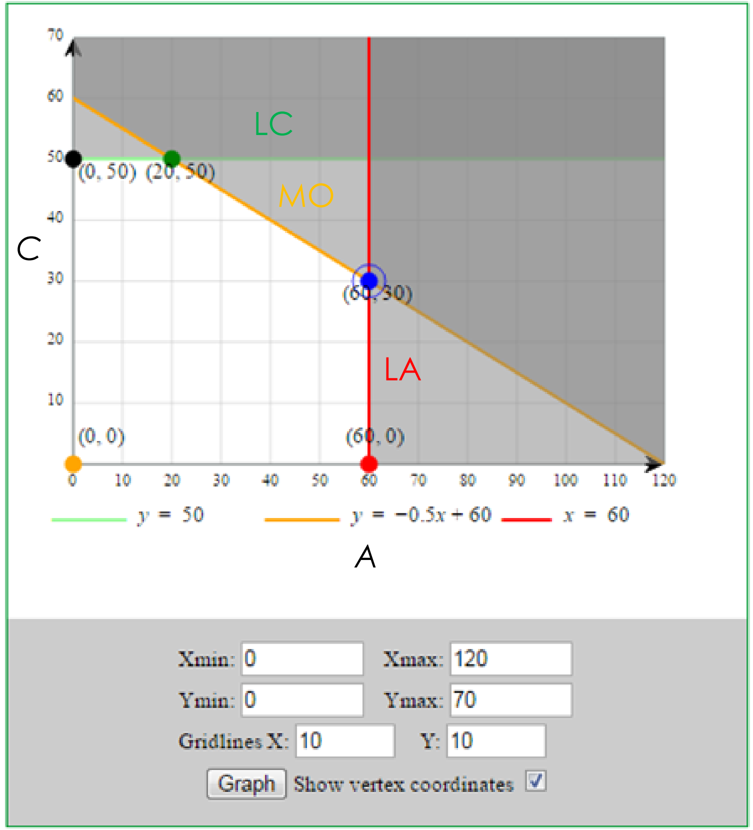
Row	Slack or Surplus	Dual Price
FO	2100.000	1.000000
LA	0.000000	5.000000
LC	20.00000	0.000000
MO	0.000000	15.00000

Se activaron LA y MO. Hacen valer la igualdad. Se acabaron esos recursos.

Fábrica de pinturas



Vertex	Lines through vertex	Value of objective
(60, 30)	$x = 60$ $x + 2y = 120$	2100 Maximum
(60, 0)	$x = 60$ $y = 0$	1200
(20, 50)	$y = 50$ $x + 2y = 120$	1900
(0, 50)	$y = 50$ $x = 0$	1500
(0, 0)	$x = 0$ $y = 0$	0



Simplex

Costo fijo

Se analiza nuevamente la fábrica de pinturas presentada anteriormente; pero, esta vez, se considera el costo de la puesta en marcha. Dicho costo, dividido por la cantidad de días de operación, para la línea A es igual a 400 $/d, mientras que para la línea C es 1000 $/d. Se desea determinar el nuevo esquema de producción óptimo.

Costo fijo

$$\underset{A,C,y_A,y_C}{\text{Max}} \left(20A - 400y_A\right) + \left(30C - 1000y_C\right)$$

$$y_A = \begin{cases} 0 & A = 0 \\ 1 & A > 0 \end{cases}$$

$$y_C = \begin{cases} 0 & C = 0 \\ 1 & C > 0 \end{cases}$$

Fábrica de pintura con costo fijo

$$\underset{A, C, y_A, y_C}{\text{Max}} \left(20A - 400y_A\right) + \left(30C - 1000y_C\right)$$

s. a:

$$A \leq 60$$

$$C \leq 50$$

$$A + 2C \leq 120$$

$$A \leq 60y_A$$

$$C \leq 50y_C$$

$$y_A, y_C \in \text{Binario}$$

$$A \geq 0, C \geq 0$$

Fábrica de pintura con costo fijo

$$\underset{A,C,y_A,y_C}{\text{Max}} \ (20A - 400y_A) + (30C - 1000y_C)$$

s. a:

