

Programación lineal Parte I

Enrique E. Tarifa, Facultad de Ingeniería, UNJu

Programación matemática

Programación matemática

$$\text{Max}_{x_j} FO(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad j = 1, 2, \dots, n$$

s. a:

$$h_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$g_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0 \quad k = 1, 2, \dots, o$$

$$GL = n - m$$

Clasificación de modelos

- Programación Lineal (LP, *Linear Programming*)
- Programación No Lineal (NLP, *Nonlinear Programming*)
- Programación Lineal Entera (ILP, *Integer Linear Programming*)
- Programación No Lineal Entera (INLP, *Integer Nonlinear Programming*)
- Programación Lineal Entera Mixta (MILP, *Mixed Integer Linear Programming*)
- Programación No Lineal Entera Mixta (MINLP, *Mixed Integer Nonlinear Programming*)

$$FO(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$$

Programación Lineal

Programación lineal

$$\text{Max}_{x_j} \quad c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_j x_j + \dots + c_n x_n \quad j = 1, 2, \dots, n$$

s. a:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1j} x_j + \dots + a_{1n} x_n \leq b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2j} x_j + \dots + a_{2n} x_n \leq b_2$$

...

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{ij} x_j + \dots + a_{in} x_n \leq b_i$$

...

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mj} x_j + \dots + a_{mn} x_n \leq b_m$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1 \dots n, b_i \geq 0 \quad i = 1 \dots m$$

$$GL = n$$

Programación lineal

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Programación lineal

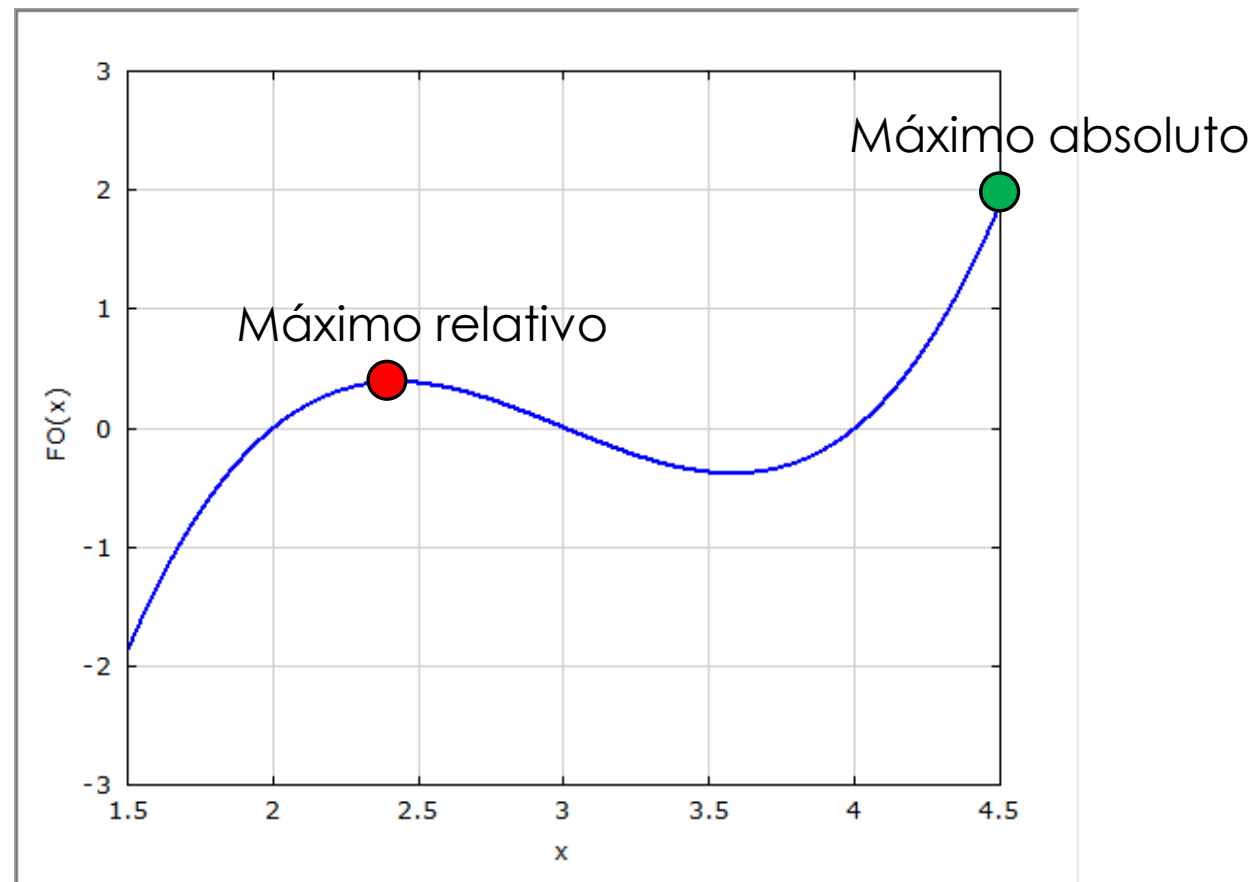
$$\text{Max}_{x} c^T x$$

s. a:

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0 \quad b \geq 0$$

Modelo no lineal



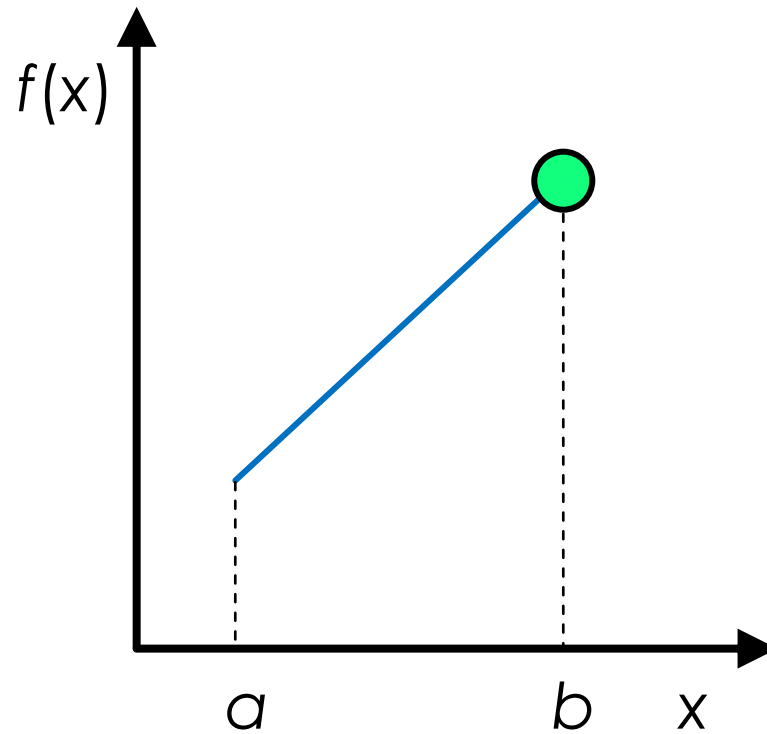
Programación lineal

$$\text{Max}_x f(x)$$

s. a:

$$x \geq a$$

$$x \leq b$$



- El óptimo es global.
- Es único.
- Está en un extremo.

Fábrica de vidrio

Artículos de vidrio

Una empresa produce dos tipos de vidrio de alta calidad. Cada producto es producido en sendas plantas. En una tercera, se realiza el *packaging* de ambos. Se desea determinar la proporción correcta a producir.

Artículos de vidrio

Planta	Producto 1 (kW·min/m ²)	Producto 2 (kW·min/m ²)	Capacidad (kW)
1	1	no se fabrica	4
2	no se fabrica	2	12
3	3	2	18

	Producto 1	Producto 2
Beneficios (\$/m ²)	3	5

Artículos de vidrio

- x_1 : Velocidad de producción del artículo 1 (m^2/min)
- x_2 : Velocidad de producción del artículo 2 (m^2/min)
- Función objetivo:
 - Beneficios (\$/min): $3x_1 + 5x_2$
- Restricciones:
 - Potencia consumida por la planta 1 (kW): $x_1 \leq 4$
 - Potencia consumida por la planta 2 (kW): $2x_2 \leq 12$
 - Potencia consumida por la planta 3 (kW): $3x_1 + 2x_2 \leq 18$

Artículos de vidrio

$$\text{Max}_{x_1, x_2} 3x_1 + 5x_2$$

s. a:

$$x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Solución gráfica

Método gráfico

Región factible y curvas de nivel

$$z = 3x_1 + 5x_2$$

s. a:

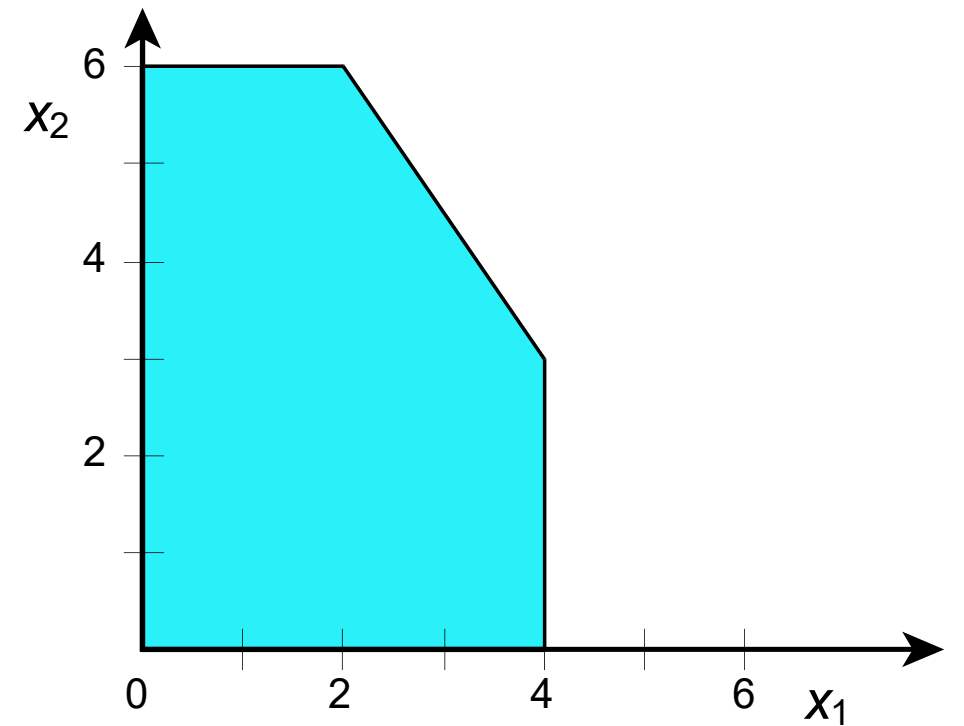
$$x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$



Región factible y curvas de nivel

$$z = 3x_1 + 5x_2$$

s. a:

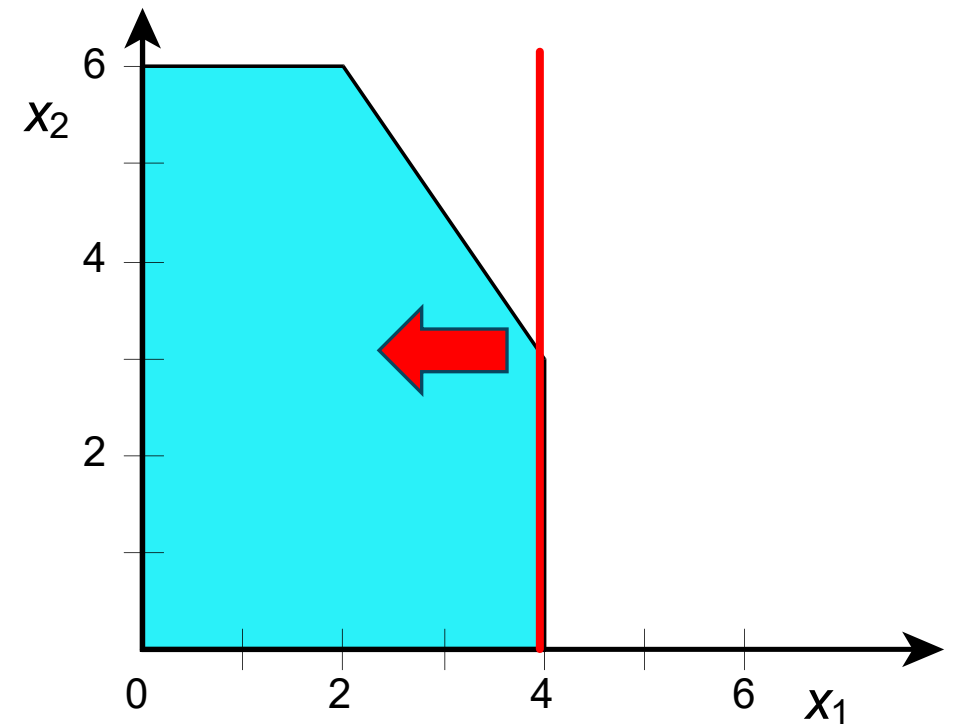
$$x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$



