Simulación y Optimización

Programación entera

Enrique E. Tarifa, Facultad de Ingeniería, UNJu

Clasificación de modelos

- Programación Lineal (LP, *Linear Programming*)
- Programación No Lineal (NLP, *Nonlinear Programming*)
- Programación Lineal Entera (ILP, *Integer Linear Programming*)
- Programación No Lineal Entera (INLP, *Integer Nonlinear Programming*)
- Programación Lineal Entera Mixta (MILP, *Mixed Integer Linear Programming*)
- Programación No Lineal Entera Mixta (MINLP, *Mixed Integer Nonlinear Programming*)

$$FO\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n$$

Programación entera

$$\max_{x_1, x_2} x_1 + 2x_2$$

s. a:

$$-x_1 + x_2 \leq 3.5$$

$$x_1 + x_2 \leq 16.5$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{N}$$

- Solución relajada:
  - $x_1 = 6.5$ y $x_2 = 10$
  - *FO* = 26.5
- Solución redondeada:

Programación entera

$$\max_{x_1, x_2} x_1 + 2x_2$$

s. a:

$$-x_1 + x_2 \leq 3.5$$

$$x_1 + x_2 \leq 16.5$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{N}$$

- Solución relajada:
  - $x_1 = 6.5$ y $x_2 = 10$
  - $FO = 26.5$
- Solución redondeada:
  - No factible: $x_1 = 7$ y $x_2 = 10$

Programación entera

$$\max_{x_1, x_2} \; x_1 + 2x_2$$

s. a:

$$-x_1 + x_2 \leq 3.5$$

$$x_1 + x_2 \leq 16.5$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{N}$$

- Solución relajada:
  - $x_1 = 6.5$ y $x_2 = 10$
  - *FO* = 26.5
- Solución redondeada:
  - No factible: $x_1 = 7$ y $x_2 = 10$
  - No factible: $x_1 = 6$ y $x_2 = 10$

Programación entera

$$\underset{x_1, x_2}{\text{Max}}\; x_1 + 2x_2$$

s. a:

$$-x_1 + x_2 \leq 3.5$$

$$x_1 + x_2 \leq 16.5$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{N}$$

Programación entera.lg4

- Solución relajada:
  - $x_1 = 6.5$ y $x_2 = 10$
  - *FO* = 26.5
- Solución redondeada:
  - No factible: $x_1 = 7$ y $x_2 = 10$
  - No factible: $x_1 = 6$ y $x_2 = 10$
  - Solución no óptima.
- Solución entera:
  - $x_1 = 7$, $x_2 = 9$, *FO* = 25

Modelo en LINGO

Lingo Model - Programación entera

```
! Programación entera;
[FO] Max = x1 + 2*x2;
[R1] -x1 + x2 <= 3.5;
[R2] x1 + x2 <= 16.5;
@gin(x1);
@gin(x2);
```

Resultados en LINGO

Variable	Value	Reduced Cost
X1	7.000000	-1.000000
X2	9.000000	-2.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
FO	25.00000	1.000000
R1	1.500000	0.000000
R2	0.5000000	0.000000

Reactores y extractores

Reactores y extractores

Una planta tiene un sector de reacción seguido por uno de separación. En el primero, se colocarán reactores en serie; mientras que, en el segundo, se colocarán extractores por solvente en serie. El aporte a los beneficios de la empresa que hace cada reactor es de 1 $/min, mientras que el aporte de cada extractor es de 5 $/min. Hay espacio para instalar un máximo de 3 reactores y un máximo de 2 extractores. La legislación local fija un límite de 21 l/min de efluentes. Cada reactor produce 1 l/min de efluentes, y cada extractor produce 10 l/min de efluentes. Se requiere determinar la cantidad óptima de reactores y extractores a instalar.

Reactores y extractores

- Variables de decisión:
  - x_1: Cantidad de reactores.
  - x_2: Cantidad de extractores.