$$A \le 60$$

$$C \le 50$$

$$A + 2C \le 120$$

$$A \le 60y_A$$

$$C \le 50y_C$$

$$y_A, y_C \in \text{Binario}$$

$$A \ge 0, C \ge 0$$

$$y_A = \begin{cases} 0 & A = 0 \\ 1 & A > 0 \end{cases}$$

Fábrica de pintura con costo fijo

$$\max_{A,C,y_A,y_C} \left(20A - 400y_A\right) + \left(30C - 1000y_C\right)$$

s. a:

$$A \leq 60$$

$$C \leq 50$$

$$A + 2C \leq 120$$

$$A \leq 60y_A$$

$$C \leq 50y_C$$

$$y_A, y_C \in \text{Binario}$$

$$A \geq 0, C \geq 0$$

$$y_A = \begin{cases} 0 & A = 0 \\ 1 & A > 0 \end{cases}$$

$$y_C = \begin{cases} 0 & C = 0 \\ 1 & C > 0 \end{cases}$$

Fábrica de pintura con costo fijo

$$\underset{A,C,y_A,y_C}{\text{Max}} \left(20A - 400y_A\right) + \left(30C - 1000y_C\right)$$

s. a:

$$A \le 60$$

$$C \le 50$$

$$A + 2C \le 120$$

$$A \le 60y_A \qquad \text{Si } A > 0 \rightarrow y_A = 1$$

$$C \le 50y_C \qquad \text{Si } C > 0 \rightarrow y_C = 1$$

$$y_A, y_C \in \text{Binario}$$

$$A \ge 0, C \ge 0$$

$$y_A = \begin{cases} 0 & A = 0 \\ 1 & A > 0 \ ✓ \end{cases}$$

$$y_C = \begin{cases} 0 & C = 0 \\ 1 & C > 0 \ ✓ \end{cases}$$

Fábrica de pintura con costo fijo

$$\underset{A,C,y_A,y_C}{\text{Max}} \left(20A - 400y_A\right) + \left(30C - 1000y_C\right)$$

$y_A = 0$ $\quad$ $y_C = 0$

s. a:

$A \leq 60$

$C \leq 50$

$A + 2C \leq 120$

$A \leq 60y_A$ $\quad$ Si $A = 0 \rightarrow y_A = 0V1$

$C \leq 50y_C$ $\quad$ Si $C = 0 \rightarrow y_C = 0V1$

$y_A, y_C \in \text{Binario}$

$A \geq 0, C \geq 0$

$$y_A = \begin{cases} 0 & A = 0 \; ✓ \\ 1 & A > 0 \end{cases}$$

$$y_C = \begin{cases} 0 & C = 0 \; ✓ \\ 1 & C > 0 \end{cases}$$

Fábrica de pintura con costo fijo

$$\max_{A,C,y_A,y_C} \left(20A - 400y_A\right) + \left(30C - 1000y_C\right)$$

s. a:

$$A \le 60$$

$$C \le 50$$

$$A + 2C \le 120$$

$$A \le 60y_A$$

$$C \le 50y_C$$

$$y_A, y_C \in \text{Binario}$$

$$A \ge 0, C \ge 0$$

Pinturas con costo fijo.lg4

Modelo en LINGO

Lingo Model - Pinturas con costo fijo

```
! Fábrica de pinturas con costo fijo;
[FO] MAX = (20*A-400*yA)+(30*C-1000*yC);

[LA] A <= 60;
[LC] C <= 50;
[MO] A+2*C <= 120;

! Restricciones adicionales;
[B1] A <= 60*yA;
[B2] C <= 50*yC;
@bin(yA);
@bin(yC);
```

Resultados en LINGO

Variable	Value	Reduced Cost
A	60.00000	0.000000
YA	1.000000	400.0000
C	0.000000	0.000000
YC	0.000000	-500.0000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
FO	800.0000	1.000000
LA	0.000000	20.00000
LC	50.00000	0.000000
MO	60.00000	0.000000
B1	0.000000	0.000000
B2	0.000000	30.00000

Dejó de fabricar C.

