Simulación y Optimización

Optimización Introducción Parte II

Enrique E. Tarifa, Facultad de Ingeniería, UNJu

Mapa curricular de la materia

- Simulación
- Optimización

Mapa curricular de la materia

Simulación

Optimización

Mapa curricular de Optimización

- Definiciones
- Modelo de optimización
- Programación no lineal
- Programación lineal
- Análisis de sensibilidad

Mapa curricular de Optimización

- Definiciones
- Modelo de optimización
- Programación no lineal
- Programación lineal
- Análisis de sensibilidad

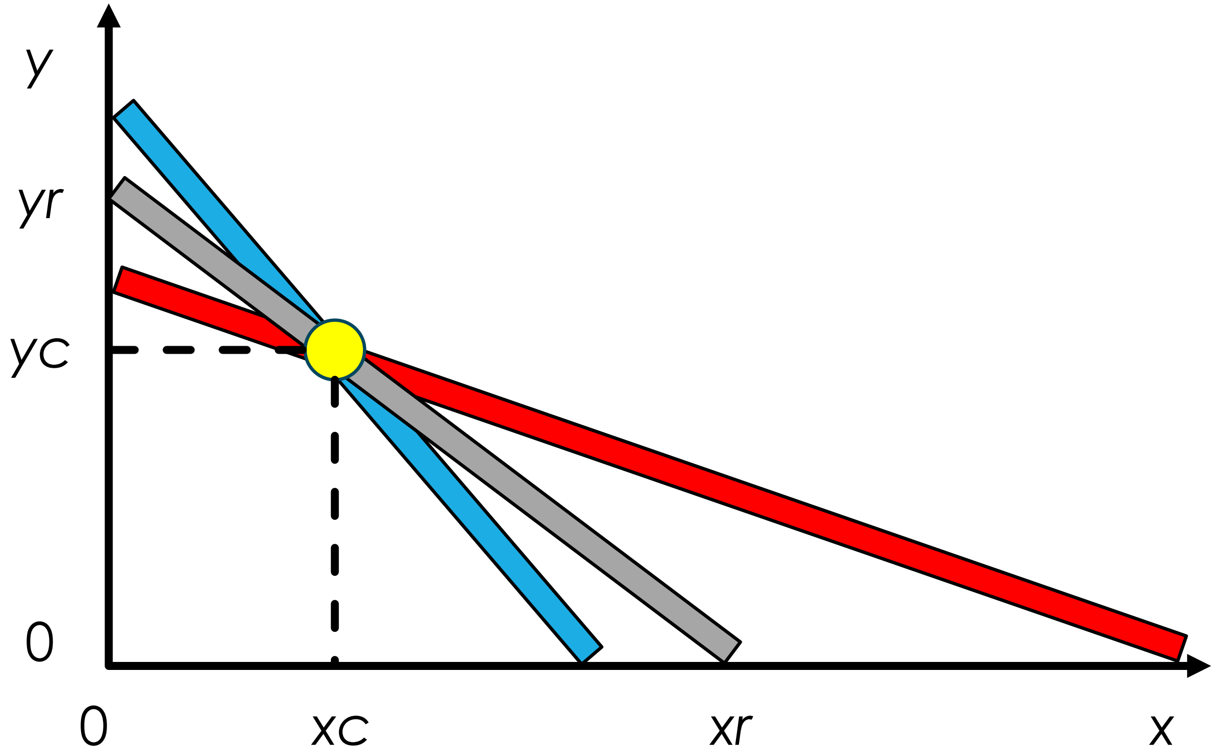
Mapa curricular de formulación matemática

1. Formulación matemática
2. Programación matemática
3. Optimización de trayectoria
4. Clasificación de modelos
5. Oportunidad para optimizar
6. Etapas de la optimización
7. Solución analítica
8. LINGO

Instalación de una viga

Problema de la viga

Determinar la viga recta de longitud mínima que pase por el punto de carga (2 m, 3 m).



Modelo de optimización

$$\underset{xr,yr,l}{\text{Min}}\ l$$

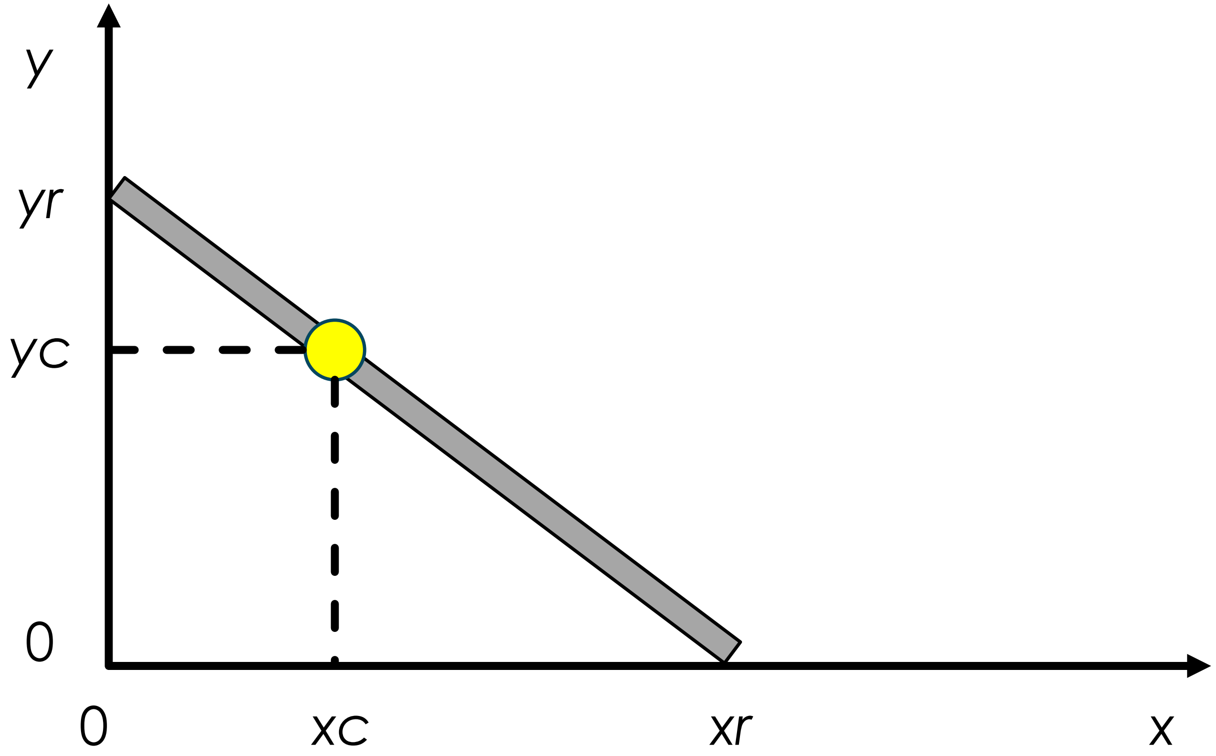
s. a:

$$\frac{yr}{xr} = \frac{yc}{xr - xc}$$

$$l = \sqrt{xr^2 + yr^2}$$

$$xc \leq xr$$

$$yc \leq yr$$



Instalación de una viga con xr.xlsx

Modelos

Modelo estándar

$$\min_{xr,yr,l} l$$

s. a:

$$\frac{yr}{xr} - \frac{yc}{xr - xc} = 0$$

$$l^2 - xr^2 - yr^2 = 0$$

$$xc - xr \le 0$$

$$yc - yr \le 0$$

Modelo de estado

$$\min_{xr} l$$

$$yr \leftarrow \frac{yc}{xr - xc} xr$$

$$l \leftarrow \sqrt{xr^2 + yr^2}$$

s. a:

$$xc \le xr$$

$$yc \le yr$$

Modelo de sustitución

$$\min_{xr} \sqrt{xr^2 + \left(\frac{yc}{xr - xc} xr\right)^2}$$

s. a:

$$xc \le xr$$

$$yc \le \frac{yc}{xr - xc} xr$$

GL = 1 para todos

Modelos

- Modelo estándar: Es el que se construye primero. Tiene todas las ecuaciones y variables. Es el más fácil de mantener, pero el más difícil de resolver.
- Modelo de estado: Tiene menos restricciones de igualdad y variables de decisión. En el caso extremo, no tiene restricciones de igualdad, y la cantidad de variables de decisión es igual al grado de libertad. Son las variables de decisión independientes del problema. Este modelo es más fácil de resolver que el modelo anterior.

Modelos

- Modelo de sustitución: Es similar al modelo de estado, pero se eliminaron las variables de decisión dependientes.
- En los tres modelos, el grado de libertad se mantiene igual porque indica la cantidad de variables de decisión independientes que tiene el problema.