Región factible y curvas de nivel

$$z = 3x_1 + 5x_2$$

s. a:

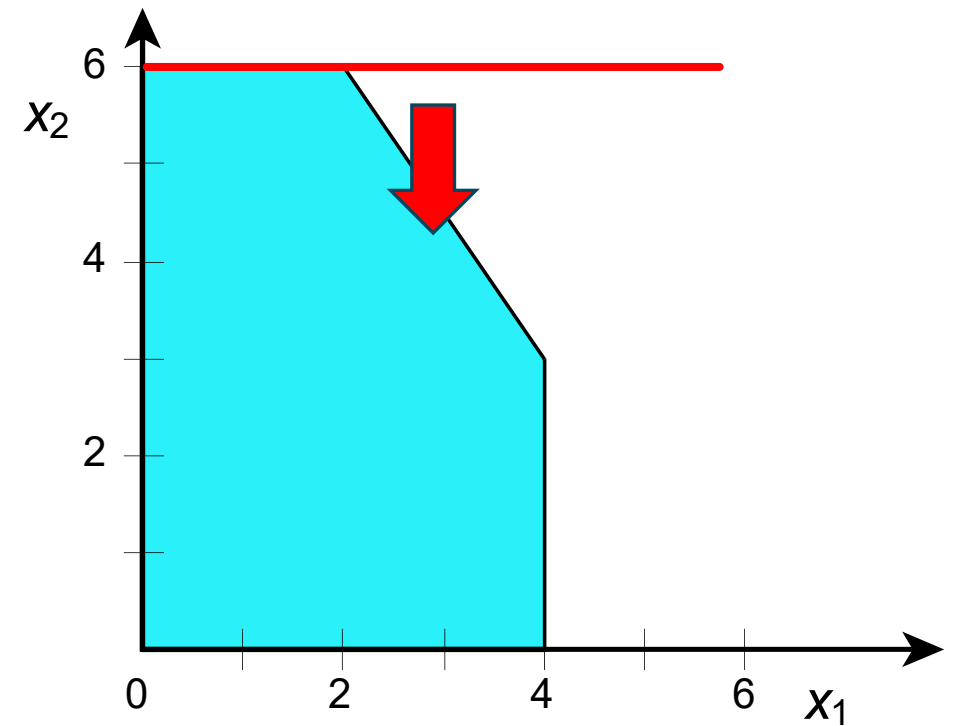
$$x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$



Región factible y curvas de nivel

$$z = 3x_1 + 5x_2$$

s. a:

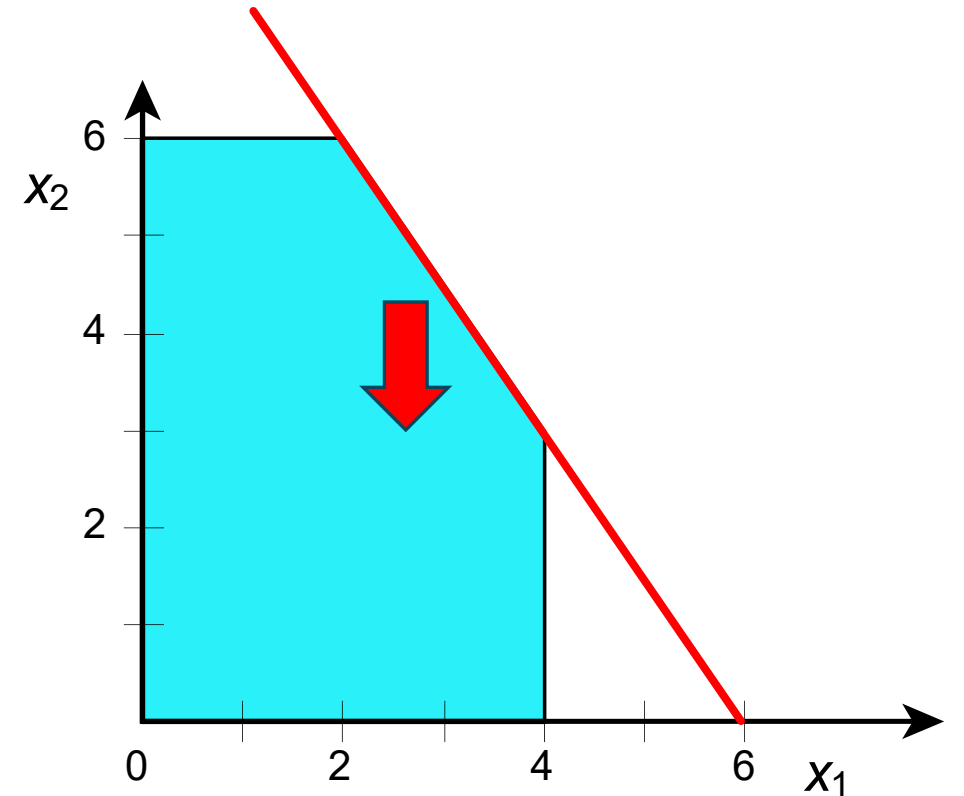
$$x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$



Región factible y curvas de nivel

$$z = 3x_1 + 5x_2$$

s. a:

$$x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$x_2 = \frac{1}{5}z - \frac{3}{5}x_1$$

s. a:

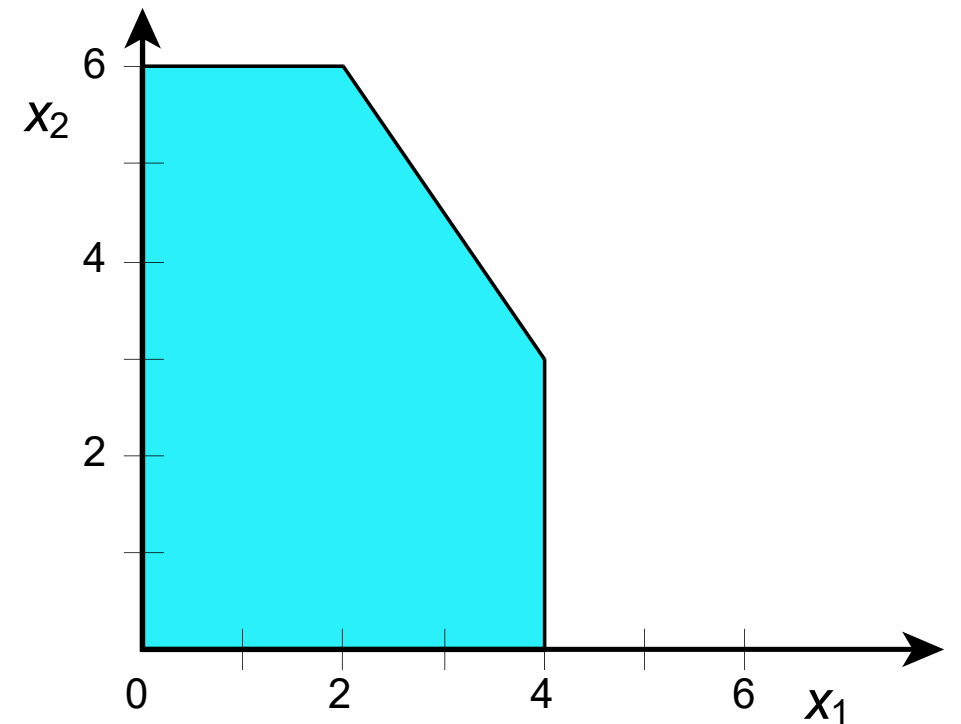
$$x_1 \leq 4$$

$$x_2 \leq 6$$

$$x_2 \leq 9 - \frac{3}{2}x_1$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$



Región factible y curvas de nivel

$$z = 3x_1 + 5x_2$$

s. a:

$$x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$x_2 = \frac{1}{5}z - \frac{3}{5}x_1$$

s. a:

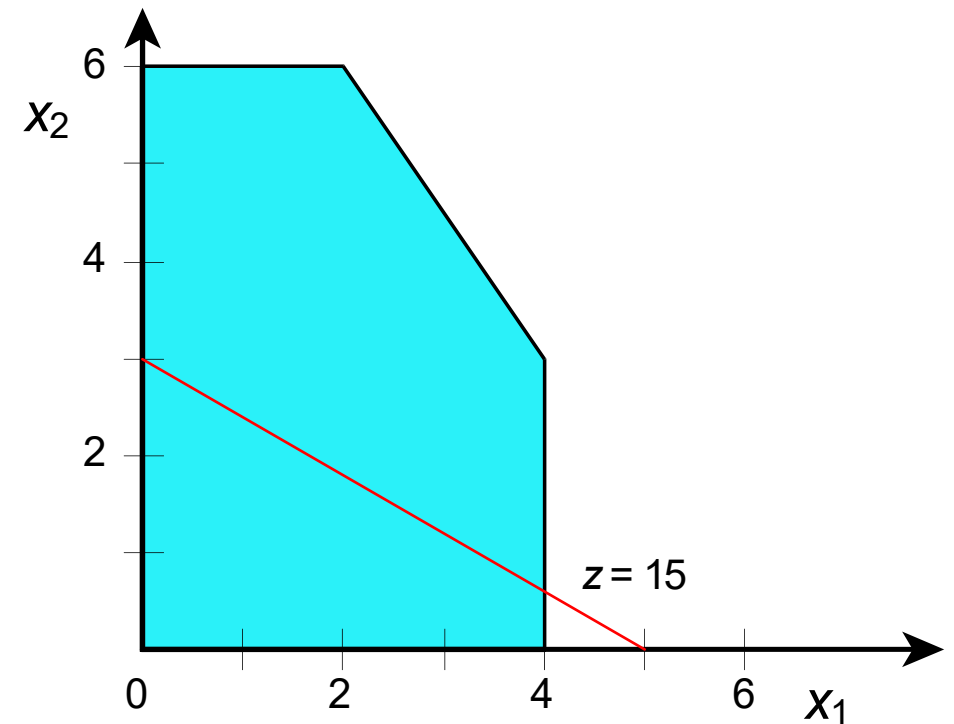
$$x_1 \leq 4$$

$$x_2 \leq 6$$

$$x_2 \leq 9 - \frac{3}{2}x_1$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$



Región factible y curvas de nivel

$$z = 3x_1 + 5x_2$$

s. a:

$$x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$x_2 = \frac{1}{5}z - \frac{3}{5}x_1$$

s. a:

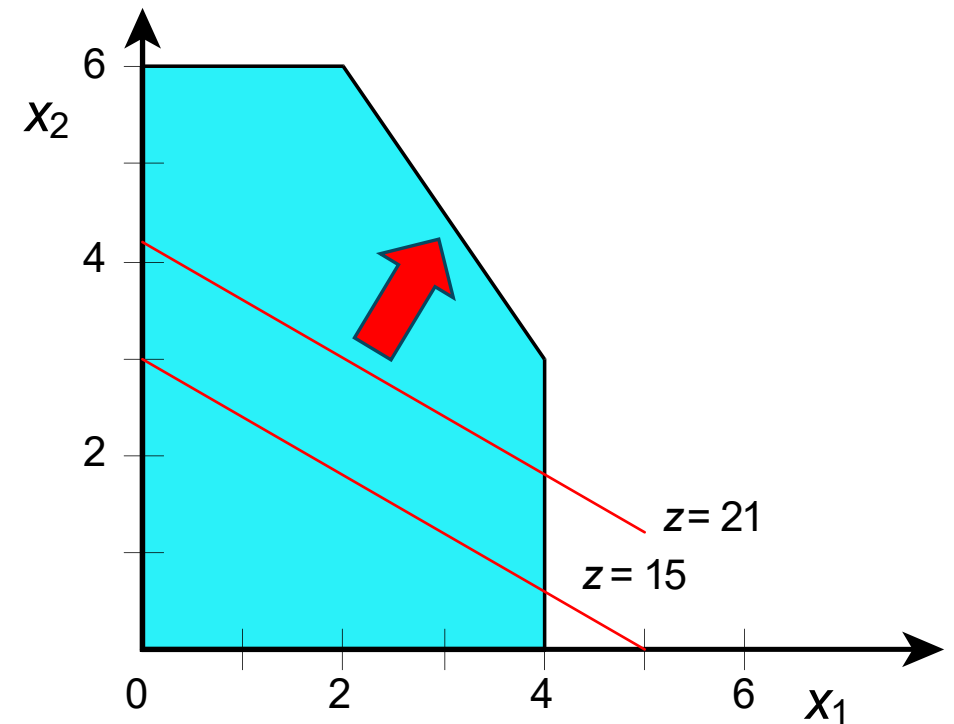
$$x_1 \leq 4$$

$$x_2 \leq 6$$

$$x_2 \leq 9 - \frac{3}{2}x_1$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$