Reactores y extractores

- Función objetivo:
  - Beneficios ($/min): $x_1 + 5x_2$
- Restricciones:
  - Efluentes (l/min): $x_1 + 10x_2 \leq 21$
  - Espacio reactores: $x_1 \leq 3$
  - Espacio extractores: $x_2 \leq 2$

Reactores y extractores

$$\max_{x_1, x_2} x_1 + 5x_2$$

$$\text{s. a :}$$

$$x_1 + 10x_2 \leq 21$$

$$x_1 \leq 3$$

$$x_2 \leq 2$$

$$x_1 \in \mathbb{N}$$

$$x_2 \in \mathbb{N}$$

- Solución relajada:
  - $x_1 = 3$, $x_2 = 1.8$, *FO* = 12 \$/min
- Solución redondeada:

Reactores y extractores

$$\underset{x_1, x_2}{\text{Max}}\ x_1 + 5x_2$$

$$\text{s. a}:$$

$$x_1 + 10x_2 \le 21$$

$$x_1 \le 3$$

$$x_2 \le 2$$

$$x_1 \in \mathbb{N}$$

$$x_2 \in \mathbb{N}$$

- Solución relajada:
  - $x_1 = 3$, $x_2 = 1.8$, *FO* = 12 \$/min
- Solución redondeada:
  - $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, no factible

Reactores y extractores

$$\underset{x_1, x_2}{\text{Max}}\; x_1 + 5x_2$$

$$\text{s. a}:$$

$$x_1 + 10x_2 \leq 21$$

$$x_1 \leq 3$$

$$x_2 \leq 2$$

$$x_1 \in \mathbb{N}$$

$$x_2 \in \mathbb{N}$$

Reactores y extractores.lg4

- Solución relajada:
  - $x_1 = 3$, $x_2 = 1.8$, *FO* = 12 \$/min
- Solución redondeada:
  - $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, no factible
  - $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, *FO* = 8 \$/min
- Solución entera:
  - $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, *FO* = 11 \$/min

Modelo en LINGO

Lingo Model - Reactores y extractores

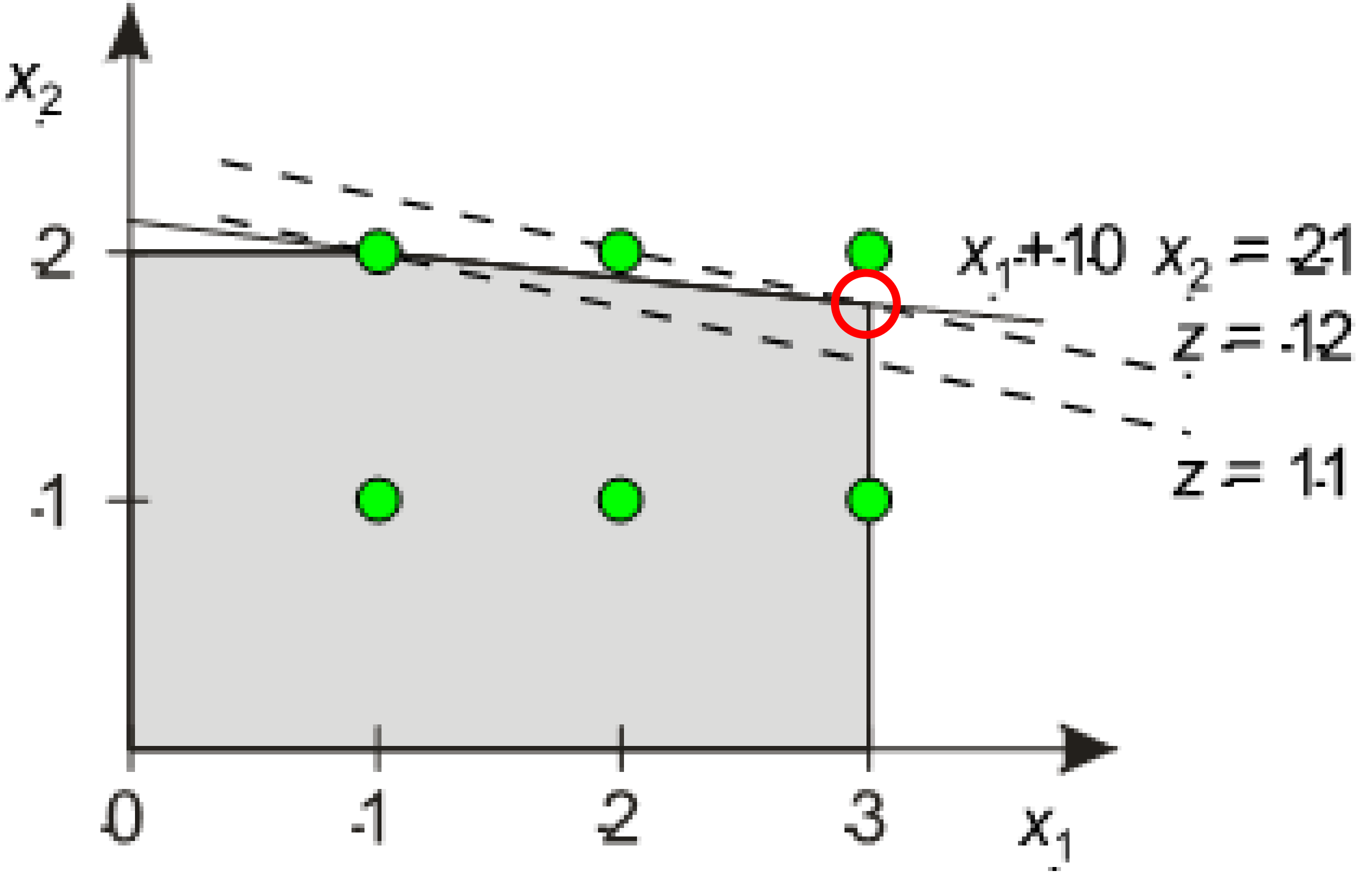
```
! Reactores y extractores;
[FO] Max = x1+5*x2;
[RL] x1+10*x2 <= 21;
[RR] x1 <= 3;
[RE] x2 <= 2;
@gin(x1);
@gin(x2);
```