Programación matemática

Programación matemática

$$\underset{x_j}{\mathrm{Max}}\, FO\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

s. a:

$$h_i\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$g_k\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \leq 0 \quad k = 1, 2, \ldots, o$$

$$GL = n - m$$

Modelo de estado

$$x_i = F_i\left(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n\right) \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix} \qquad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_{n-m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{m+1} \\ x_{m+2} \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$y_i \leftarrow F_i\left(u_1, u_2, \dots, u_{n-m}\right) \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Modelo de estado

$$x_i = F_i\left(x_3\right) \quad i = 1, 2$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yr \\ l \end{pmatrix} \qquad u = \left(u_1\right) = \left(x_3\right) = \left(xr\right)$$

$$y_i \leftarrow F_i\left(u_1\right) \quad i = 1, 2$$

Modelo de estado

$$\underset{u_j}{\text{Max}}\ FO\left(y_1, y_2, \ldots, y_m, u_1, u_2, \ldots, u_{n-m}\right) \quad j = 1, 2, \ldots, n-m$$

$$y_i \leftarrow F_i\left(u_1, u_2, \ldots, u_{n-m}\right) \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

s. a:

$$g_k\left(y_1, y_2, \ldots, y_m, u_1, u_2, \ldots, u_{n-m}\right) \le 0 \quad k = 1, 2, \ldots, o$$

$$GL = n - m$$

Modelo de sustitución

$$\underset{u_j}{\text{Max}}\ FO\left(F_1\left(u_1,u_2,\ldots,u_{n-m}\right),F_2\left(u_1,u_2,\ldots,u_{n-m}\right),\ldots,F_m\left(u_1,u_2,\ldots,u_{n-m}\right),u_1,u_2,\ldots,u_{n-m}\right)$$

$$j=1,2,\ldots,n-m$$

s. a:

$$g_k\left(F_1\left(u_1,u_2,\ldots,u_{n-m}\right),F_2\left(u_1,u_2,\ldots,u_{n-m}\right),\ldots,F_m\left(u_1,u_2,\ldots,u_{n-m}\right),u_1,u_2,\ldots,u_{n-m}\right)\le 0$$

$$k=1,2,\ldots,o$$

$$GL=n-m$$

Optimización de trayectoria

Optimización de trayectoria

$$\underset{x_j(t)}{\text{Max}}\, FO\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)\Big|_{t=t_\mathrm{f}} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

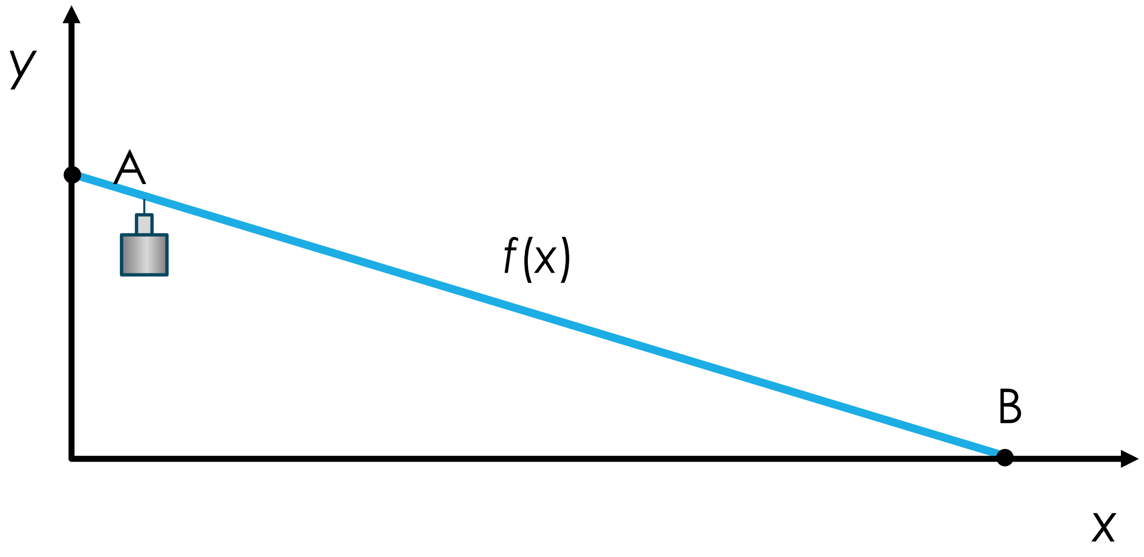
s. a:

$$\frac{dx_l}{dt} = f_l\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \qquad l = 1, 2, \ldots, p$$

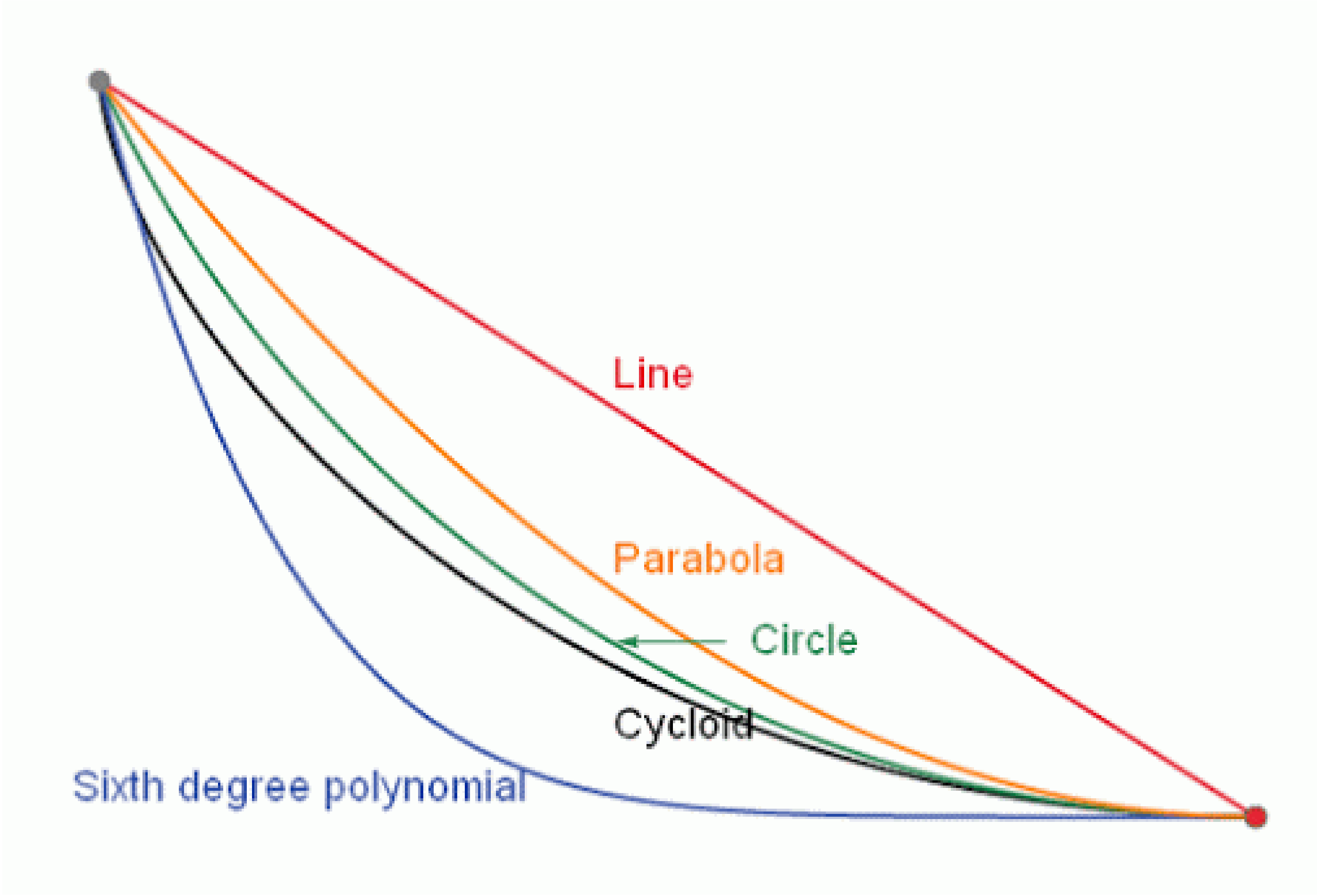
$$x_l\left(t_0\right) = x_{l0} \qquad\qquad t_0 \leq t \leq t_\mathrm{f}$$

Curva braquistócrona

- En 1696, Jakob Bernoulli y Johann Bernoulli resolvieron el problema de la braquistócrona.
- La primera aplicación del cálculo de variaciones.