Región factible y curvas de nivel

$$z = 3x_1 + 5x_2$$

s. a:

$$x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$x_2 = \frac{1}{5}z - \frac{3}{5}x_1$$

s. a:

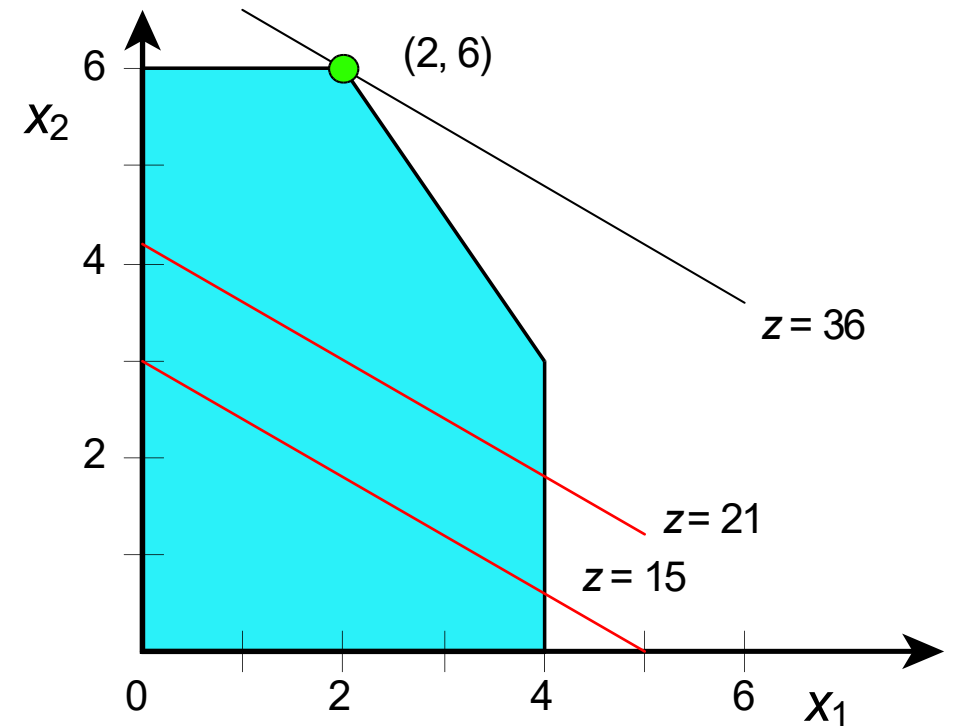
$$x_1 \leq 4$$

$$x_2 \leq 6$$

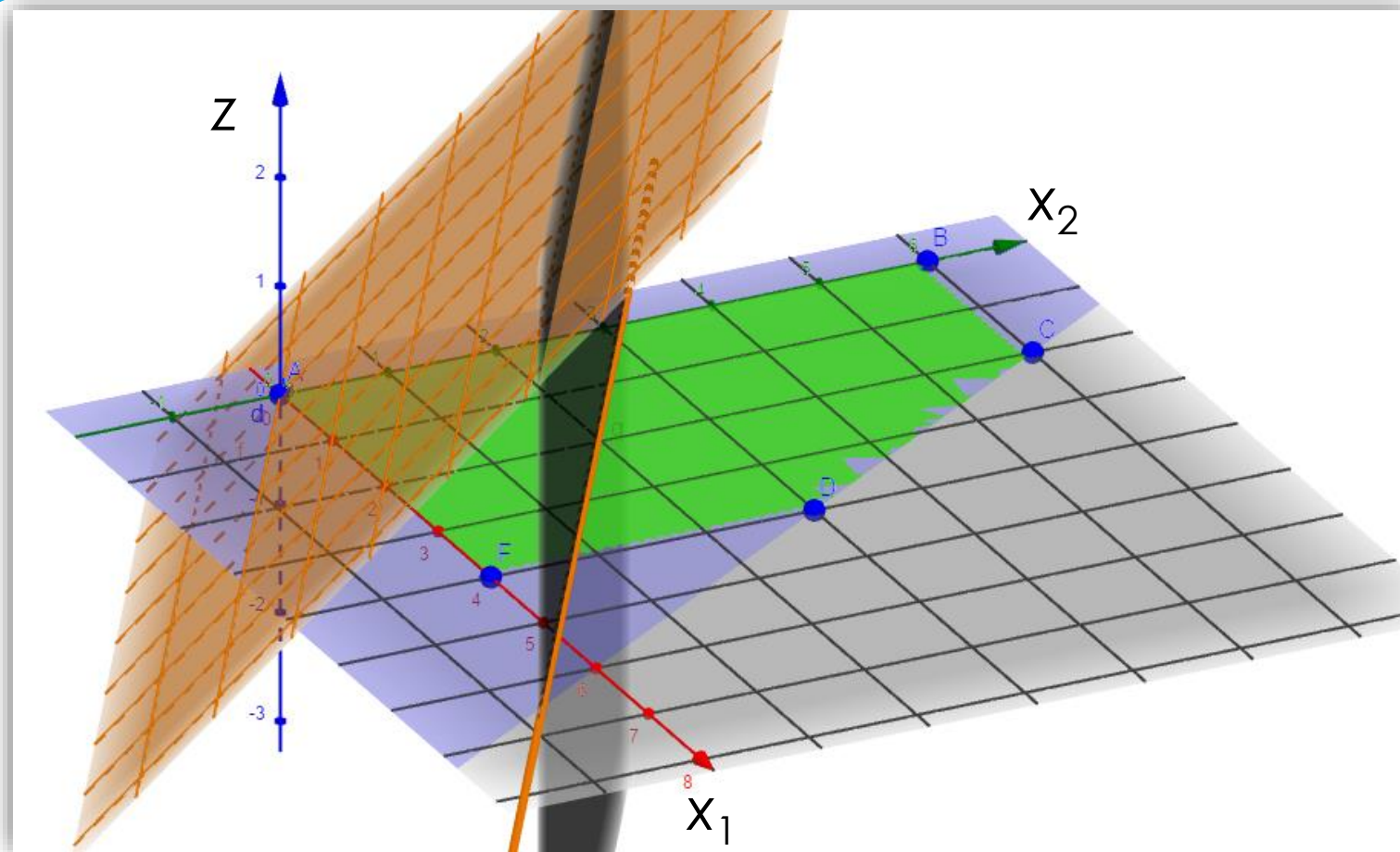
$$x_2 \leq 9 - \frac{3}{2}x_1$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$



Artículos de vidrio



Artículos de vidrio

$$\text{Max}_{x_1, x_2} 3x_1 + 5x_2$$

s. a:

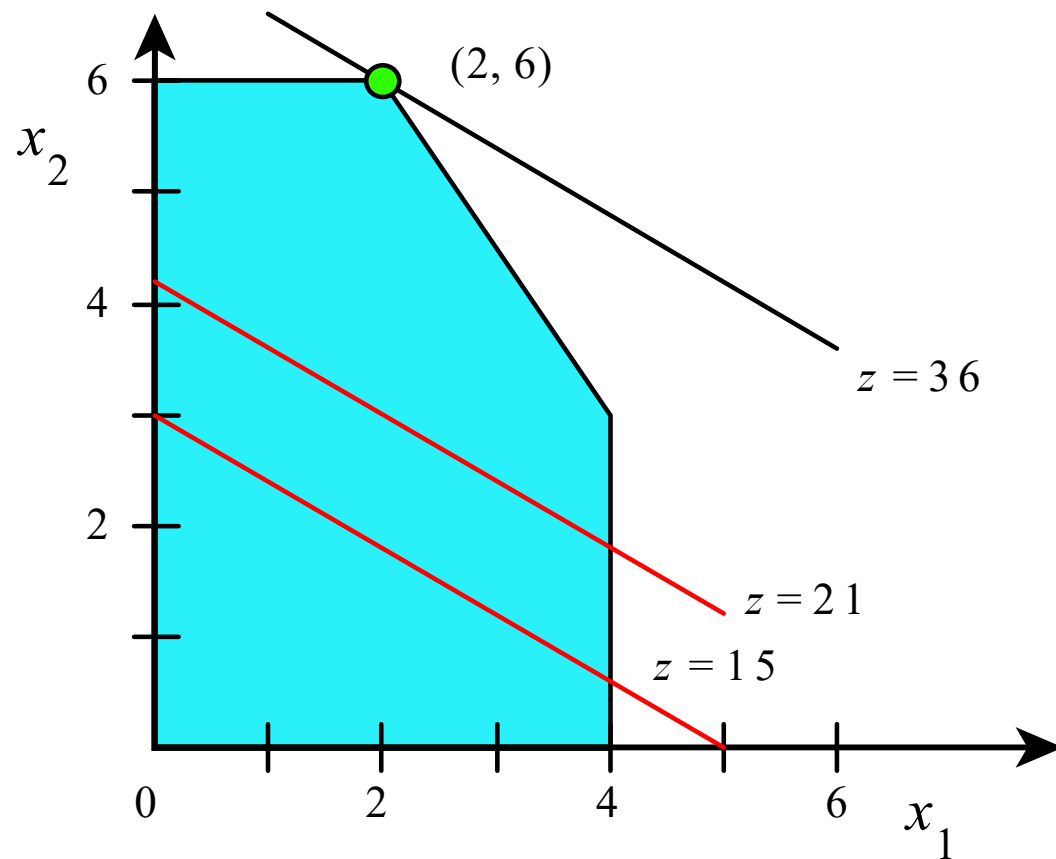
$$x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

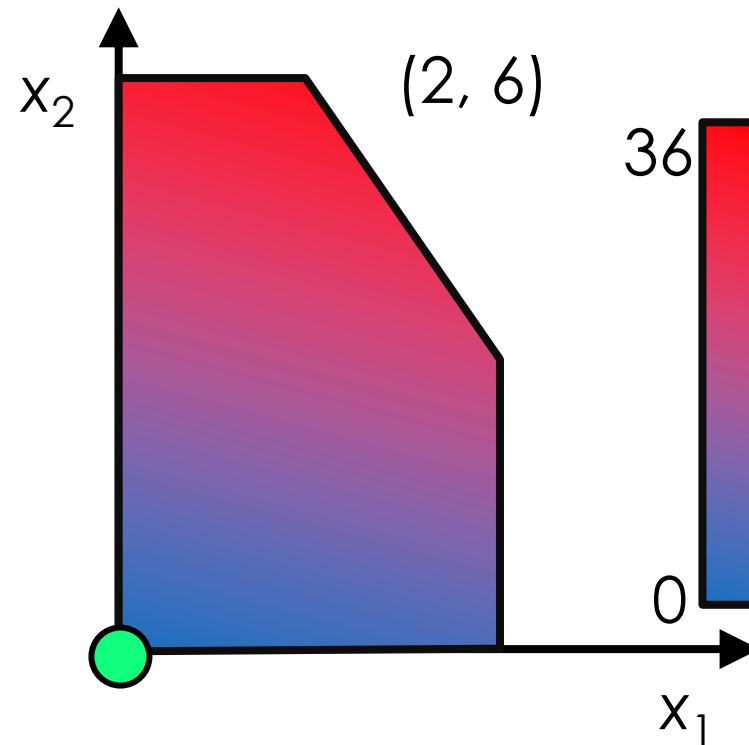
$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