Resultados en LINGO

Variable	Value	Reduced Cost
X1	1.000000	-1.000000
X2	2.000000	-5.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
FO	11.00000	1.000000
RL	0.000000	0.000000
RR	2.000000	0.000000
RE	0.000000	0.000000

Reactores y extractores



Costo fijo

Función objetivo

- Criterio económico:
  - Valor del dinero en el tiempo: VAN y TIR
  - Beneficios = Ingresos - Costos
  - Ingresos constantes $\rightarrow$ Costos

Fábrica de pinturas

Fábrica de pinturas

Una fábrica produce pintura amarilla (A) y pintura celeste (C). Existen dos líneas de producción, una para cada color. La capacidad de la línea A es 60 m^3 por día, mientras que la capacidad de la línea C es 50 m^3 por día. Un metro cúbico de A requiere 1 h-hombre de labor, mientras que un metro cúbico de C requiere 2 h-hombre. Se disponen de 120 h-hombre como máximo por día que pueden ser asignadas indistintamente a la producción de ambos colores. La contribución a los beneficios de la empresa es \$20 y \$30 por metro cúbico de A y C, respectivamente. Se debe determinar el plan de producción diaria óptimo.

Fábrica de pinturas

- Parámetros:
  - $n = 2$
  - $m = 3$
  - $b = 20\ 30\ (\$/m^3)$
  - $s = 60\ (m^3/d)$

    $50\ (m^3/d)$

    120 (h-hombre/d)

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc} A & C \end{array} \\
A = & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}
\end{array}
\begin{array}{l} LA \\ LC \\ MO \end{array}
$$

Fábrica de pinturas

- Variables de decisión:
  - x = A C (m^3/d)
- Función objetivo:
  - Beneficios ($/d): $20A + 30C$
- Restricciones:
  - Capacidad de la línea A (m^3/d): $A \leq 60$
  - Capacidad de la línea C (m^3/d): $C \leq 50$
  - Mano de obra (h-hombre/d): $A + 2C \leq 120$

Fábrica de pinturas

$$\max_{A,C} 20A + 30C$$

$$\text{s. a}:$$

$$A \leq 60$$

$$C \leq 50$$

$$A + 2C \leq 120$$

$$A \geq 0, C \geq 0$$

Pinturas.lg4

Modelo en LINGO

Lingo Model - Pinturas

```
! Fábrica de pinturas;
[FO] MAX = 20*A+30*C;

[LA] A <= 60;
[LC] C <= 50;
[MO] A+2*C <= 120;
```