Curva braquistócrona



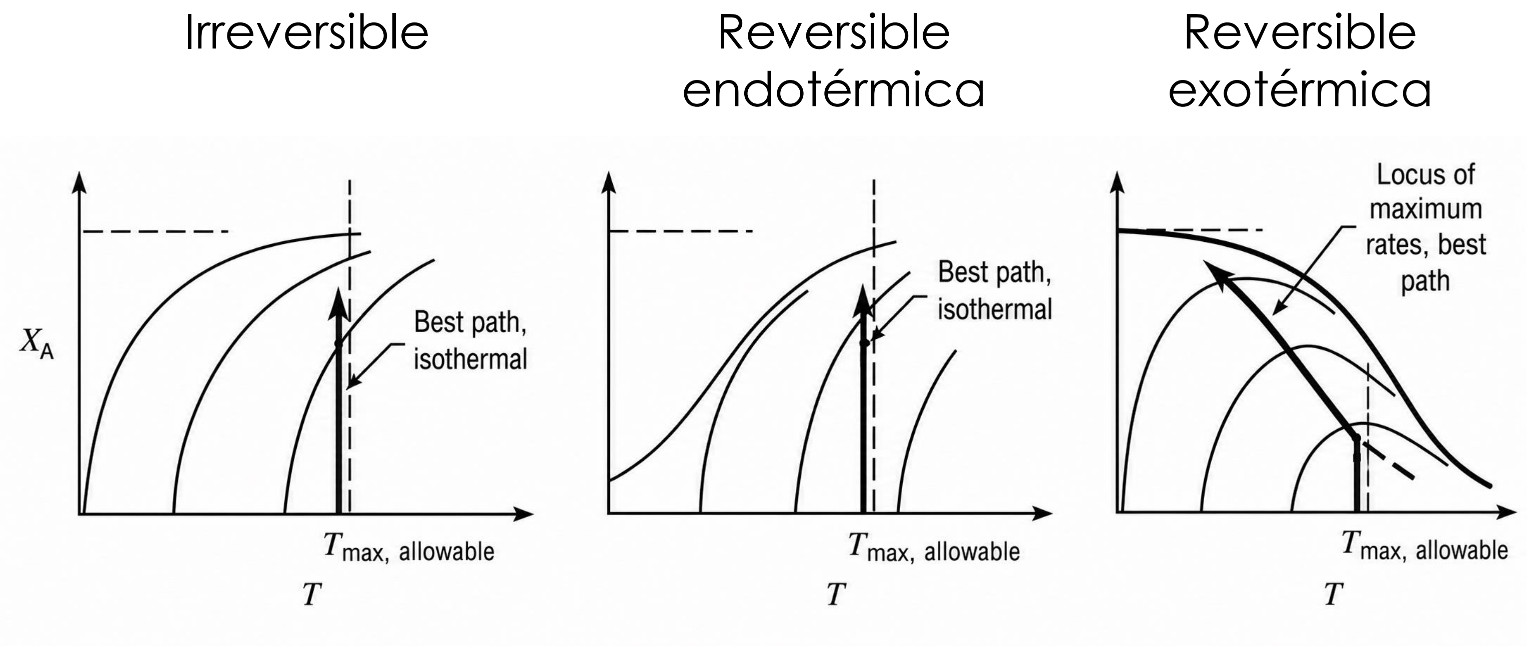
Progresión óptima de temperatura

$$\underset{T(x)}{\text{Max}}\, X_A(x_f)$$

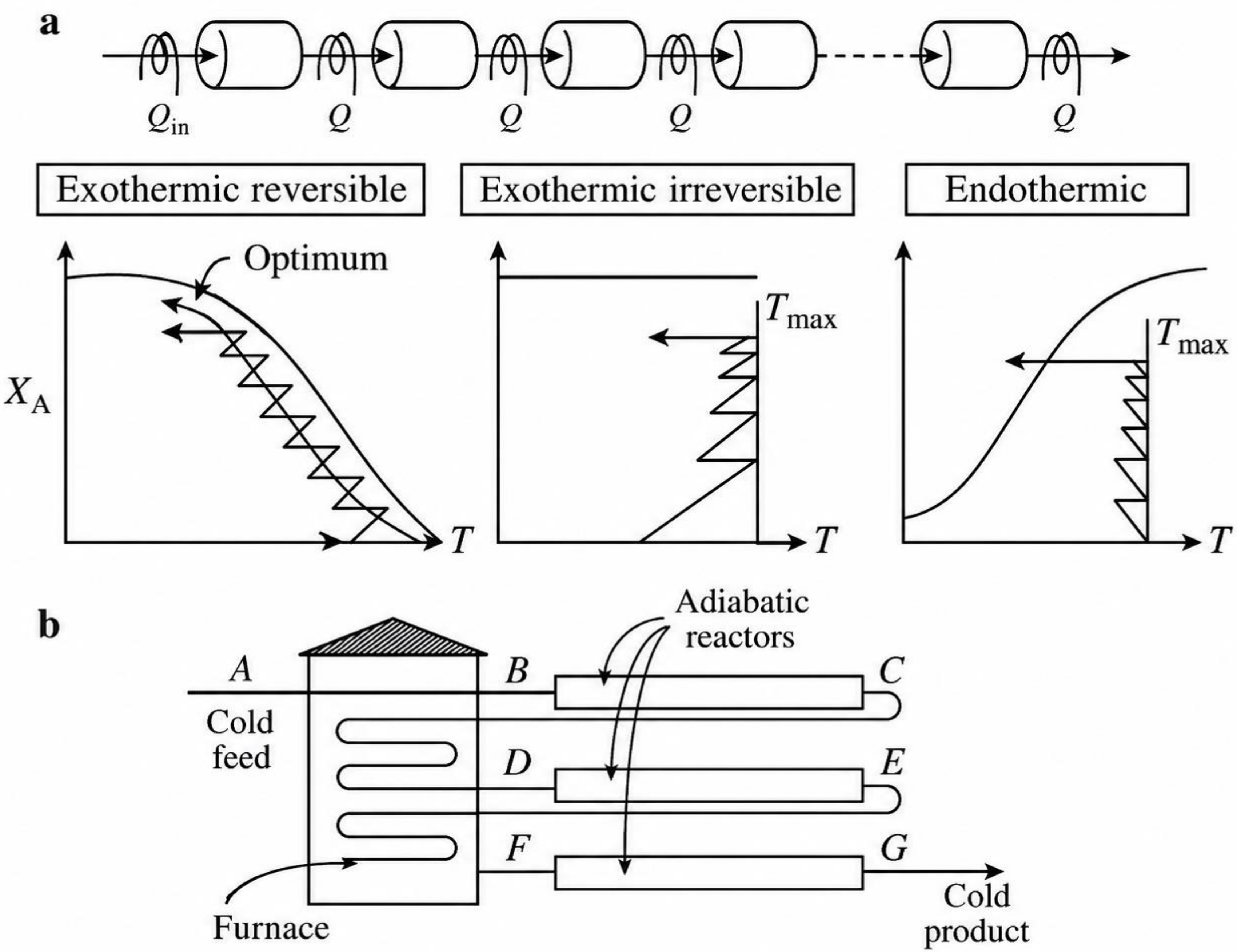
s. a:

$$\frac{dX}{dx} = F(x)$$

$$X(x) = X_0$$

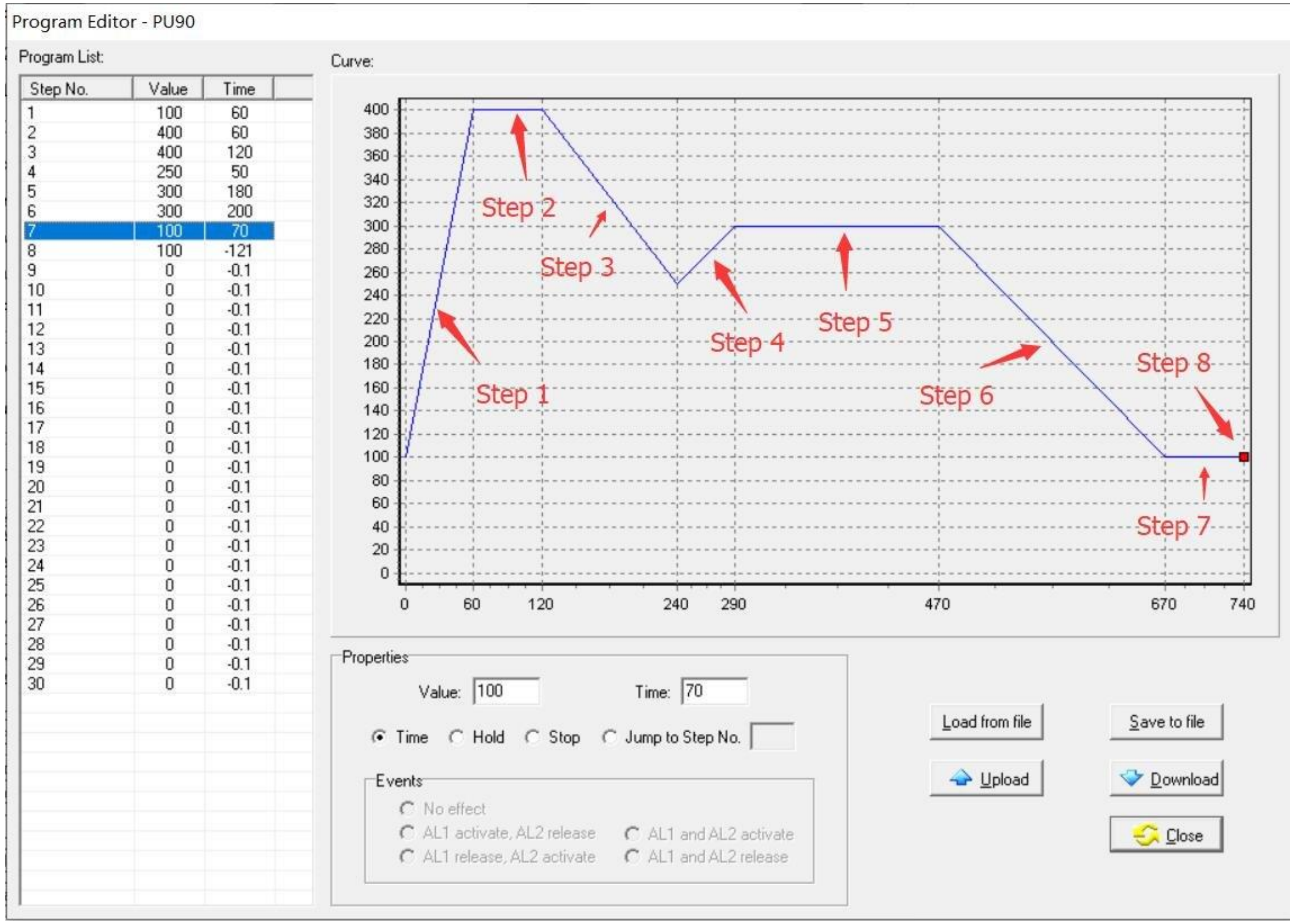


donde x es *t* para reactores *batch* o es z para reactores tubulares.