Método de la gran M

Fábrica de pintura con costo fijo

$$\underset{A,C,y_A,y_C}{\text{Max}} \left(20A - 400y_A\right) + \left(30C - 1000y_C\right)$$

s. a:

$$A \leq 60$$

$$C \leq 50$$

$$A + 2C \leq 120$$

$$A \leq {\color{red}60}\, y_A$$

$$C \leq {\color{red}50}\, y_C$$

$$y_A, y_C \in \text{Binario}$$

$$A \geq 0, C \geq 0$$

Uso de las M

$$\underset{A,C,y_A,y_C}{\text{Max}} \left(20A - 400y_A\right) + \left(30C - 1000y_C\right)$$

s. a:

$$A \leq 60$$

$$C \leq 50$$

$$A + 2C \leq 120$$

$$A \leq M_A y_A$$

$$C \leq M_C y_C$$

$$y_A, y_C \in \text{Binario}$$

$$A \geq 0, C \geq 0$$

Determinación de M_A

$$\max_{A,C} A$$

s. a:

$$A \leq 60$$

$$C \leq 50$$

$$A + 2C \leq 120$$

$$A \geq 0, C \geq 0$$

$M_A = 60$

Determinación de M_C

$$
\begin{aligned}
&\operatorname*{Max}_{A,C}\ C \\
&\text{s. a:} \\
&A \leq 60 \\
&C \leq 50 \\
&A + 2C \leq 120 \\
&A \geq 0, C \geq 0
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$

$M_C = 50$

Fábrica de pintura con costo fijo

$$\underset{A,C,y_A,y_C}{\text{Max}} \left(20A - 400y_A\right) + \left(30C - 1000y_C\right)$$

s. a:

$$A \le 60$$

$$C \le 50$$

$$A + 2C \le 120$$

$$A \le 60\,y_A$$

$$C \le 50\,y_C$$

$$y_A, y_C \in \text{Binario}$$

$$A \ge 0, C \ge 0$$

$$y_A = \begin{cases} 0 & A = 0 \\ 1 & A > 0 \end{cases}$$

$$y_C = \begin{cases} 0 & C = 0 \\ 1 & C > 0 \end{cases}$$

Pinturas con costo fijo.lg4

Variables discretas

Variables discretas uniformes

- $x \epsilon \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$
- $x_j = x_1 + (j-1)\Delta x$
- rpm en una centrífuga, potencias de un calentador eléctrico.
- Restricciones:
  - $x = x_1 + k\,\Delta x$
  - $k \leq n - 1$
  - $k \in \mathbb{N}$

- $x \in \{0.50, 0.75, 1.00, 1.25\}$
- $x_1 = 0.50$
- $n = 4$
- $\Delta x = 0.25$
- Restricciones:
  - $x = 0.50 + 0.25\,k$
  - $k \leq 3$
  - $k \in \mathbb{N}$

Variables discretas no uniformes

- $x \epsilon \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$
- Diámetros de tuberías, espesores de aislantes, potencia de motores.
- Restricciones:
  - $x = \sum_{j=1}^{n} x_j \, y_j$
  - $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$
  - $y_j \in \{0, 1\}$

- $x \epsilon \{0.5, 0.75, 1, 2\}$
- Restricciones:
  - $x = 0.5\, y_1 + 0.75\, y_2 + 1\, y_3 + 2\, y_4$
  - $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 1$
  - $y_1, y_2, y_3, y_4 \in \{0, 1\}$

Actividad mínima

Actividad mínima y máxima

- x: Nivel de actividad.
- *L*: Nivel mínimo de x.
- *U*: Límite superior de x.
- Se permite no producir.
- Restricciones:
  - $x \leq U\,y$ Si $x \geq L \rightarrow y = 1$
  - $L\,y \leq x$ Si $x = 0 \rightarrow y = 0$
  - $y \in \{0, 1\}$

$$y = \begin{cases} 0 & x = 0 \quad ✓ \\ 1 & x \geq L \quad ✓ \end{cases}$$

Actividad mínima y máxima

- x: Nivel de actividad.
- *L*: Nivel mínimo de x.
- *U*: Límite superior de x.
- Se permite no producir.
- Restricciones:
  - $x \leq U\, y$
  - $L\, y \leq x$
  - $y \in \{0, 1\}$

- x: bolsas/mes.
- *L*: 100 bolsas/mes.
- *U*: 1500 bolsas/mes.
- Restricciones:
  - $x \leq 1500\, y$
  - $100\, y \leq x$
  - $y \in \{0, 1\}$

Minimax y maxmin

Minimax

- Se quiere minimizar el máximo valor de algo.
- Minimizar el máximo consumo eléctrico de las fases r, s y t.

- Operador: Min.
- Función objetivo: W_{max}
- Restricciones:
  - $W_{\mathrm{r}} \leq W_{\mathrm{max}}$
  - $W_{\mathrm{s}} \leq W_{\mathrm{max}}$
  - $W_{\mathrm{t}} \leq W_{\mathrm{max}}$

Maxmin

- Se quiere maximizar el mínimo valor de algo.
- Maximizar la mínima potencia disponible de las fases r, s y t.