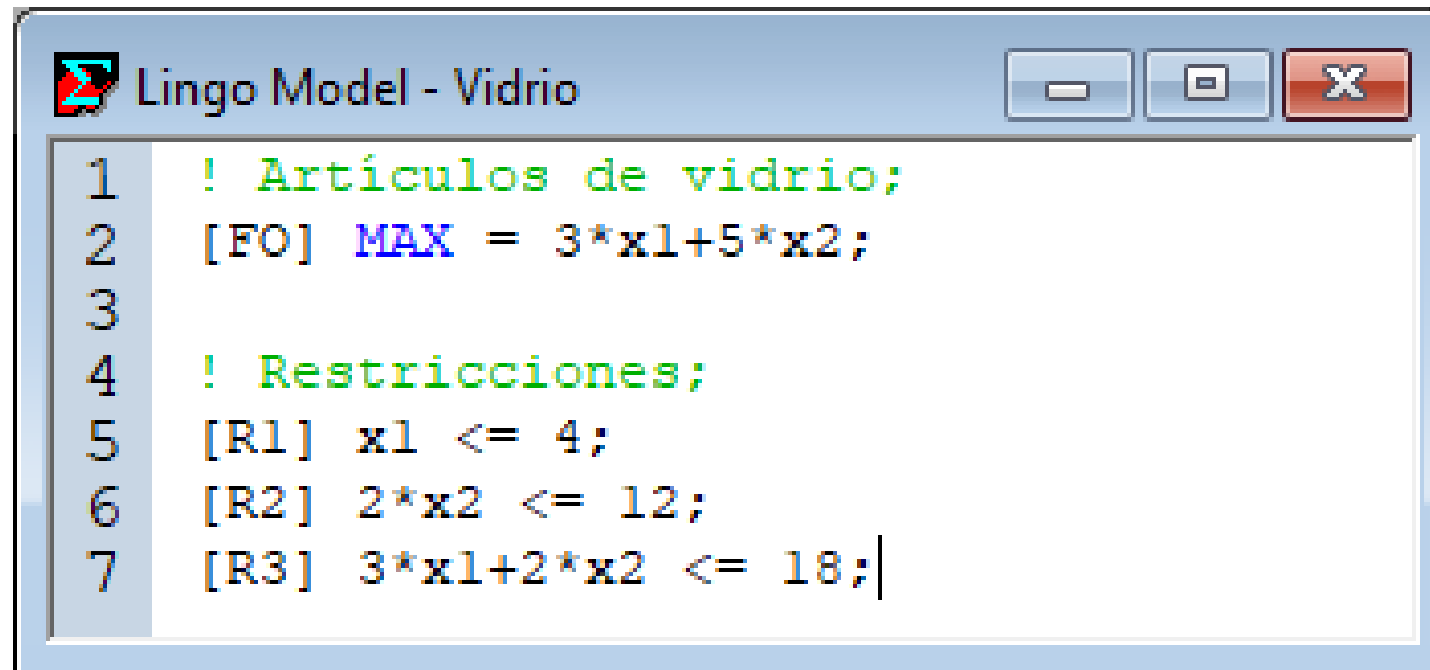


El método simplex

Simplex (Dantzig, 1947)



Modelo en LINGO



```
1  ! Artículos de vidrio;  
2  [FO] MAX = 3*x1+5*x2;  
3  
4  ! Restricciones;  
5  [R1] x1 <= 4;  
6  [R2] 2*x2 <= 12;  
7  [R3] 3*x1+2*x2 <= 18;
```

Resultados en LINGO

Variable	Value	Reduced Cost
X1	2.000000	0.000000
X2	6.000000	0.000000
Row	Slack or Surplus	Dual Price
F0	36.00000	1.000000
R1	2.000000	0.000000
R2	0.000000	1.500000
R3	0.000000	1.000000

Se activaron R2 y R3. Hacen valer la igualdad. Determinan el óptimo.

Artículos de vidrio

Enter the linear programming problem here:

☒ Maximize $z = 3x + 5y$ subject to the constraints:
☐ Minimize
☐ Show only the region defined by the following constraints:

$x \leq 4$
 $2y \leq 12$
 $3x + 2y \leq 18$

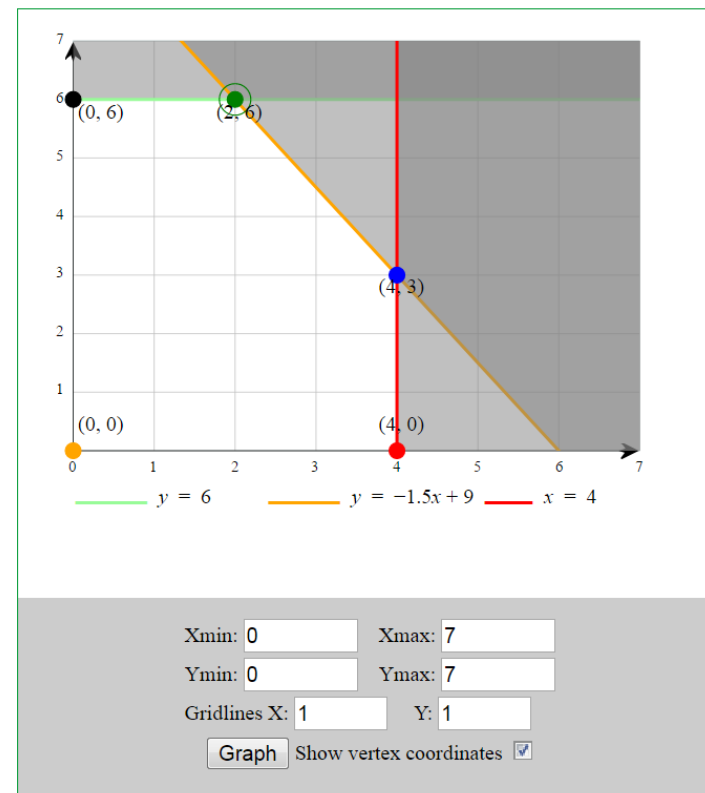
LP Examples Graphing Examples Solve

Rounding: 4 decimal places Fraction Mode ☐

Erase Everything

The solution will appear below.

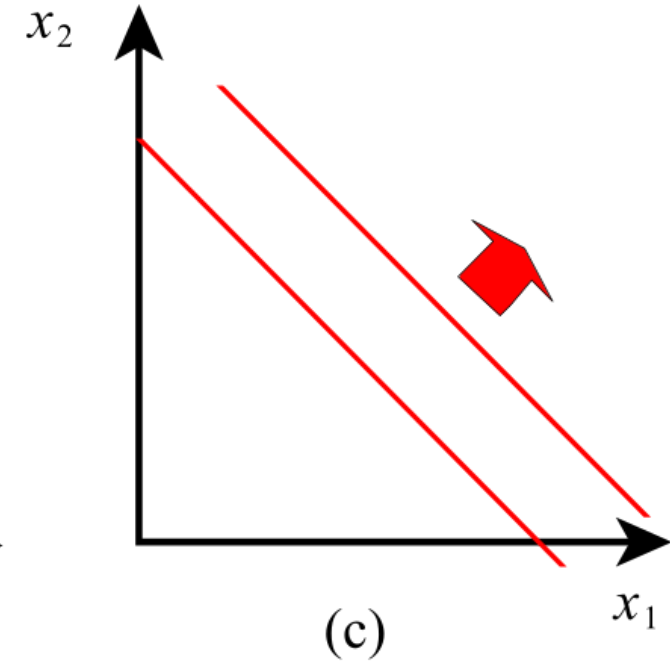
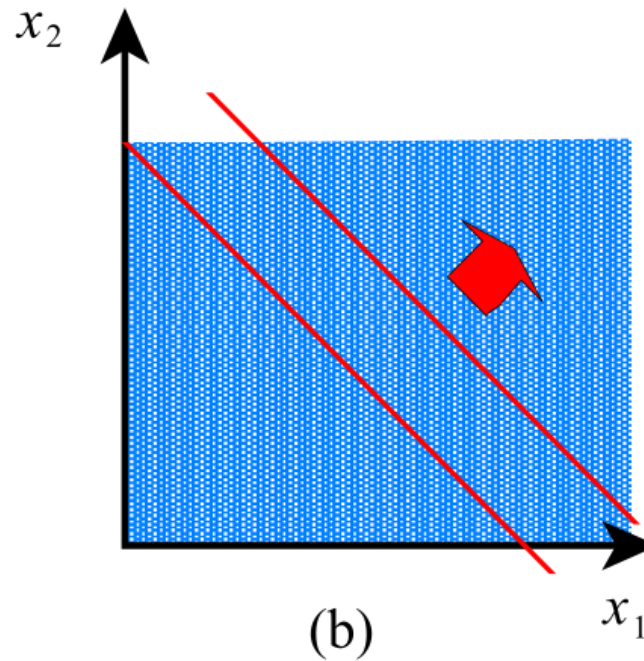
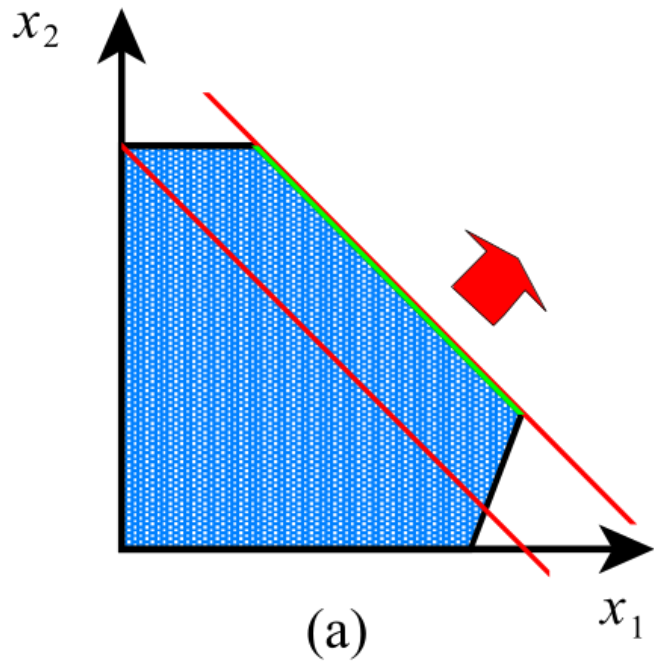
Vertex	Lines through vertex	Value of objective
● (4, 3)	$x = 4$ $3x + 2y = 18$	27
● (4, 0)	$x = 4$ $y = 0$	12
● (2, 6)	$2y = 12$ $3x + 2y = 18$	36 Maximum
● (0, 6)	$2y = 12$ $x = 0$	30
● (0, 0)	$x = 0$ $y = 0$	0



Casos problemáticos

Casos problemáticos

- En el caso (a), la solución obtenida no es única. En el caso (b), la solución no está acotada. En el caso (c), la región factible es nula.