a
Q_{in}
Q
Q
Q
Q
Exothermic reversible
Exothermic irreversible
Endothermic
Optimum
X_A
T
T_{max}
T
T_{max}
T
b
Adiabatic
reactors
A
B
C
Cold
feed
D
E
F
G
Furnace
Cold
product

Control por computadora



Controlador analógico

Clasificación de modelos de programación matemática

Programación matemática

$$\underset{x_j}{\mathrm{Max}}\, FO\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

s. a:

$$h_i\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$g_k\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \leq 0 \quad k = 1, 2, \ldots, o$$

$$GL = n - m$$

Clasificación de modelos

- Programación Lineal (LP, *Linear Programming*)
- Programación No Lineal (NLP, *Nonlinear Programning*)
- Programación Lineal Entera (ILP, *Integer Linear Programming*)
- Programación No Lineal Entera (INLP, *Integer Nonlinear Programming*)
- Programación Lineal Entera Mixta (MILP, *Mixed Integer Linear Programming*)
- Programación No Lineal Entera Mixta (MINLP, *Mixed Integer Nonlinear Programming*)

$$FO(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n$$

Oportunidades para optimizar

Oportunidad para optimizar

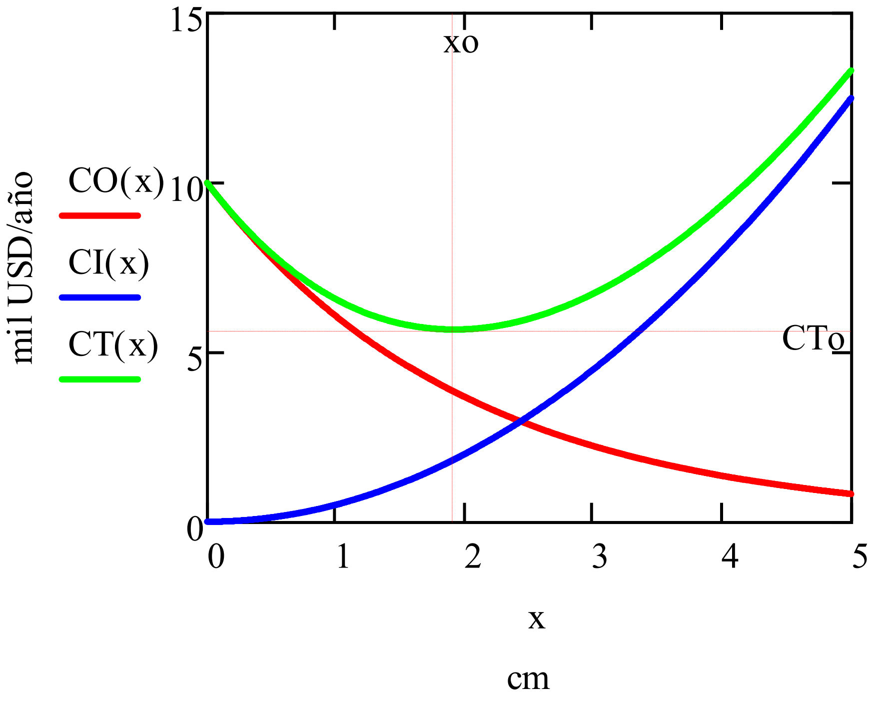
- Ventas limitadas por producción: Maximizar la producción.
- Ventas limitadas por el mercado: Minimizar los costos de producción.
- Grandes volúmenes de producción: Pequeños ahorros en los costos de producción tienen un gran impacto. Es el caso de las refinerías y plantas químicas.
- Alto consumo de materia prima o energía: Optimizar los equipos con mayor consumo.

Oportunidad para optimizar

- La calidad de los productos es superior a la requerida por el mercado: Minimizar los costos reduciendo la calidad hasta el límite de aceptación.
- Pérdida de componentes valiosos en los efluentes: Minimizar las pérdidas teniendo en cuenta la legislación ambiental.
- Alto costo de mano de obra: Pasar de *batch* a continuo, modificar el *scheduling*, etc.

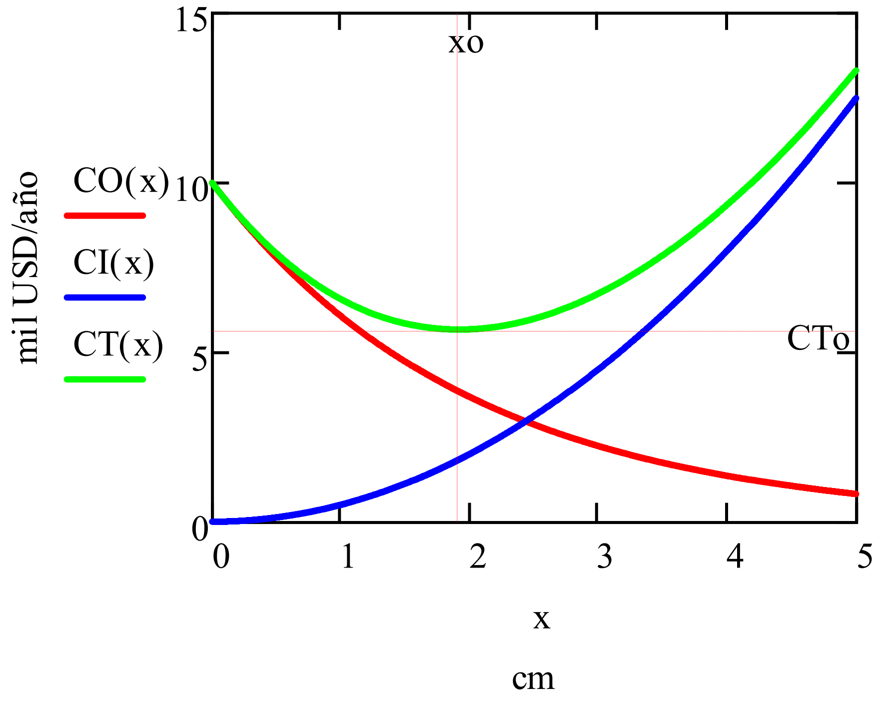
Pistas: *trade-off*

- Descubrir efectos que se opongan entre sí (*trade-off*):
  - Espesor de aislante, *x*(+)
  - Costo de instalación, *CI*(+)
  - Costo de operación *CO*(-)



Pista: valores extremos

- Descubrir una variable cuyos valores extremos conducen a situaciones inconvenientes:
  - x = 1 m, *CI* alto, *CO* bajo
  - x = 1 mm, *CI* bajo, *CO* alto



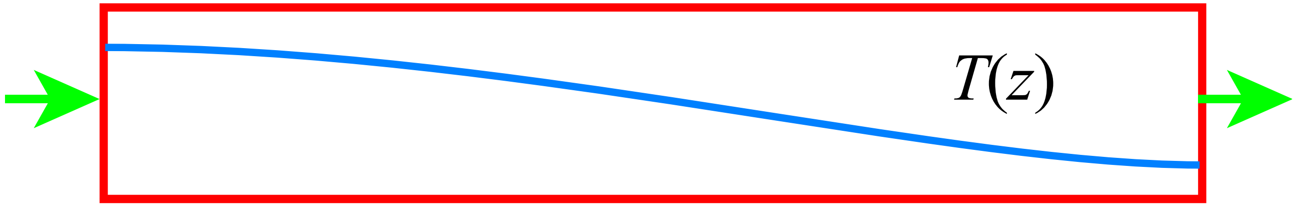
Etapas de la optimización

Etapas de la optimización

1. Definir el sistema a optimizar.
2. Determinar el criterio de optimización $\rightarrow$ la función objetivo.
3. Modelar el sistema $\rightarrow$ las restricciones.
4. Aplicar un método matemático adecuado.
5. Verificar la solución. Condiciones de optimalidad.
6. Analizar la sensibilidad de la solución con respecto a los parámetros y suposiciones.
7. Supervisar la implementación.

Implementación

Solución óptima



Optimización de trayectoria

Fábrica de contenedores

Fábrica de contenedores

Para una planta que produce contenedores de plástico, la demanda anual es Q = 1110 contenedores distribuida homogéneamente a lo largo del año a precio fijo. Determinar el *schedule* de producción. La producción se puede considerar instantánea.