- Operador: Max.
- Función objetivo: W_{min}
- Restricciones:
  - $W_{\mathrm{r}} \geq W_{\mathrm{min}}$
  - $W_{\mathrm{s}} \geq W_{\mathrm{min}}$
  - $W_{\mathrm{t}} \geq W_{\mathrm{min}}$

Localización simple de plantas

Localización simple de plantas

Se deben localizar plantas para atender a n mercados. Existen m localidades posibles para la instalación de las plantas. Cada mercado debe ser atendido por una y solo una planta. Una planta puede atender a varios mercados. Al instalar una planta en el lugar i, se tiene un costo fijo anual f_i. Al asignar la planta i al mercado j, se tiene un costo de operación anual c_{ij}. Se desea determinar el esquema de localización que minimice los costos anuales.

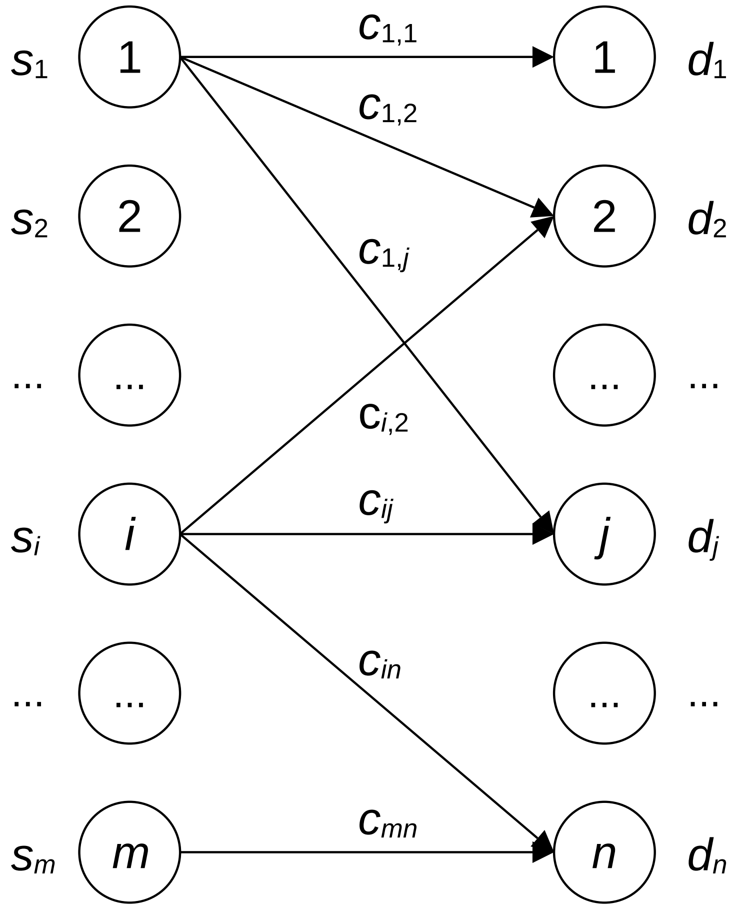
Elementos del modelo

- Índices:
  - Para orígenes: $i = 1, 2, \ldots, m$.
  - Para destinos: $j = 1, 2, \ldots, n$.