Solución no única

$$\text{Max}_{x_1, x_2} x_1 + x_2$$

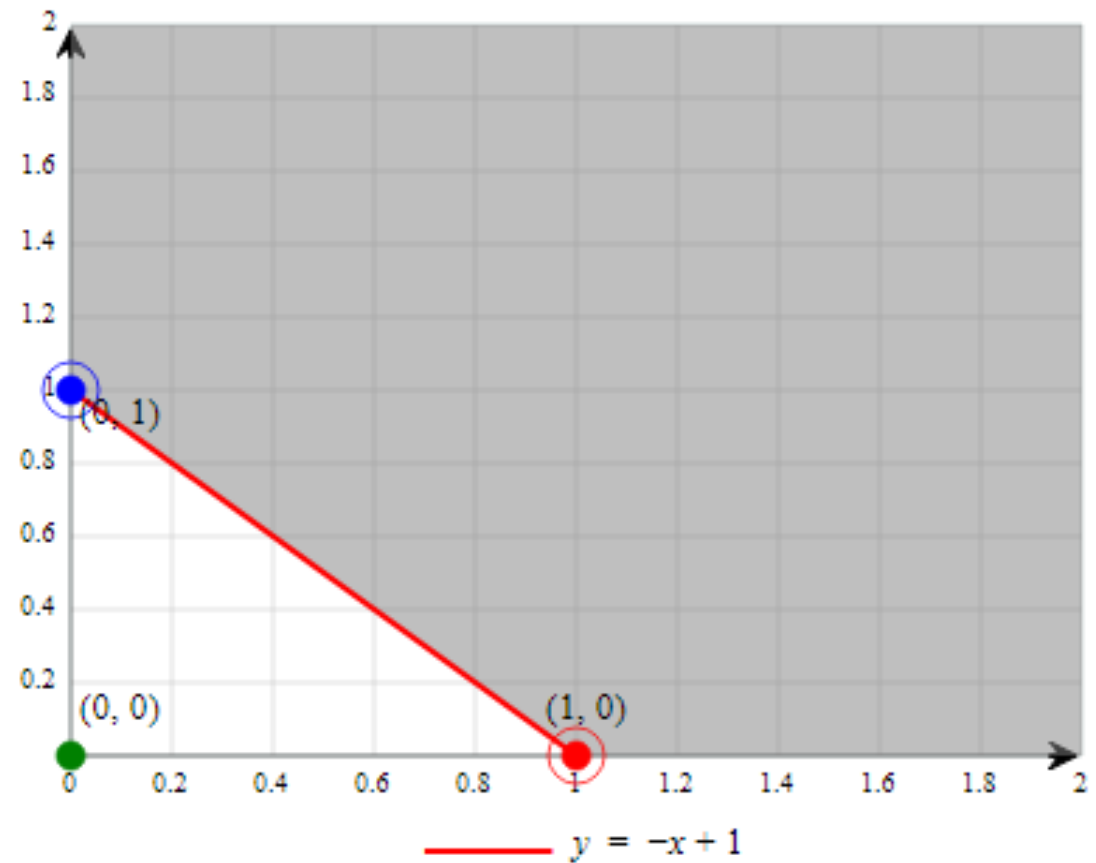
s. a :

$$x_1 + x_2 \leq 1$$

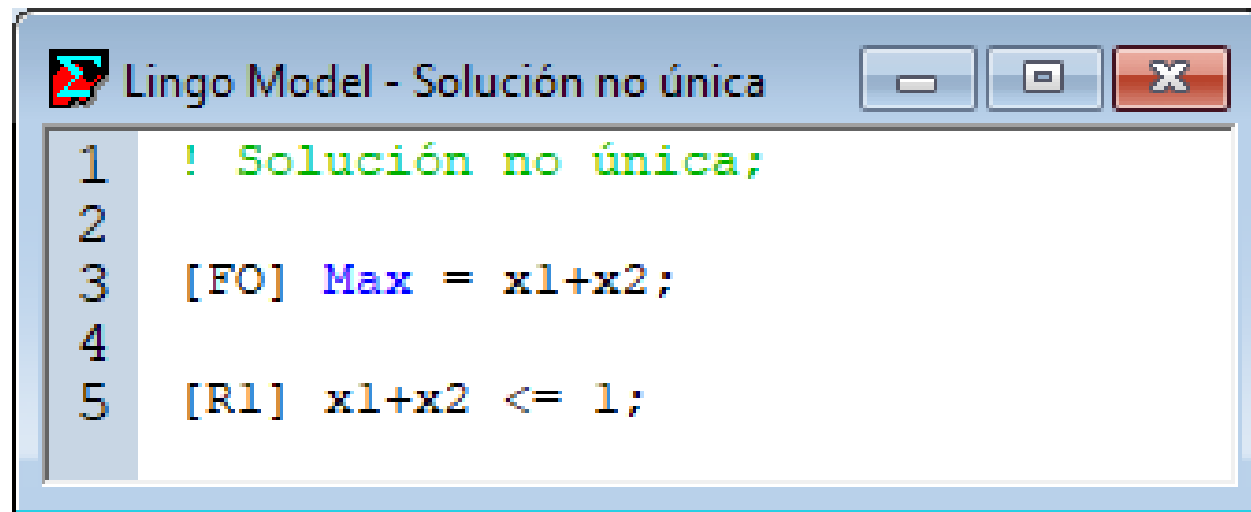
$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Solución no única.lg4



Solución no única



The screenshot shows a window titled "Lingo Model - Solución no única". The window contains a text editor with the following code:

```
1  ! Solución no única;  
2  
3  [FO] Max = x1+x2;  
4  
5  [R1] x1+x2 <= 1;
```

The code is a linear programming model. Line 1 is a comment. Line 3 is the objective function to maximize. Line 5 is the constraint. The window has standard Windows-style controls (minimize, maximize, close) in the top right corner.

Solución no única

Variable		Value	Reduced Cost
X1		0.000000	0.000000
X2		1.000000	0.000000
Row	Slack or Surplus		Dual Price
FO	1.000000		1.000000
R1	0.000000		1.000000

Ojos de serpiente: solución múltiple.

Solución no acotada

$$\text{Max}_{x_1, x_2} x_1 + x_2$$

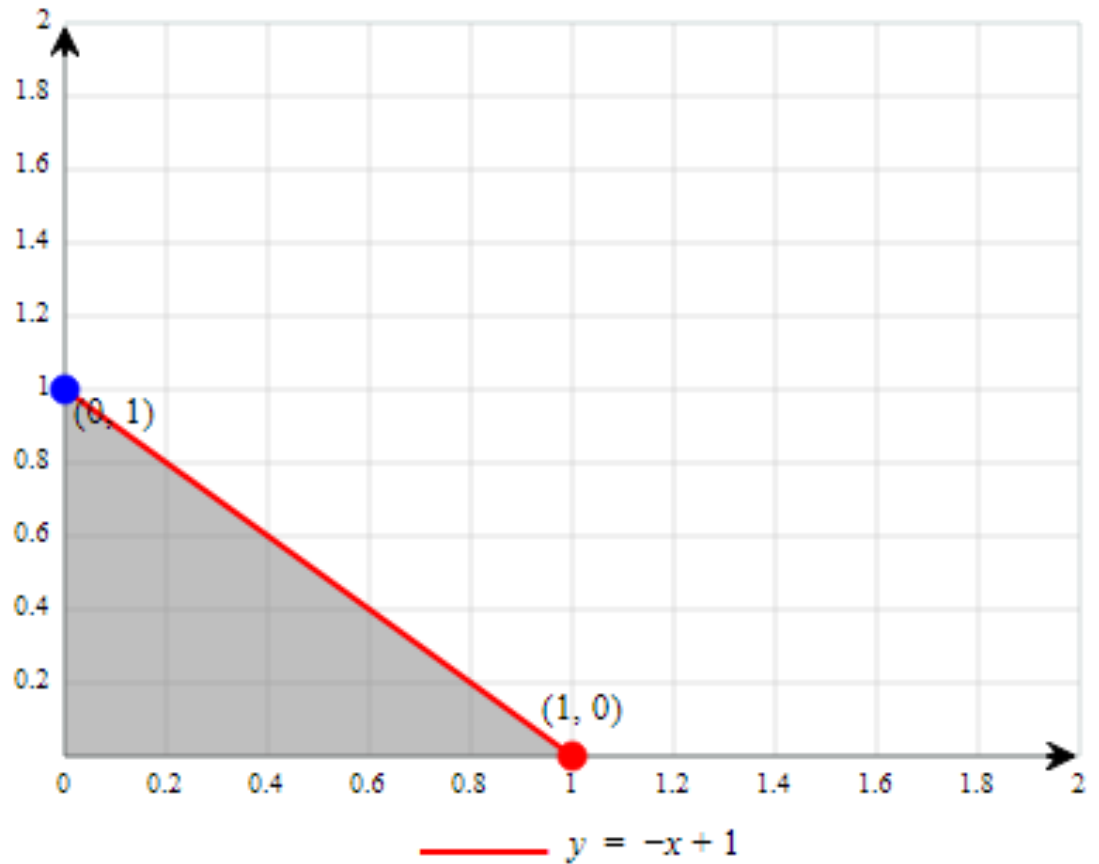
s. a :

$$x_1 + x_2 \geq 1$$

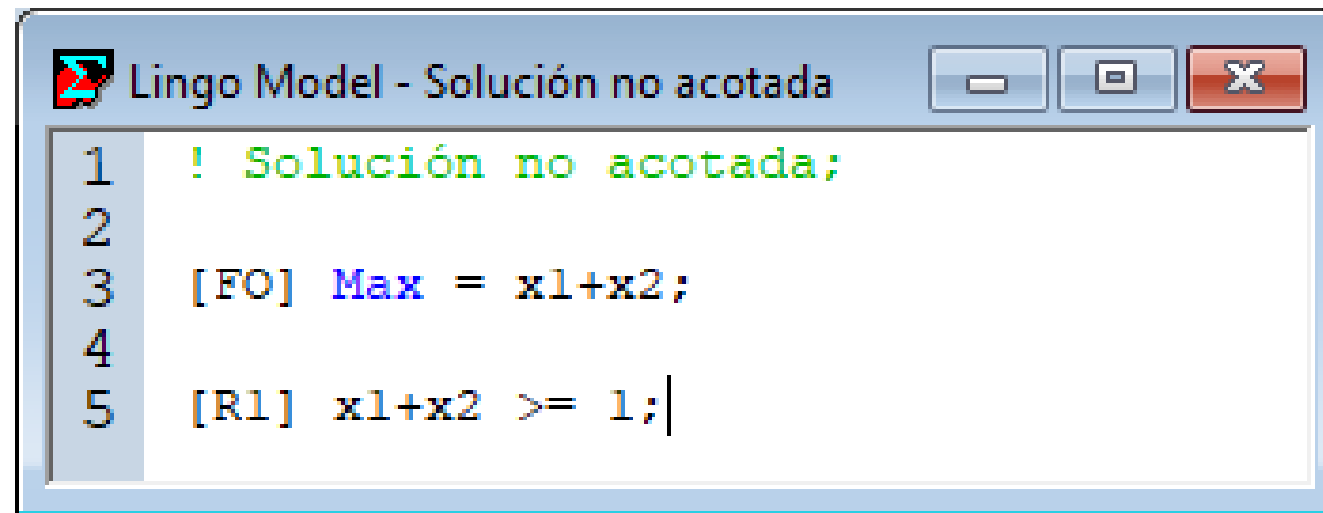
$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Solución no acotada.lg4



Solución no acotada

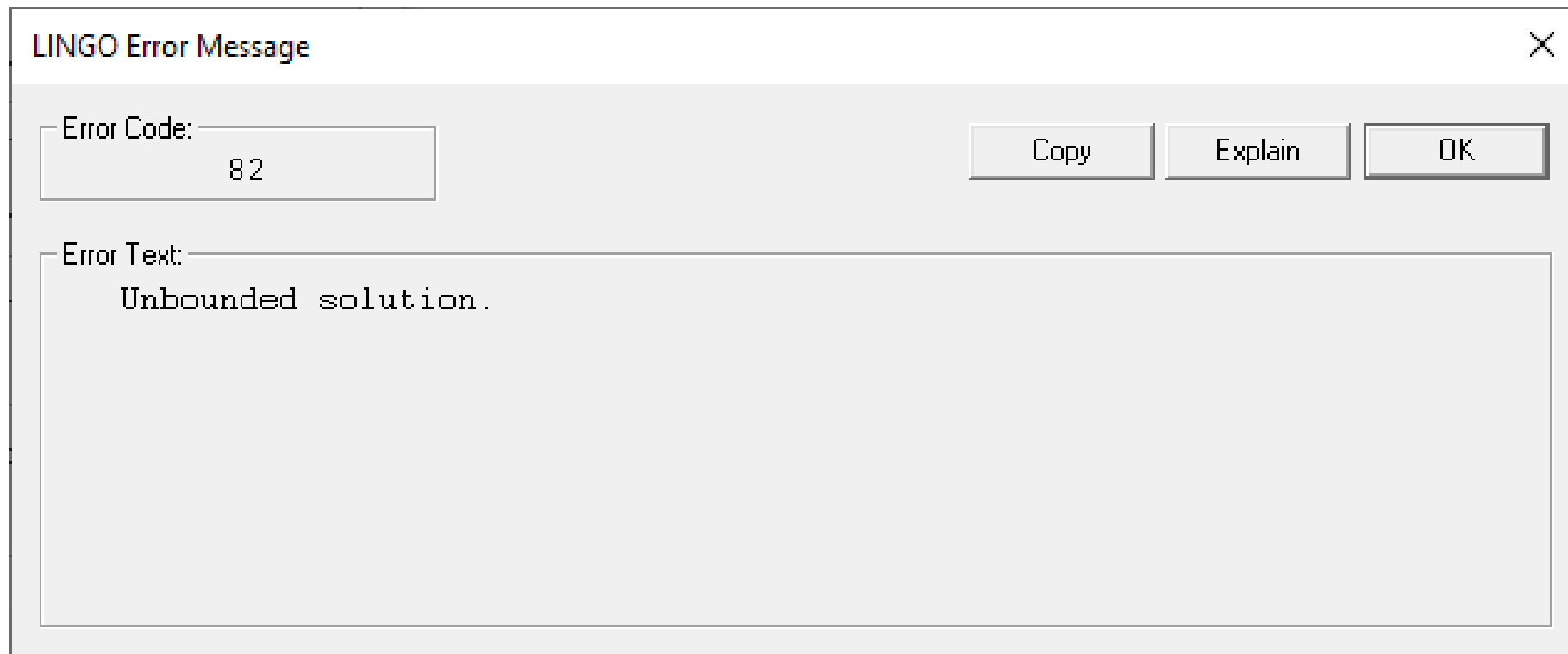


The screenshot shows a window titled "Lingo Model - Solución no acotada". The window contains a text editor with the following code:

```
1  ! Solución no acotada;  
2  
3  [FO] Max = x1+x2;  
4  
5  [R1] x1+x2 >= 1;
```

The code is displayed with line numbers 1 through 5 on the left. The text is color-coded: the exclamation mark and "Solución no acotada;" are green, "[FO] Max" is blue, and the rest is black.