Fábrica de contenedores

- Valores extremos:
  - Si se produce todo a principio de año, el costo de almacenamiento será alto.
  - Si se produce al mismo ritmo que la demanda, la planta se pondrá en marcha y se detendrá muchas veces. El costo de operación será alto.
- Debe existir una cantidad óptima de ciclos n de operación por año para satisfacer la demanda Q.
- En cada ciclo, se producirán D contenedores. Es una cantidad entera.

Fábrica de contenedores

- Criterio: Económico
- Función objetivo:
  - Costo del alquiler del depósito ($/año): $k_1 D$
  - Costo de producción por ciclo ($/ciclo): $k_2 + k_3 D$
  - Costo total ($/año): $C = k_1 D + n(k_2 + k_3 D)$
- Restricción:
  - Cantidad de ciclos necesarios: $n = \frac{Q}{D}$

Fábrica de contenedores

- Parámetros:
  - Q: Total de unidades producidas por año (contenedor/año).
  - k_1, k_2 y k_3: Constantes de costo.
- Variables de decisión:
  - C: Costo total anual ($/año).
  - *D*: Número de unidades producidas en cada ciclo, es un número entero (contenedor/ciclo).
  - *n*: Ciclos por año (puesta en marcha, parada y venta de *D*), no es necesariamente entera (ciclo/año).

Fábrica de contenedores

Q, k_1, k_2 y k_3 ⇒

$$\min_{C,D,n} C$$

s. a:

$$C = k_1 D + n\left(k_2 + k_3 D\right)$$

$$n = \frac{Q}{D}$$

$$D \in \mathbb{N}$$

$$C \geq 0$$

$$n \geq 0$$

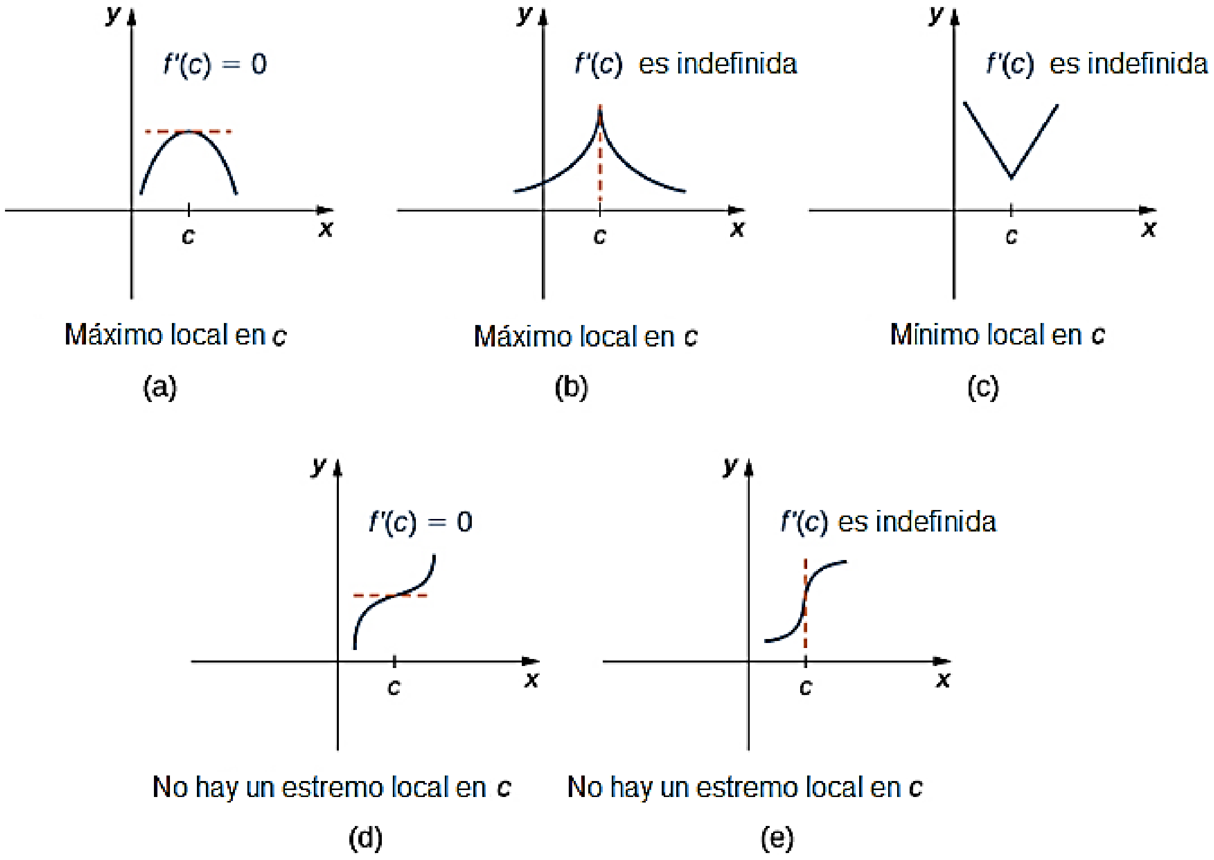
⇒ C, D y n

$GL = 3 - 2 = 1$

Solución analítica

Solución analítica

- Punto crítico:
  - $\dfrac{df}{dx} = 0$ o no existe.
- Punto extremo:
  - $\dfrac{d^2f}{dx^2} > 0$, mínimo
  - $\dfrac{d^2f}{dx^2} < 0$, máximo



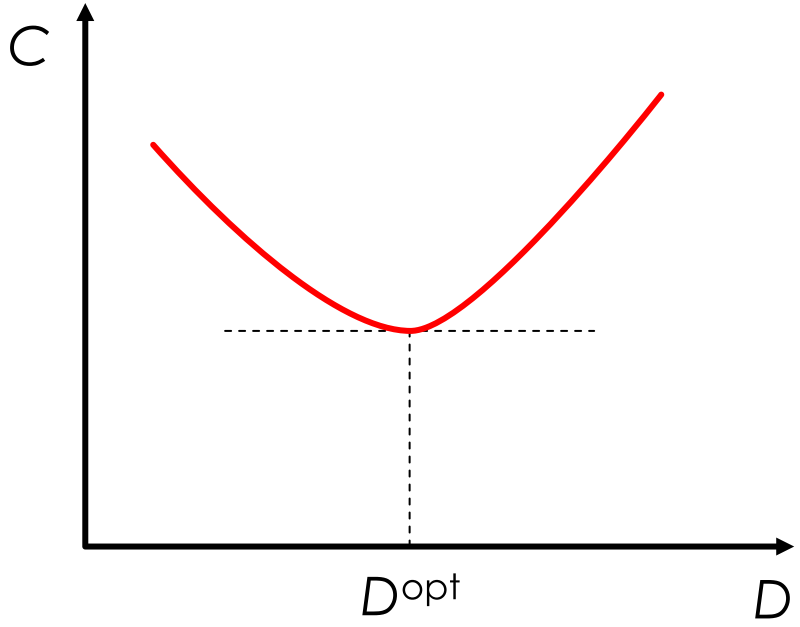
Fábrica de contenedores

- Eliminando *n*: $C = k_1 D + \dfrac{k_2 Q}{D} + k_3 Q$
- Resolución analítica:

$$\frac{dC}{dD} = k_1 - \frac{k_2 Q}{D^2} = 0$$

$$D^{\text{opt}} = \sqrt{\frac{k_2 Q}{k_1}}$$

$$\frac{d^2 C}{dD^2} = \frac{2k_2 Q}{D^3} = 2\sqrt{\frac{k_1^3}{k_2 Q}} > 0$$



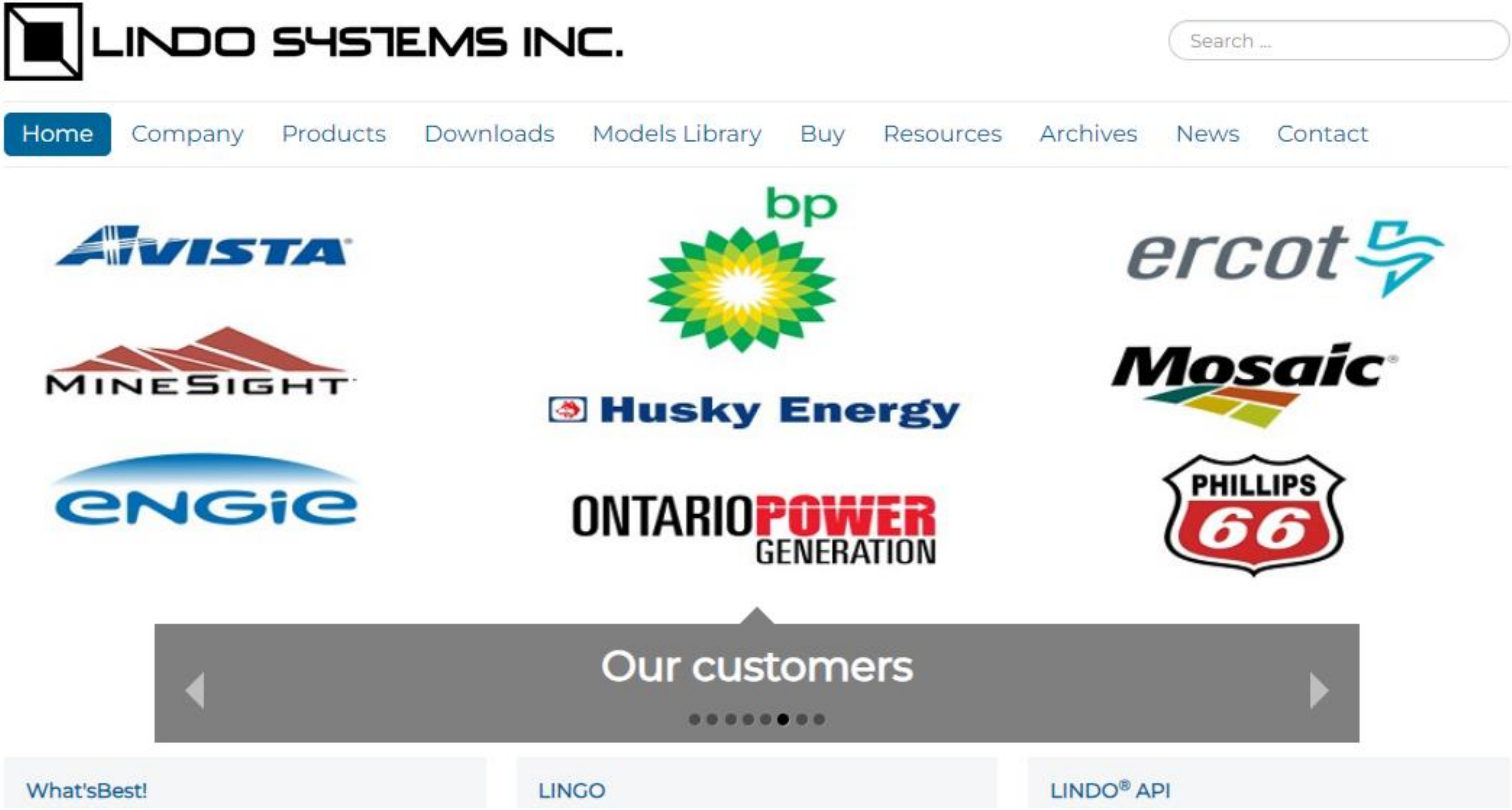
Fábrica de contenedores

- Análisis: No depende de k_3. Si se modifica Q, D^{opt} varía con la raíz cuadrada $\rightarrow$ heurístico.

$$D^{opt} = \sqrt{\frac{k_2 Q}{k_1}}$$

Fábrica de contenedores

- Datos:
  - Q = 1110 contenedor/año
  - k_1 = 10000 \$·ciclo/(año·contenedor)
  - k_2 = 1000 \$/ciclo
  - k_3 = 50 \$/contenedor



https://www.lindo.com

LINDO SYSTEMS INC.

Search ...

Home Company Products **Downloads** Models Library Buy Resources Archives News Contact

- Try What'sBest!
- Try Lingo
- Try Lindo API
- User Manuals

Downloads

Download trial versions of our p

From this page, you can download and try out all our software products **FREE** of charge. The trial versions have all the features and functionality of the standard versions, but the problem capacities have been limited. These **trial versions allow you to set up and solve small problems**, become familiar with the software and all of its features, and make sure you make the right choice.

Download What's*Best!*

What's*Best!* lets you build linear, nonlinear, and integer models in Excel. Models are easy to build and understanding standard spreadsheet equations. Excel users can often begin building models within minutes of installing the What's*Best!* program, and the problem capacities of the larger What's*Best!* versions allow large scale, real world problems to be solved.

Download LINGO

LINGO is a comprehensive tool designed to help you build and solve linear, nonlinear, and integer optimization models quickly, easily, and efficiently. LINGO includes a powerful modeling language, a full-featured environment for building and editing problems, the ability to read and write to Excel and databases, and a set of fast built-in solvers.

Download Lingo

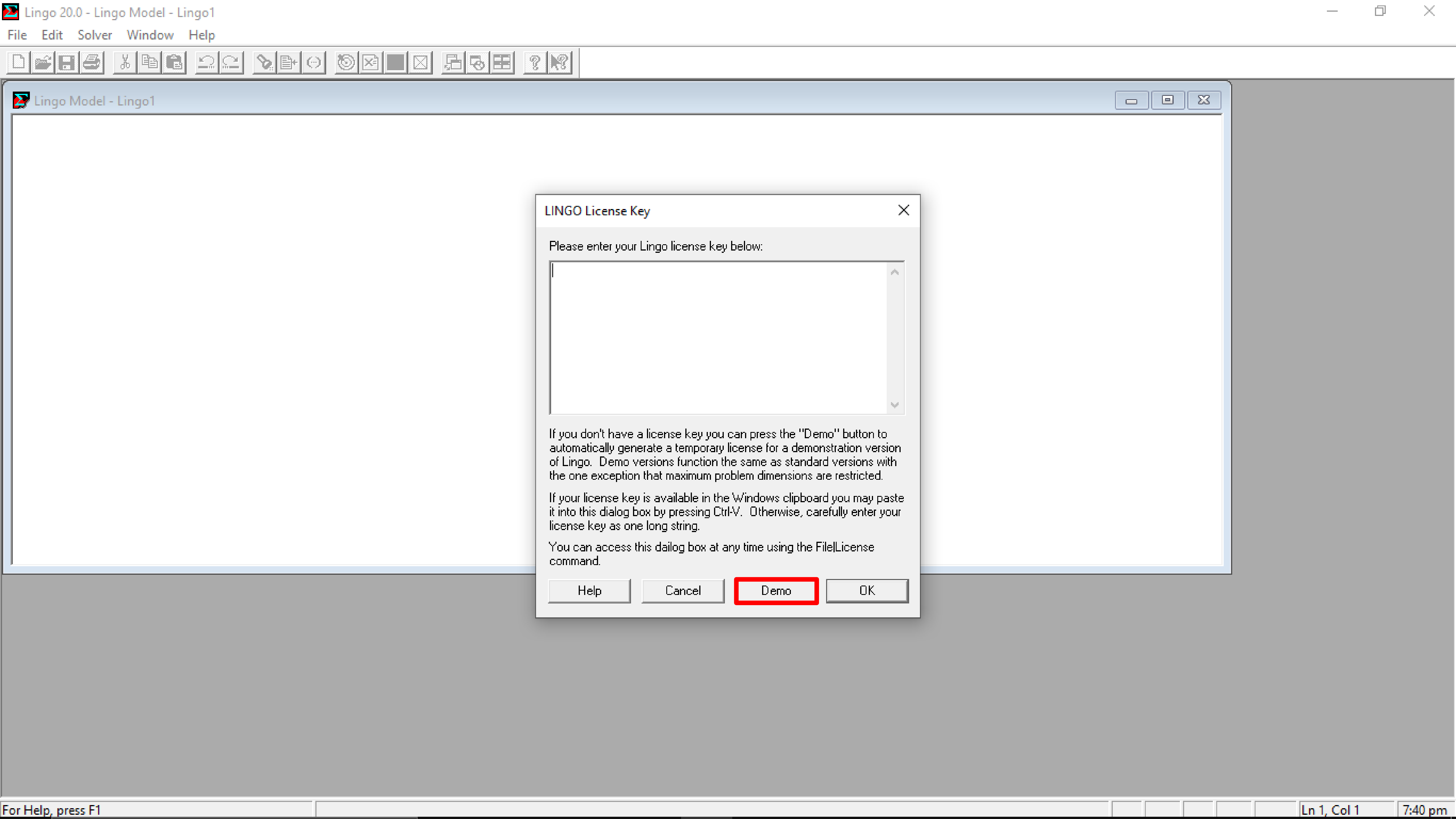
LINGO is currently available on the platforms listed below.

Current Release:

LINGO Version	Operating System	Bit Size	CPU	File Size	
22.0	Windows	64	x64	61MB	Download
22.0	Linux	64	x64	49MB	Download

Older Releases:

LINGO Version	Operating System	Bit Size	CPU	File Size	
21.0	Windows	64	x64	85 MB	Download
20.0	Windows	32	x86	44.8MB	Download
20.0	Windows	64	x64	40.3MB	Download
20.0	Linux	64	x64	61MB	Download
20.0	Mac	64	x64	40MB	Download
19.0	Windows	32	x86	44.8MB	Download
19.0	Windows	64	x64	40.3MB	Download
19.0	Linux	64	x64	61MB	Download
19.0	Mac	64	x64	40MB	Download
18.0	Windows	32	x86	44.8MB	Download
18.0	Windows	64	x64	40.3MB	Download



Lingo 20.0 - Lingo Model - Lingo1
File Edit Solver Window Help
Lingo Model - Lingo1
LINGO License Key
Please enter your Lingo license key below:
If you don't have a license key you can press the "Demo" button to automatically generate a temporary license for a demonstration version of Lingo. Demo versions function the same as standard versions with the one exception that maximum problem dimensions are restricted.
If your license key is available in the Windows clipboard you may paste it into this dialog box by pressing Ctrl-V. Otherwise, carefully enter your license key as one long string.
You can access this dailog box at any time using the File|License command.
Help
Cancel
Demo
OK
For Help, press F1
Ln 1, Col 1
7:40 pm