Elementos del modelo

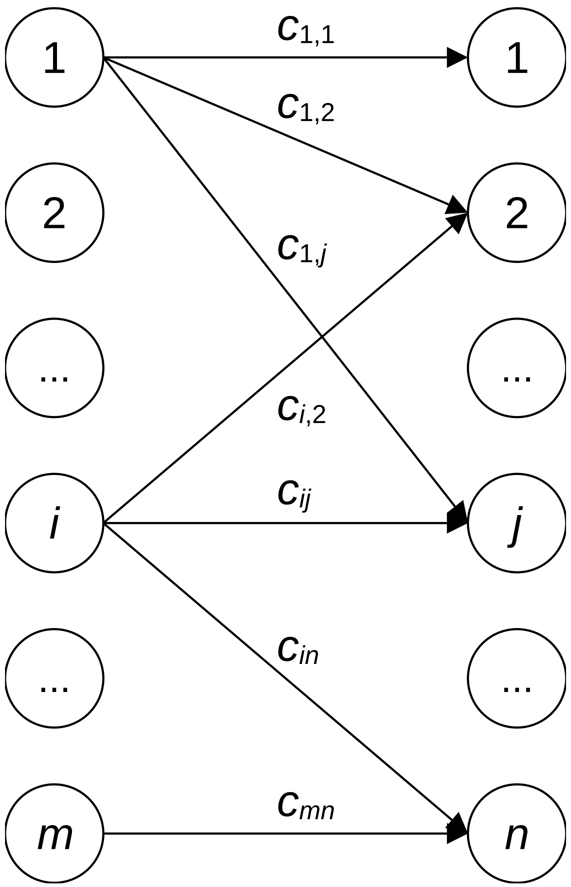
- Parámetros (en total, $2 + m + m\,n$):
  - m: Cantidad de orígenes.
  - n: Cantidad de destinos.
  - f_i: Costo fijo anual de la planta i.
  - c_{ij}: Costo de operación anual al asignar la planta i al mercado j.
- Variables de decisión (en total, $m + m\,n$):
  - y_i: 1 si se instala la planta i, 0 si no se instala.
  - x_{ij}: 1 si la planta i se asigna al mercado j, 0 si no se asigna.

Problema de transporte



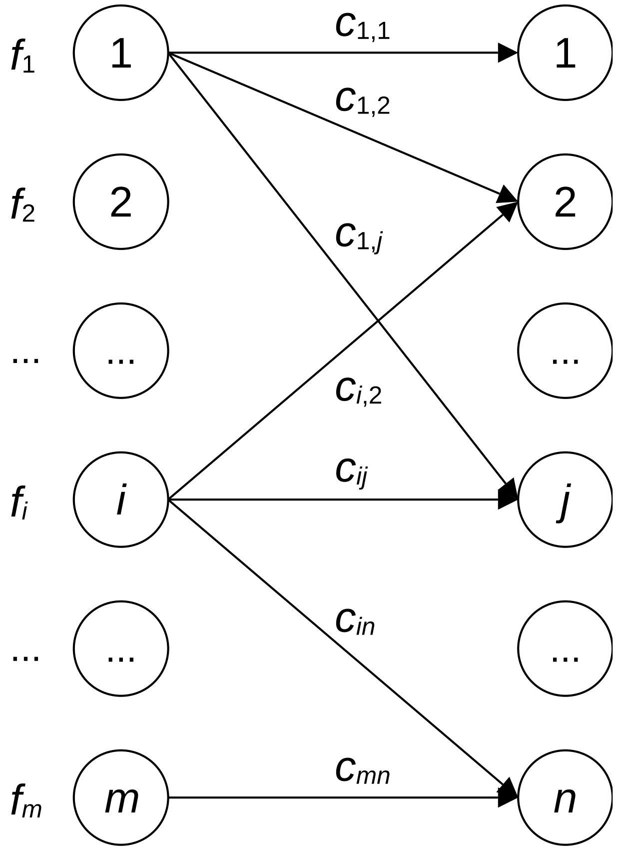
x_{ij}

Problema de asignación



$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ se asigna a la actividad } j \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Localización simple de plantas



$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si se instala la planta } i \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la planta } i \text{ se asigna al mercado } j \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Elementos del modelo

- Función objetivo:
  - Costo (\$/año): $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} f_i\, y_i$.
- Restricciones (en total, $m + n$ y las binarias):
  - Origen *i*: $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq n\, y_i$
  - Destino *j*: $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1$

• Si algún $x_{ij} = 1$, entonces $y_i = 1$.
• Si todos los $x_{ij} = 0$, entonces $y_i = 0$ por Min.

Localización simple de plantas

$$\underset{x_{ij},y_i}{\text{Min}} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\,x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} f_i\; y_i$$

s. a:

$$x_{ij} \le y_i \quad \forall i, j \quad \Rightarrow \quad \cancel{\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le n\, y_i \quad \forall i}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \quad \forall j$$

$$\cancel{x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall i, j}$$

$$\cancel{y_i \in \{0,1\} \quad \forall i}$$

Localización de plantas con capacidad

Localización de plantas con capacidad

Se deben localizar plantas para atender a *n* mercados. Existen *m* localidades posibles para la instalación de las plantas. Cada mercado debe ser atendido por una y solo una planta. Una planta puede atender a varios mercados. Al instalar una planta en el lugar *i*, se tiene un costo fijo anual f_i. Al asignar la planta *i* al mercado *j*, se tiene un costo de operación anual c_{ij}. Adicionalmente, la capacidad de la planta *i* es s_i, y la demanda del mercado *j* es d_j. Se desea determinar el esquema de localización que minimice los costos anuales.