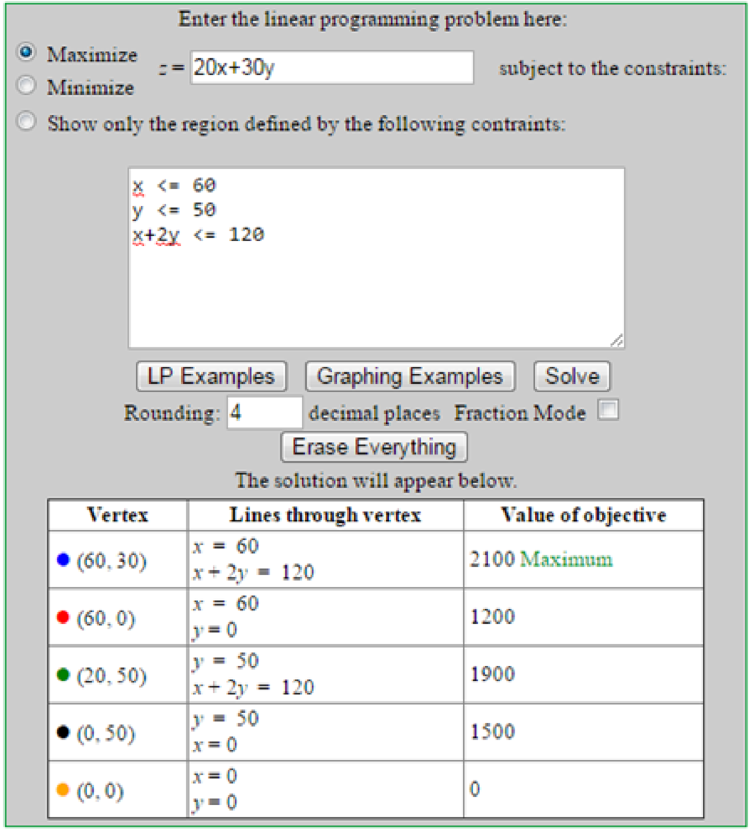
Resultados en LINGO

Variable	Value	Reduced Cost
A	60.00000	0.000000
C	30.00000	0.000000

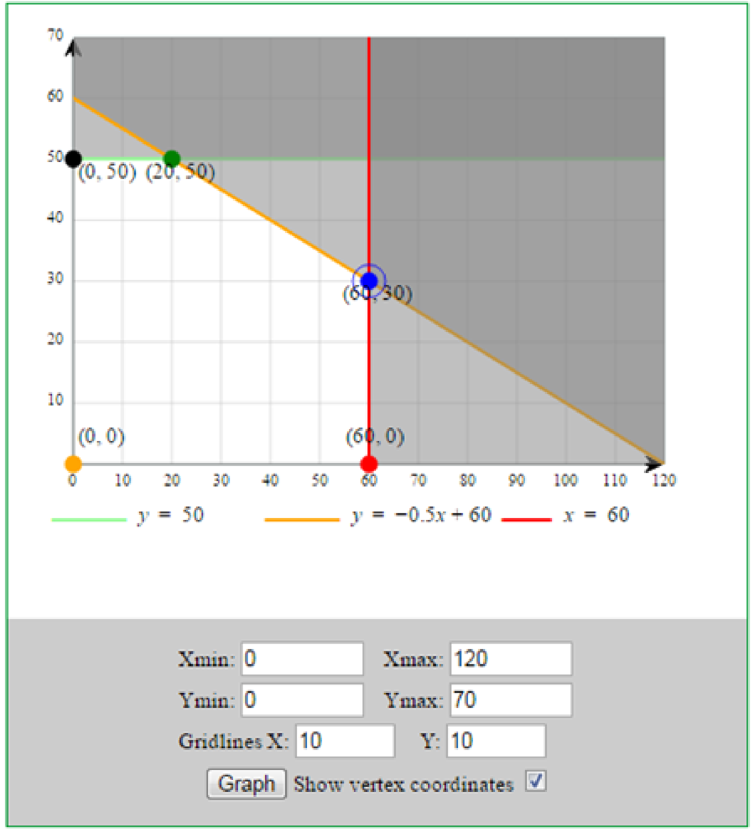
Row	Slack or Surplus	Dual Price
FO	2100.000	1.000000
LA	0.000000	5.000000
LC	20.00000	0.000000
MO	0.000000	15.00000

Se activaron LA y MO. Hacen valer la igualdad. Se acabaron esos recursos.