Solución no acotada



No factible

$$\text{Max}_{x_1, x_2} x_1 + x_2$$

s. a :

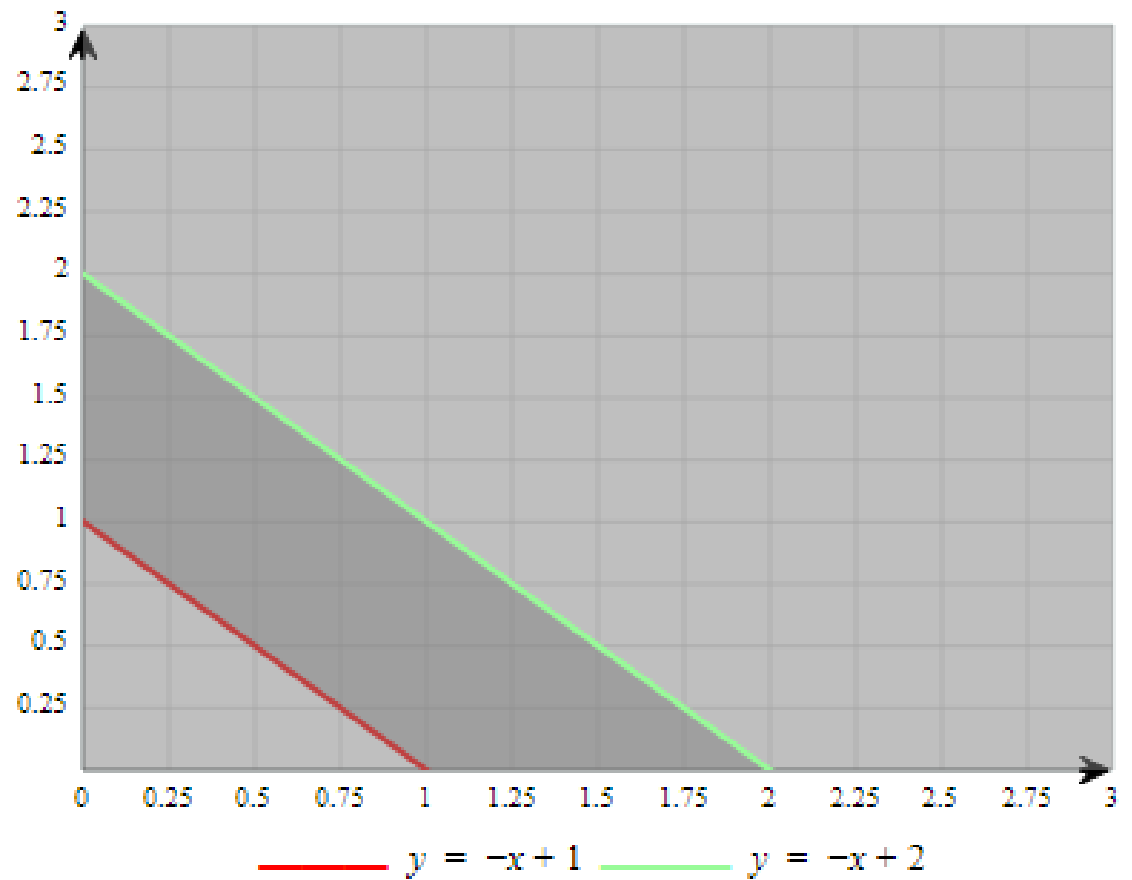
$$x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1 + x_2 \geq 2$$

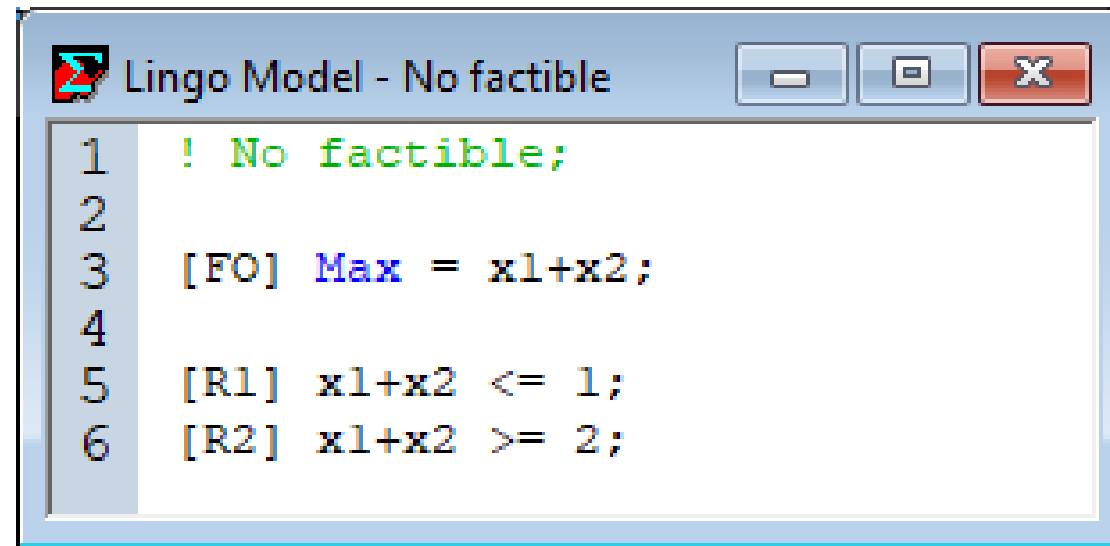
$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

No factible.lg4



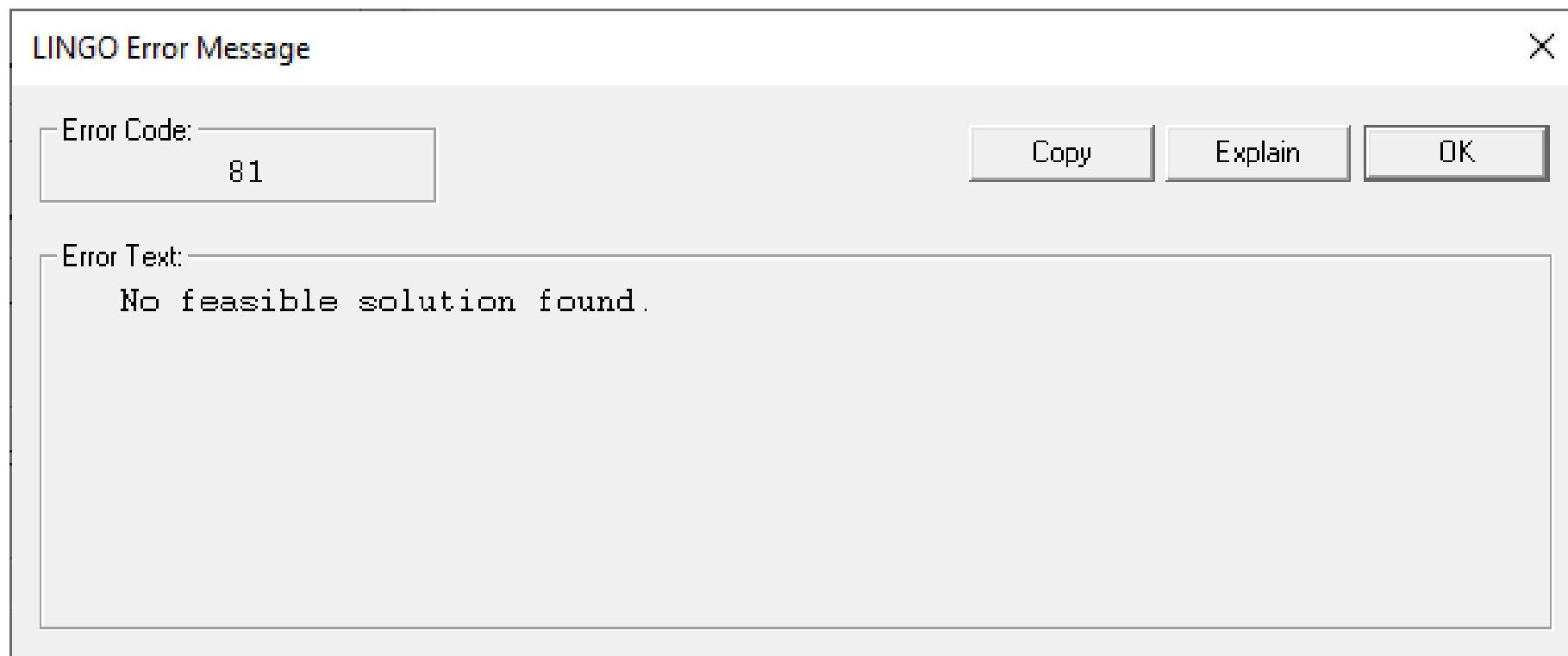
No factible



The screenshot shows a window titled "Lingo Model - No factible" with a standard Windows-style title bar (minimize, maximize, close buttons). The window contains a text editor with the following Lingo code:

```
1  ! No factible;  
2  
3  [FO] Max = x1+x2;  
4  
5  [R1] x1+x2 <= 1;  
6  [R2] x1+x2 >= 2;
```

No factible



Problema de producción

Problema de producción

Se maximizan los beneficios originados por n actividades que compiten por m recursos. La actividad j se ejecuta a velocidad x_j (kg/h), produce un beneficio unitario b_j (\$/kg) y tiene un consumo específico a_{ij} (kg/kg) del recurso i , cuya disponibilidad es s_i (kg/h).

Problema de producción

- Parámetros:
 - n : Tipos de actividades.
 - m : Tipos de recursos.
 - b_j : Beneficio unitario de la actividad j (\$/kg).
 - s_i : Disponibilidad del recurso i (kg/h).
 - a_{ij} : Consumo específico del recurso i por la actividad j (kg/kg).

Problema de producción

- Variables de decisión:
 - x_j : Velocidad de ejecución de la actividad j (kg/h).
- Función objetivo:
 - Beneficios (\$/h): $\sum_{j=1}^n b_j x_j$
- Restricciones:
 - Disponibilidad del recurso i (kg/h): $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq s_i$
 - Para $i = 1, 2, \dots, m$

Problema de producción

$$\text{Max}_{x_j} \sum_{j=1}^n b_j x_j$$

s. a :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq s_i \quad i = 1 \dots m$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1 \dots n$$

Fábrica de pinturas

Fábrica de pinturas

Una fábrica produce pintura amarilla (A) y pintura celeste (C). Existen dos líneas de producción, una para cada color. La capacidad de la línea A es 60 m^3 por día; mientras que la capacidad de la línea C es 50 m^3 por día. Un metro cúbico de A requiere 1 h-hombre de labor; mientras que un metro cúbico de C requiere 2 h-hombre. Se disponen de 120 h-hombre como máximo por día que pueden ser asignadas indistintamente a la producción de ambos colores. La contribución a los beneficios de la empresa es \$20 y \$30 por metro cúbico de A y C, respectivamente. Se debe determinar el plan de producción diaria óptimo.