Elementos del modelo

- Índices:
  - Para orígenes: $i = 1, 2, \ldots, m$.
  - Para destinos: $j = 1, 2, \ldots, n$.

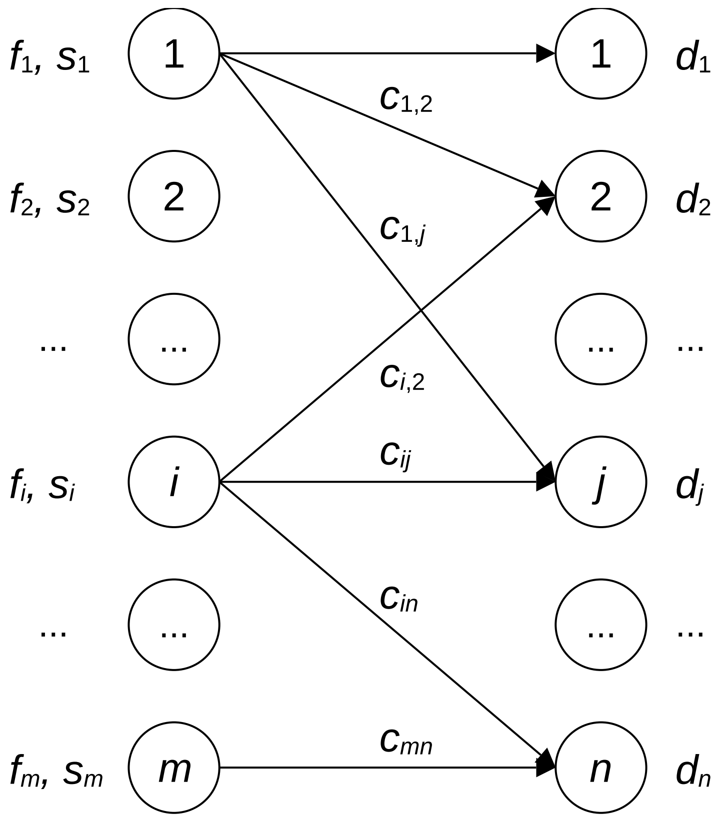
Elementos del modelo

- Parámetros (en total, $2 + 2\,m + n + m\,n$):
  - m: Cantidad de orígenes.
  - n: Cantidad de destinos.
  - f_i: Costo fijo de la planta i.
  - s_i: Capacidad de producción de la planta i.
  - d_j: Demanda del mercado j.
  - c_{ij}: Costo de operación anual al asignar la planta i al mercado j.

Elementos del modelo

- Variables de decisión (en total, $m + m\,n$):
  - y_i: 1 si se instala la planta *i*, 0 si no se instala.
  - x_{ij}: 1 si la planta *i* se asigna al mercado *j*, 0 si no se asigna.

Localización de plantas con capacidad



$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si se instala la planta } i \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la planta } i \text{ se asigna al mercado } j \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Elementos del modelo

- Condición suficiente: $d_j \leq s_i \; \forall i, j$
- Función objetivo:
  - Costo (\$/año): $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \, x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} f_i \, y_i$
- Restricciones (en total, $m + n$ y las binarias):
  - Origen *i* (caja): $\sum_{j=1}^{n} d_j \, x_{ij} \leq s_i y_i$
  - Destino *j*: $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1$

• Si algún x_{ij} = 1, entonces y_i = 1.
• Si todos los x_{ij} = 0, entonces y_i = 0 por Min.

Localización de plantas con capacidad

$$\underset{x_{ij},y_i}{\text{Min}} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} f_i \, y_i$$

s. a:

$$\sum_{j=1}^{n} d_j x_{ij} \le s_i y_i \quad \forall i$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \quad \forall j$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall i, j$$

$$y_i \in \{0,1\} \quad \forall i$$

Mapa curricular de función objetivo

1. Programación entera
2. Método gráfico
3. Costo fijo
4. Método de la gran M
5. Variables discretas
6. Actividad mínima
7. Minimax y maxmin
8. Localización de plantas