Fábrica de pinturas



Vertex	Lines through vertex	Value of objective
(60, 30)	$x = 60$ $x + 2y = 120$	2100 Maximum
(60, 0)	$x = 60$ $y = 0$	1200
(20, 50)	$y = 50$ $x + 2y = 120$	1900
(0, 50)	$y = 50$ $x = 0$	1500
(0, 0)	$x = 0$ $y = 0$	0



Simplex

Costo fijo

Se analiza nuevamente la fábrica de pinturas presentada anteriormente; pero, esta vez, se considera el costo de la puesta en marcha. Dicho costo, dividido por la cantidad de días de operación, para la línea A es igual a 400 $/d, mientras que para la línea C es 1000 $/d. Se desea determinar el nuevo esquema de producción óptimo.

Costo fijo

$$\underset{A,C,y_{\mathrm{A}},y_{\mathrm{C}}}{\mathrm{Max}} \left(20A - 400\,y_{\mathrm{A}}\right) + \left(30C - 1000\,y_{\mathrm{C}}\right)$$

$$y_{\mathrm{A}} = \begin{cases} 0 & A = 0 \\ 1 & A > 0 \end{cases}$$

$$y_{\mathrm{C}} = \begin{cases} 0 & C = 0 \\ 1 & C > 0 \end{cases}$$

Costo fijo

$$\max_{A,C,y_A,y_C} \left(20A - 400y_A\right) + \left(30C - 1000y_C\right)$$

s. a:

$$A \leq 60$$

$$C \leq 50$$

$$A + 2C \leq 120$$

$$A \leq 60y_A$$

$$C \leq 50y_C$$

$$y_A, y_C \in \text{Binario}$$

$$A \geq 0, C \geq 0$$

Costo fijo

$$\max_{A,C,y_A,y_C} \left(20A - 400y_A\right) + \left(30C - 1000y_C\right)$$

s. a:

$$A \le 60$$

$$C \le 50$$

$$A + 2C \le 120$$

$$A \le 60y_A$$

$$C \le 50y_C$$

$$y_A, y_C \in \text{Binario}$$

$$A \ge 0, C \ge 0$$

$$y_A = \begin{cases} 0 & A = 0 \\ 1 & A > 0 \end{cases}$$

Costo fijo

$$\underset{A,C,y_A,y_C}{\text{Max}} \left(20A - 400y_A\right) + \left(30C - 1000y_C\right)$$

s. a:

$$A \le 60$$

$$C \le 50$$

$$A + 2C \le 120$$

$$A \le 60\,y_A$$

$$C \le 50\,y_C$$

$$y_A, y_C \in \text{Binario}$$

$$A \ge 0, C \ge 0$$

$$y_A = \begin{cases} 0 & A = 0 \\ 1 & A > 0 \end{cases}$$

$$y_C = \begin{cases} 0 & C = 0 \\ 1 & C > 0 \end{cases}$$

Costo fijo

$$\max_{A,C,y_A,y_C} \left(20A - 400y_A\right) + \left(30C - 1000y_C\right)$$

s. a:

$$A \le 60$$

$$C \le 50$$

$$A + 2C \le 120$$

$$A \le 60y_A$$ Si $A > 0 \rightarrow y_A = 1$

$$C \le 50y_C$$ Si $C > 0 \rightarrow y_C = 1$

$$y_A, y_C \in \text{Binario}$$

$$A \ge 0, C \ge 0$$

$$y_A = \begin{cases} 0 & A = 0 \\ 1 & A > 0 \ \checkmark \end{cases}$$

$$y_C = \begin{cases} 0 & C = 0 \\ 1 & C > 0 \ \checkmark \end{cases}$$

Costo fijo

$$\max_{A,C,y_A,y_C} \left(20A - 400y_A\right) + \left(30C - 1000y_C\right)$$

$y_A = 0$ $y_C = 0$

s. a:

$A \le 60$

$C \le 50$

$A + 2C \le 120$

$A \le 60y_A$ Si $A = 0 \rightarrow y_A = 0 V 1$

$C \le 50y_C$ Si $C = 0 \rightarrow y_C = 0 V 1$

$y_A, y_C \in \text{Binario}$

$A \ge 0, C \ge 0$

$$y_A = \begin{cases} 0 & A = 0 \ ✓ \\ 1 & A > 0 \end{cases}$$

$$y_C = \begin{cases} 0 & C = 0 \ ✓ \\ 1 & C > 0 \end{cases}$$

Costo fijo

$$\max_{A,C,y_A,y_C} \left(20A - 400\,y_A\right) + \left(30C - 1000\,y_C\right)$$

s. a:

$$A \le 60$$

$$C \le 50$$

$$A + 2C \le 120$$

$$A \le 60\,y_A$$

$$C \le 50\,y_C$$

$$y_A, y_C \in \text{Binario}$$

$$A \ge 0, C \ge 0$$

Pinturas con costo fijo.lg4

Modelo en LINGO

Lingo Model - Pinturas con costo fijo

```
! Fábrica de pinturas con costo fijo;
[FO] MAX = (20*A-400*yA)+(30*C-1000*yC);

[LA] A <= 60;
[LC] C <= 50;
[MO] A+2*C <= 120;

! Restricciones adicionales;
[B1] A <= 60*yA;
[B2] C <= 50*yC;
@bin(yA);
@bin(yC);
```

Resultados en LINGO

Variable	Value	Reduced Cost
A	60.00000	0.000000
YA	1.000000	400.0000
C	0.000000	0.000000
YC	0.000000	-500.0000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
FO	800.0000	1.000000
LA	0.000000	20.00000
LC	50.00000	0.000000
MO	60.00000	0.000000
B1	0.000000	0.000000
B2	0.000000	30.00000

Dejó de fabricar C.

Método de la gran M

Costo fijo

$$\max_{A,C,y_A,y_C} \left(20A - 400y_A\right) + \left(30C - 1000y_C\right)$$

s. a:

$$A \le 60$$

$$C \le 50$$

$$A + 2C \le 120$$

$$A \le 60y_A$$

$$C \le 50y_C$$

$$y_A, y_C \in \text{Binario}$$

$$A \ge 0, C \ge 0$$

Uso de las M

$$\underset{A,C,y_{A},y_{C}}{\text{Max}} \left(20A - 400y_{A}\right) + \left(30C - 1000y_{C}\right)$$

s. a:

$$A \leq 60$$

$$C \leq 50$$

$$A + 2C \leq 120$$

$$A \leq M_{A} y_{A}$$

$$C \leq M_{C} y_{C}$$

$$y_{A}, y_{C} \in \text{Binario}$$

$$A \geq 0, C \geq 0$$

Determinación de M_A

$$\max_{A,C} \; A$$

s. a:

$$A \leq 60$$

$$C \leq 50$$

$$A + 2C \leq 120$$

$$A \geq 0, C \geq 0$$

$M_A = 60$

Determinación de M_C

$$\max_{A,C} C$$

s. a:

$$A \leq 60$$

$$C \leq 50$$

$$A + 2C \leq 120$$

$$A \geq 0, C \geq 0$$

$\Rightarrow$ $M_C = 50$

Costo fijo

$$\max_{A,C,y_A,y_C} \left(20A - 400\,y_A\right) + \left(30C - 1000\,y_C\right)$$

s. a:

$$A \le 60$$

$$C \le 50$$

$$A + 2C \le 120$$

$$A \le 60\,y_A$$

$$C \le 50\,y_C$$

$$y_A, y_C \in \text{Binario}$$

$$A \ge 0, C \ge 0$$

$$y_A = \begin{cases} 0 & A = 0 \\ 1 & A > 0 \end{cases}$$

$$y_C = \begin{cases} 0 & C = 0 \\ 1 & C > 0 \end{cases}$$

Pinturas con costo fijo.lg4

Actividad mínima y máxima

Actividad mínima y máxima

- x: Nivel de actividad.
- *B*: Nivel mínimo de x.
- *U*: Límite superior de x.
- Restricciones:
  - $x \leq U\, y$ $\quad$ Si $x \geq B \rightarrow y = 1$
  - $B\, y \leq x$ $\quad$ Si $x = 0 \rightarrow y = 0$
  - $y \in \{0,1\}$