Lingo 20.0 - Lingo Model - Lingo1

File Edit Solver Window Help

Lingo Model - Lingo1

Demo Lingo/Win64
Release 20.0.23 (5 Sep 2023)
Copyright © 2011 - 2022

LINDO Systems Inc
1415 North Dayton Street
Chicago, IL 60642
312/988-7422
http://www.lindo.com

Limits for this Installation:

Constraints:	150
Variables:	300
Integer Variables:	30
Nonlinear Variables:	30
Global Variables:	5
Generator Memory (Mb):	32

License Expiration: 7 Dec 2026

License Usage: Commercial

Licenses: 1

API Version: 14.0.5099.295

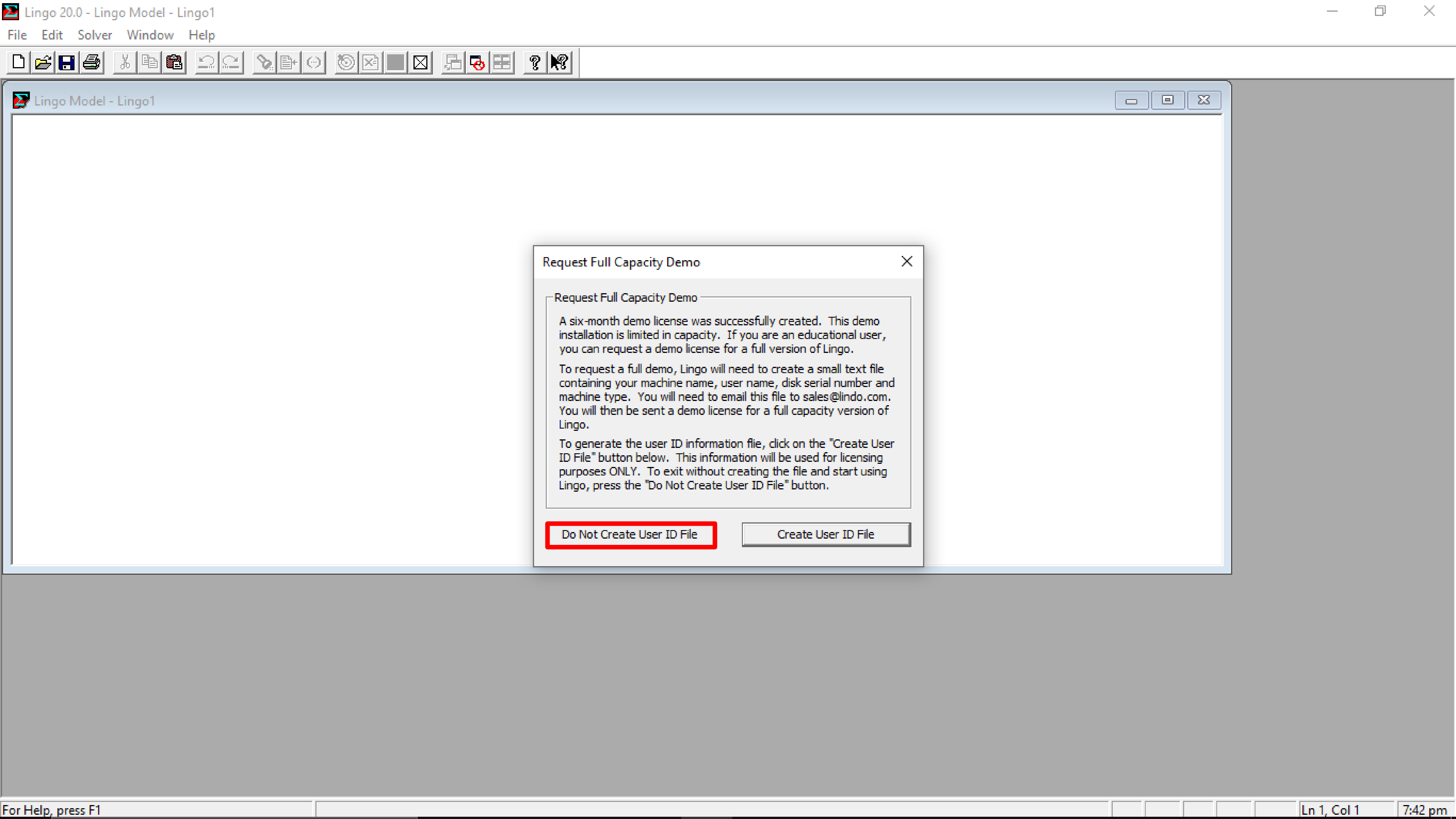
License Location: C:\LINGO64_20\lndlng20.lic

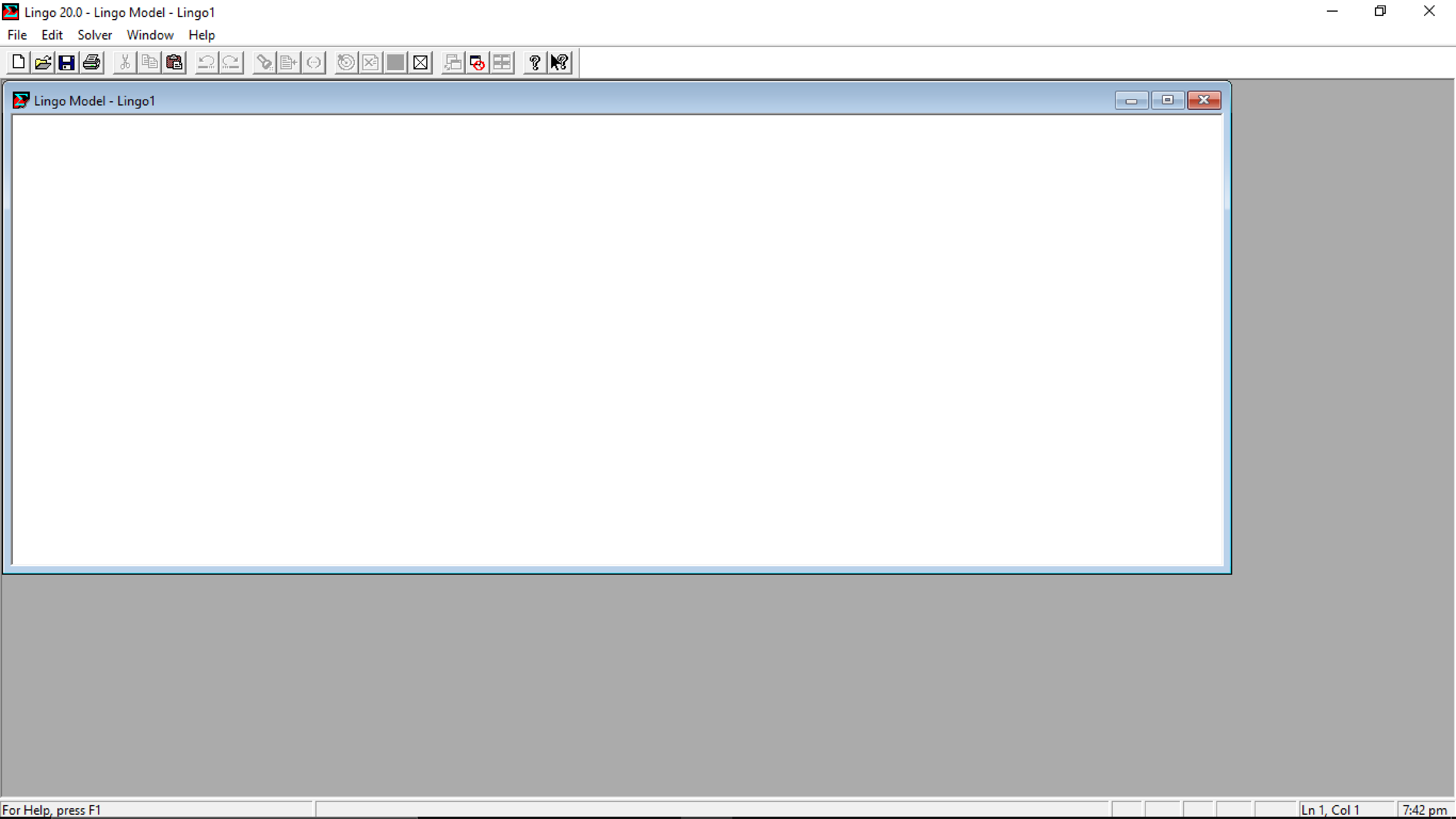
Config Location:

Additional License Information:
Eval Use Only
Enabled Solvers:

OK

For Help, press F1 Ln 1, Col 1 7:41 pm


Lingo 20.0 - Lingo Model - Lingo1
File Edit Solver Window Help
Lingo Model - Lingo1
Request Full Capacity Demo
Request Full Capacity Demo
A six-month demo license was successfully created. This demo installation is limited in capacity. If you are an educational user, you can request a demo license for a full version of Lingo.
To request a full demo, Lingo will need to create a small text file containing your machine name, user name, disk serial number and machine type. You will need to email this file to sales@lindo.com. You will then be sent a demo license for a full capacity version of Lingo.
To generate the user ID information flie, click on the "Create User ID File" button below. This information will be used for licensing purposes ONLY. To exit without creating the file and start using Lingo, press the "Do Not Create User ID File" button.
Do Not Create User ID File
Create User ID File
For Help, press F1
Ln 1, Col 1
7:42 pm


Lingo 20.0 - Lingo Model - Lingo1
File
Edit
Solver
Window
Help
Lingo Model - Lingo1
For Help, press F1
Ln 1, Col 1
7:42 pm

LINGO

- No distingue minúsculas de mayúsculas.
- Es un lenguaje declarativo.
- Supone que las variables de decisión son no negativas.
- Considera a las desigualdades estrictas iguales a las desigualdades no estrictas: $X < 10 \Leftrightarrow X \leq 10$.
- @LOG es el logaritmo natural.