Fábrica de pinturas

- Parámetros:

- $n = 2$

- $m = 3$

- $b = 20 \ 30 \ (\$/m^3)$

- $s = 60 \ (m^3/d)$

- $50 \ (m^3/d)$

- $120 \ (h-hombre/d)$

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & C \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{matrix} LA \\ LC \\ MO \end{matrix} \end{matrix}$$

Fábrica de pinturas

- Variables de decisión:
 - $x = A \ C \ (\text{m}^3/\text{d})$
- Función objetivo:
 - Beneficios (\$/d): $20A + 30C$
- Restricciones:
 - Capacidad de la línea A (m^3/d): $A \leq 60$
 - Capacidad de la línea C (m^3/d): $C \leq 50$
 - Mano de obra (h-hombre/d): $A + 2C \leq 120$

Fábrica de pinturas

$$\text{Max}_{A,C} 20 A + 30 C$$

s. a :

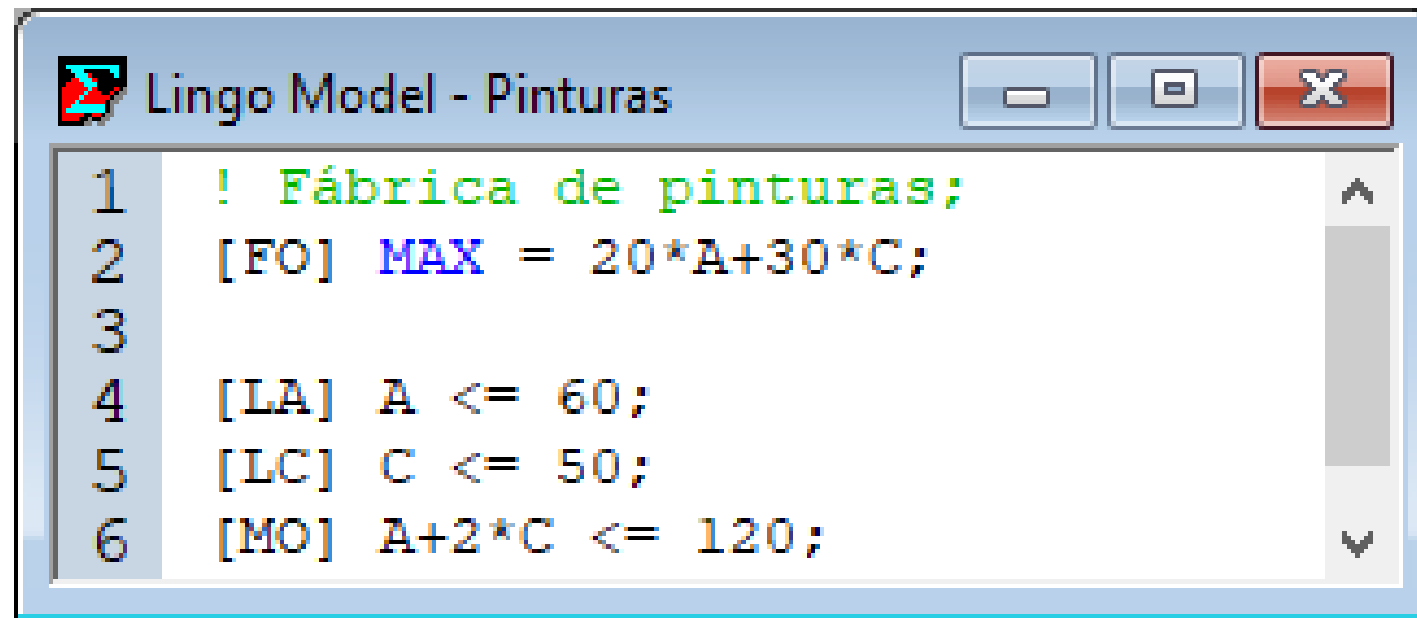
$$A \leq 60$$

$$C \leq 50$$

$$A + 2 C \leq 120$$

$$A \geq 0, C \geq 0$$

Modelo en LINGO



```
1  ! Fábrica de pinturas;  
2  [FO] MAX = 20*A+30*C;  
3  
4  [LA] A <= 60;  
5  [LC] C <= 50;  
6  [MO] A+2*C <= 120;
```

The screenshot shows a window titled "Lingo Model - Pinturas" with a standard Windows interface (minimize, maximize, close buttons). The window contains a text editor with a linear programming model. The model is written in LINGO syntax, with comments in green, objective function coefficients in blue, and constraints in black. The model is for maximizing profit (MAX) based on the production of two types of paint (A and C) given resource constraints (LA, LC, MO).

Resultados en LINGO

Variable	Value	Reduced Cost
A	60.00000	0.000000
C	30.00000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
FO	2100.000	1.000000
LA	0.000000	5.000000
LC	20.00000	0.000000
MO	0.000000	15.00000

Se activaron LA y MO. Hacen valer la igualdad. Se acabaron esos recursos.

Fábrica de pinturas

Enter the linear programming problem here:

☒ Maximize $z = 20x + 30y$ subject to the constraints:
☐ Minimize
☐ Show only the region defined by the following constraints:

$x \leq 60$
 $y \leq 50$
 $x + 2y \leq 120$

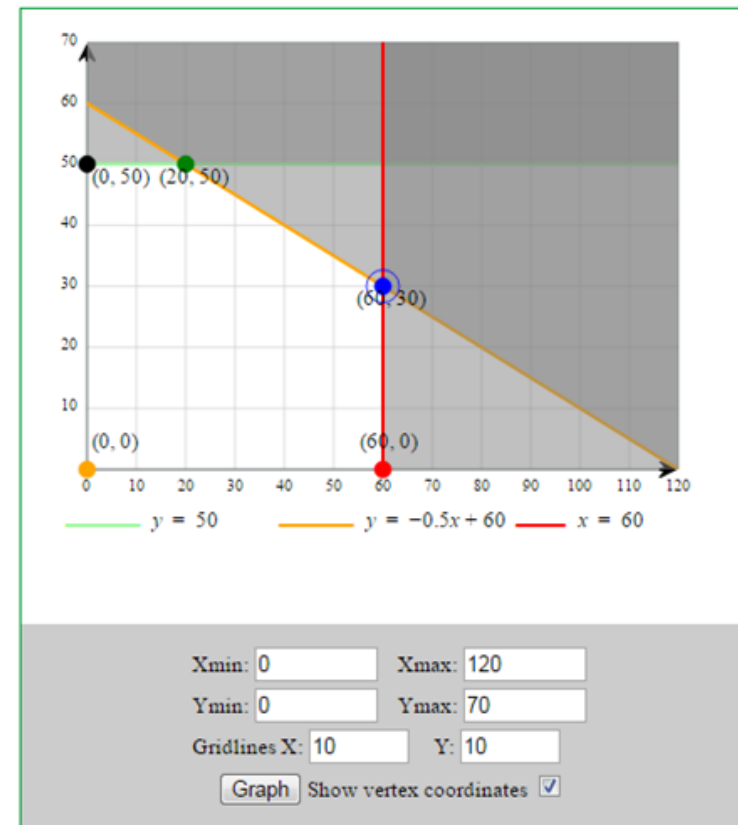
LP Examples Graphing Examples Solve

Rounding: 4 decimal places Fraction Mode ☐

Erase Everything

The solution will appear below.

Vertex	Lines through vertex	Value of objective
• (60, 30)	$x = 60$ $x + 2y = 120$	2100 Maximum
• (60, 0)	$x = 60$ $y = 0$	1200
• (20, 50)	$y = 50$ $x + 2y = 120$	1900
• (0, 50)	$y = 50$ $x = 0$	1500
• (0, 0)	$x = 0$ $y = 0$	0



Simplex

Fábrica de químicos

Fábrica de químicos

Una fábrica de químicos produce dos tipos de combos: el especial y el estándar. Cada combo contiene 8 kg del químico A. El especial tiene 2 kg del químico B y requiere 3 h-hombre de mano de obra, mientras que la estándar contiene 1.5 kg del químico B y requiere 2 h-hombre de mano de obra. La fábrica solo puede producir 400 kg de A y 80 kg de B por semana. La capacidad de mano de obra es de 2 hombres trabajando cada uno 40 h/semana, pero podrían trabajar hasta 10 horas extras cobrando el doble. El precio de venta de cada tipo de combo es de \$50 y \$40, respectivamente. La mano de obra tiene un costo de 2 \$/h, el costo de A es 0.5 \$/kg y el costo de B es 10 \$/kg. Se desea organizar la producción semanal para obtener el máximo beneficio.

Fábrica de químicos

- x_1 : Especiales producidos por semana en la jornada normal.
- x_2 : Estándares producidos por semana en la jornada normal.
- x_3 : Especiales producidos por semana en la jornada extra.
- x_4 : Estándares producidas por semana en la jornada extra.

Fábrica de químicos

Prod.	Ingre.	Mano de obra	A	B	Costo total	Benef.
1	50	2·3	0.5·8	10·2	30	20
2	40	2·2	0.5·8	10·1.5	23	17
3	50	4·3	0.5·8	10·2	36	14
4	40	4·2	0.5·8	10·1.5	27	13

$$f(x) = 20x_1 + 17x_2 + 14x_3 + 13x_4$$

Fábrica de químicos

- Restricciones:

- Horas normales (h-hombre/semana): $3x_1 + 2x_2 \leq 2 \cdot 40$

- Horas extras (h-hombre/semana): $3x_3 + 2x_4 \leq 2 \cdot 10$

- Químico A (kg/semana): $8(x_1 + x_3) + 8(x_2 + x_4) \leq 400$

- Químico B (kg/semana): $2(x_1 + x_3) + 1.5(x_2 + x_4) \leq 80$

Fábrica de químicos

$$\text{Max}_{x_j} \sum_{j=1}^n b_j x_j$$

s. a :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq s_i \quad \forall i$$

$$x_j \geq 0 \quad \forall j$$

$$\text{Max}_{x_1, x_2, x_3, x_4} 20x_1 + 17x_2 + 14x_3 + 13x_4$$

s. a:

$$3x_1 + 2x_2 \leq 80$$

$$3x_3 + 2x_4 \leq 20$$

$$8x_1 + 8x_2 + 8x_3 + 8x_4 \leq 400$$

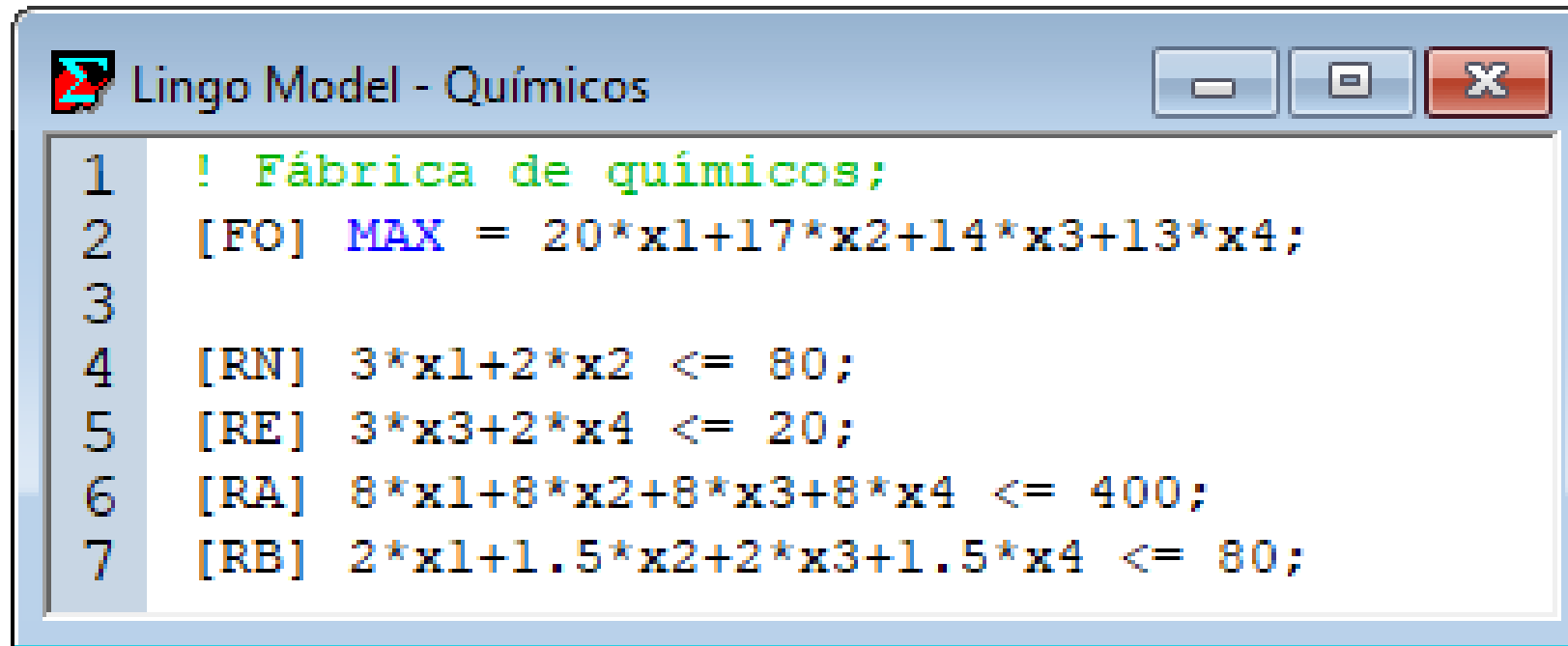
$$2x_1 + 1.5x_2 + 2x_3 + 1.5x_4 \leq 80$$

x_1, x_2, x_3, x_4 no negativas

$$\begin{array}{rcl} b & = & 20 \quad 17 \quad 14 \quad 13 \\ s & = & 80 \quad 20 \quad 400 \quad 80 \\ a & = & \begin{array}{cccc} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \\ 2 & 1.5 & 2 & 1.5 \end{array} \end{array}$$