$$y = \begin{cases} 0 & x = 0 \quad ✓ \\ 1 & x \geq B \quad ✓ \end{cases}$$

Actividad mínima y máxima

- x: Nivel de actividad.
- *B*: Nivel mínimo de x.
- *U*: Límite superior de x.
- Restricciones:
  - $x \leq U\ y$
  - $B\ y \leq x$
  - $y \in \{0,1\}$

- x: bolsas/mes.
- *B*: 100 bolsas/mes.
- *U*: 1500 bolsas/mes.
- Restricciones:
  - $x \leq 1500\ y$
  - $100\ y \leq x$
  - $y \in \{0,1\}$

Localización simple de plantas

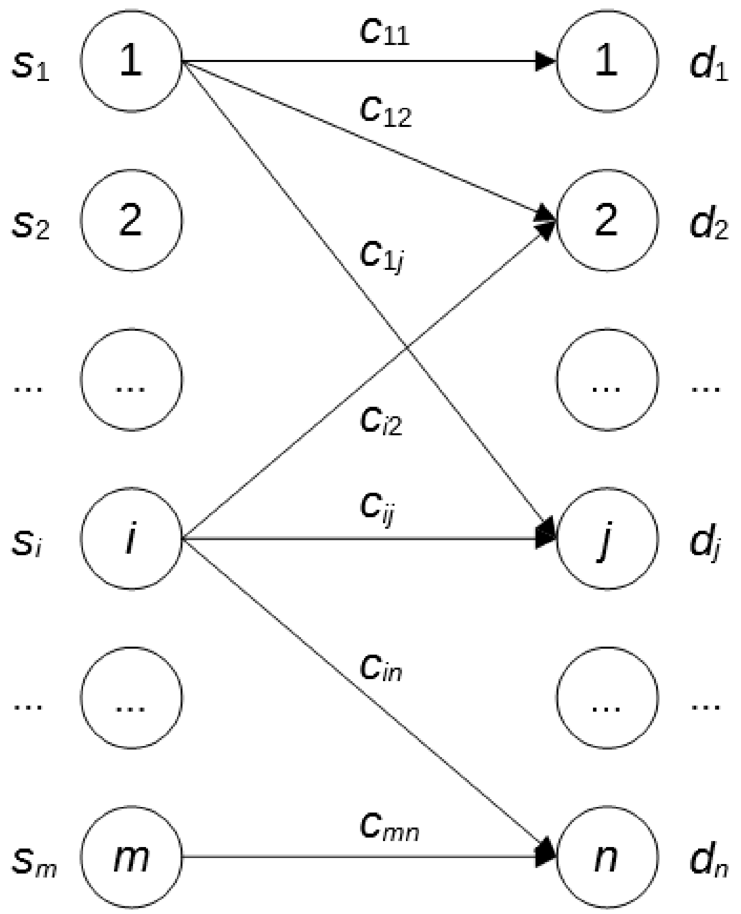
Localización simple de plantas

Se deben localizar plantas para atender a n mercados. Existen m localidades posibles para la instalación de las plantas. Cada mercado debe ser atendido por una y solo una planta. Una planta puede atender a varios mercados. Al instalar una planta en el lugar i, se tiene un costo fijo anual f_i. Al asignar la planta i al mercado j, se tiene un costo de operación anual c_{ij}. Se desea determinar el esquema de localización que minimiza los costos anuales.