LINGO

- Los comentarios comienzan con “!”.
- Las líneas finalizan con “;”.
- Los nombres de las ecuaciones deben ser distintos que los nombres de las variables:
  - [FO]: Función objetivo.
  - [RX]: Restricción de la variable *X*.

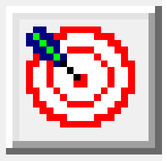
Modelo en LINGO

Asignaciones

Ecuaciones

Lingo Model - Contenedores

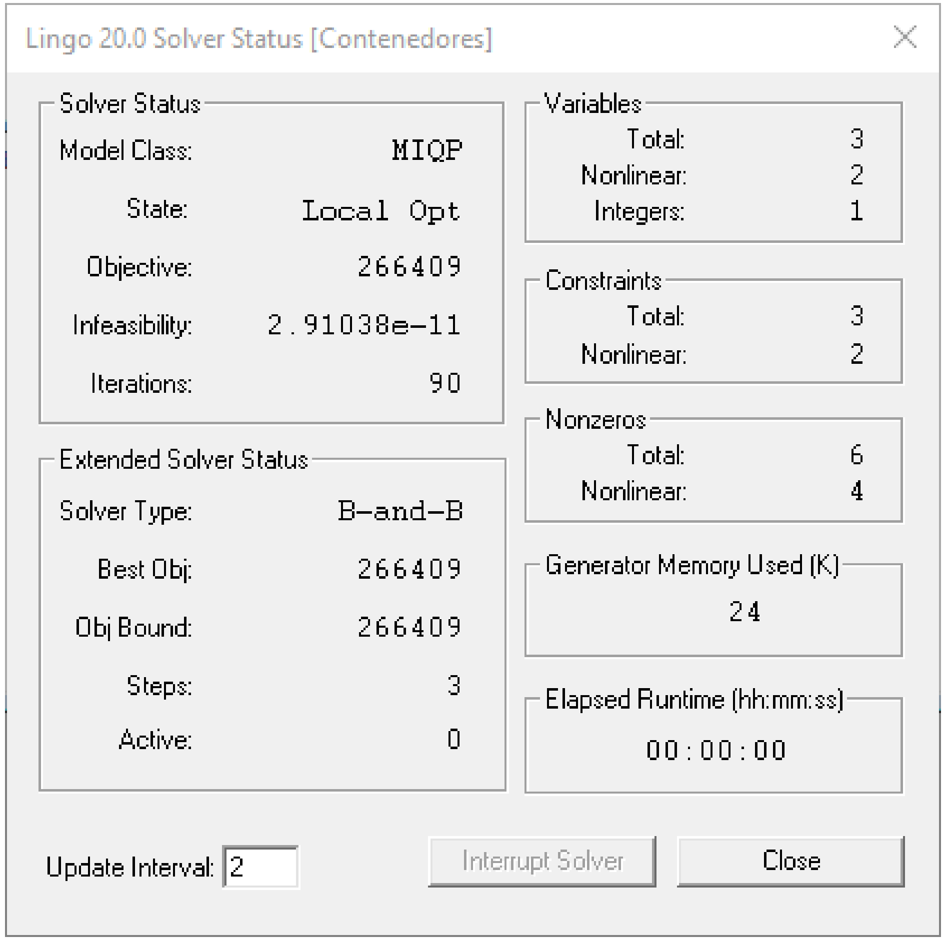
```
! Fábrica de contenedores
n: ciclo/año
D: contenedor/ciclo
C: $/año;

Data:
   K1 = 10000; ! $*ciclo/(año*contenedor);
   K2 = 1000;  ! $/ciclo;
   K3 = 50;    ! $/contenedor;
   Q = 1110;   ! contenedor/año;
EndData

[FO] Min = C;
[RC] C = K1*D+n*(K2+K3*D);
[Rn] n*D = Q;
[RD] @gin(D);
```



Extensión lg4

Contenedores.lg4

Modelo en LINGO



Resultados en LINGO

Variable	Value	Reduced Cost
K1	10000.00	0.000000
K2	1000.000	0.000000
K3	50.00000	0.000000
Q	1110.000	0.000000
C	266409.1	0.000000
D	11.00000	826.4446
N	100.9091	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
FO	266409.1	-1.000000
RC	0.000000	-1.000000
RN	0.000000	-140.9091

Deben ser no negativos.

Extensión lgr

Fábrica de contenedores

Datos

- Q = 1110 contenedor/año
- k_1 = 10000 \$·ciclo/(año·contenedor)
- k_2 = 1000 \$/ciclo
- k_3 = 50 \$/contenedor

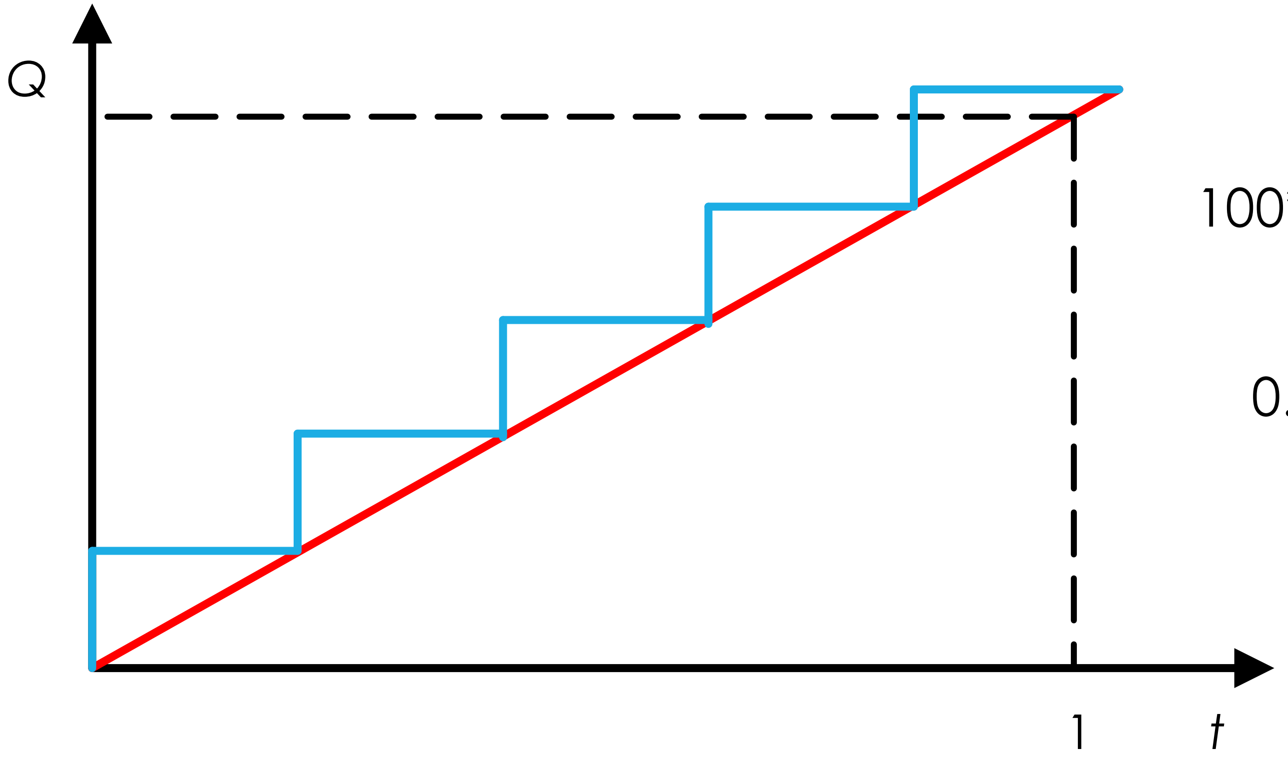
Solución

- Con D libre:
  - C = 266213.1 \$/año
  - D = 10.54 contenedor
  - n = 105.36 ciclo
- Con D natural:
  - C = 266409.1 \$/año
  - D = 11 contenedor
  - n = 100.91 ciclo

Demanda acumulada

Q = 1110 contenedor/año
C = 266409.1 \$/año
D = 11 contenedor
n = 100.91 ciclo

Cada escalón es un ciclo.



$100*11+10 = 1110$

$0.9091 \times 11 = 10$

Mapa curricular de formulación matemática

1. Formulación matemática
2. Programación matemática
3. Optimización de trayectoria
4. Clasificación de modelos
5. Oportunidad para optimizar
6. Etapas de la optimización
7. Solución analítica
8. LINGO