Químicos.lg4

Modelo en LINGO



```
1  ! Fábrica de químicos;  
2  [FO] MAX = 20*x1+17*x2+14*x3+13*x4;  
3  
4  [RN] 3*x1+2*x2 <= 80;  
5  [RE] 3*x3+2*x4 <= 20;  
6  [RA] 8*x1+8*x2+8*x3+8*x4 <= 400;  
7  [RB] 2*x1+1.5*x2+2*x3+1.5*x4 <= 80;
```

Resultados en LINGO

Variable	Value	Reduced Cost
X1	0.000000	0.000000
X2	40.00000	0.000000
X3	0.000000	0.000000
X4	10.00000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
FO	810.0000	1.000000
RN	0.000000	3.000000
RE	0.000000	1.000000
RA	0.000000	1.375000
RB	5.000000	0.000000

Conjuntos

Fábrica de químicos

$$\text{Max}_{x_j} \sum_{j=1}^n b_j x_j$$

s. a :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq s_i \quad \forall i$$

$$x_j \geq 0 \quad \forall j$$

Químicos con sets.lg4

Sets:

```
Productos/1..4/: x,b;  
Recursos/1..4/: s;  
RxP(Recursos,Productos): a;
```

EndSets

Data:

```
b = 20 17 14 13;  
a = 3 2 0 0  
    0 0 3 2  
    8 8 8 8  
    2 1.5 2 1.5;  
s = 80 20 400 80;
```

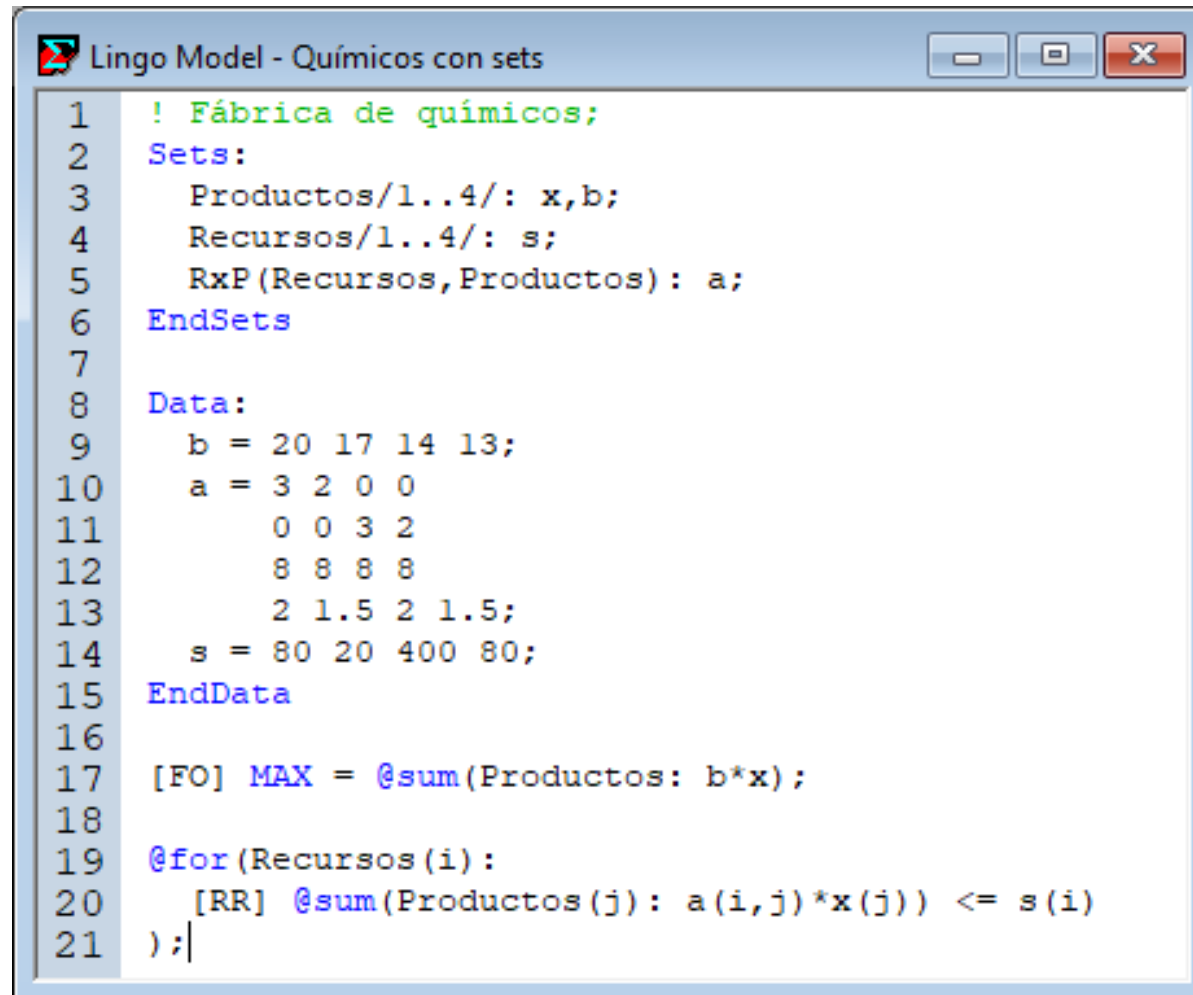
EndData

```
[FO] MAX = @sum(Productos: b*x);
```

```
@for(Recursos(i):
```

```
[RP] @sum(Productos(j): a(i,j)*x(j)) <= s(i)  
);
```

Modelo en LINGO



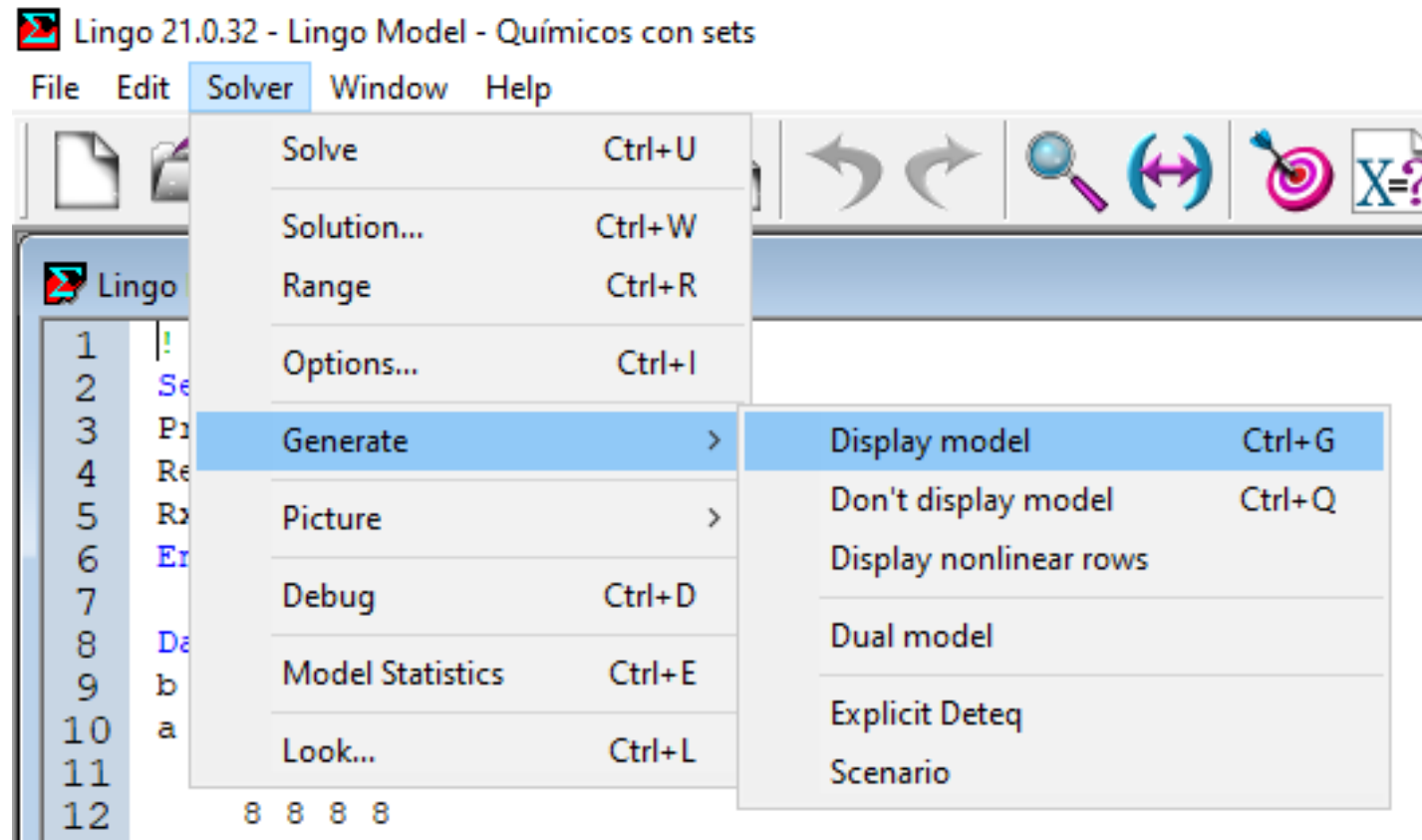
```
1  ! Fábrica de químicos;  
2  Sets:  
3      Productos/1..4/: x,b;  
4      Recursos/1..4/: s;  
5      RxP(Recursos,Productos): a;  
6  EndSets  
7  
8  Data:  
9      b = 20 17 14 13;  
10     a = 3 2 0 0  
11         0 0 3 2  
12         8 8 8 8  
13         2 1.5 2 1.5;  
14     s = 80 20 400 80;  
15 EndData  
16  
17 [FO] MAX = @sum(Productos: b*x);  
18  
19 @for(Recursos(i):  
20     [RR] @sum(Productos(j): a(i,j)*x(j)) <= s(i)  
21 );|
```

Resultados en LINGO

Variable	Value	Reduced Cost
X(1)	0.000000	0.000000
X(2)	40.00000	0.000000
X(3)	0.000000	0.000000
X(4)	10.00000	0.000000
B(1)	20.00000	0.000000
...		
A(1, 1)	3.000000	0.000000
...		

Row	Slack or Surplus	Dual Price
FO	810.0000	1.000000
RR(1)	0.000000	3.000000
RR(2)	0.000000	1.000000
RR(3)	0.000000	1.375000
RR(4)	5.000000	0.000000

Modelo desarrollado



Modelo desarrollado

MODEL:

[FO] MAX= 20 * X_1 + 17 * X_2 + 14 * X_3 + 13 * X_4;

[RR_1] 3 * X_1 + 2 * X_2 <= 80;

[RR_2] 3 * X_3 + 2 * X_4 <= 20;

[RR_3] 8 * X_1 + 8 * X_2 + 8 * X_3 + 8 * X_4 <= 400;

[RR_4] 2 * X_1 + 1.5 * X_2 + 2 * X_3 + 1.5 * X_4 <= 80;

END