Localización simple de plantas

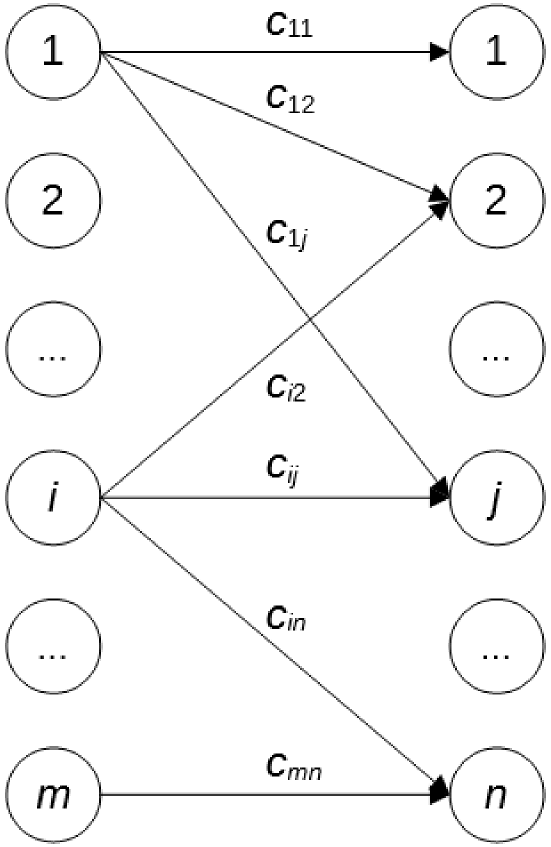
- Parámetros:
  - m: Cantidad de orígenes.
  - n: Cantidad de destinos.
  - f_i: Costo fijo anual de la planta i.
  - c_{ij}: Costo de operación anual al asignar la planta i al mercado j.
- Variables de decisión:
  - y_i: 1 si se instala la planta i, 0 si no se instala.
  - x_{ij}: 1 si la planta i se asigna al mercado j, 0 si no se asigna.

Problema del transporte



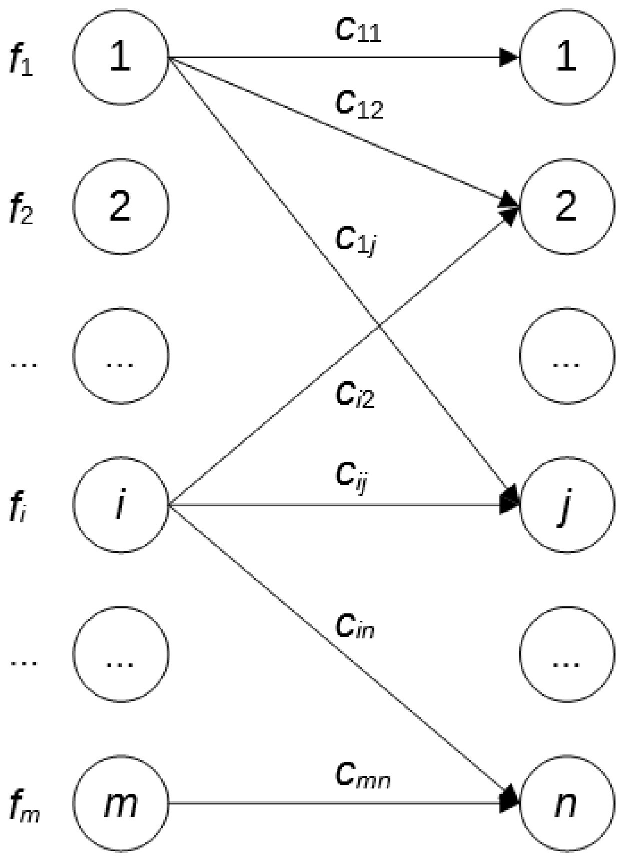
x_{ij}

Problema de asignación



$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ se asigna a la actividad } j \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Localización simple de plantas



$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si se instala la planta } i \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la planta } i \text{ se asigna al mercado } j \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Localización simple de plantas

- Función objetivo:
  - Costo ($/año) = $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} f_i y_i$
- Restricciones:
  - Origen *i*: $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq n y_i$
  - Destino *j*: $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1$

Localización simple de plantas

$$\underset{x_{ij},y_i}{\text{Min}} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\,x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} f_i\; y_i$$

s. a:

$$x_{ij} \le y_i \quad \forall i, j \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le n\, y_i \quad \forall i$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \quad \forall j$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall i, j$$

$$y_i \in \{0,1\} \quad \forall i$$