

Optimización Modelo y FO

Enrique E. Tarifa, Facultad de Ingeniería, UNJu

Programación matemática

Programación matemática

$$\text{Max}_{x_j} FO(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad j = 1, 2, \dots, n$$

s. a:

$$h_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$g_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0 \quad k = 1, 2, \dots, o$$

$$GL = n - m$$

Función objetivo

Función objetivo

- Criterio económico:
 - Valor del dinero en el tiempo: VAN y TIR
 - Beneficios = Ingresos - Costos
 - Ingresos constantes → Costos

Función objetivo

- Solo costos de operación e ingresos: Problemas de control supervisor, los costos de capital permanecen fijos.
- Solo costos de capital: Diseños mecánicos que no afectan a los costos de operación.
- Ambos costos: Las decisiones a tomar afectan tanto a los costos de operación como a los de capital.

Simplificación de la función objetivo

Simplificación de la FO

Sea $g(x)$, con un punto máximo en x^{opt} , este punto también será un punto óptimo de la función $f(x)$ definida como:

$$g(x) = \alpha f(x) + \beta$$

$$\text{Max} \{g(x)\} = \alpha \text{Max} \{f(x)\} + \beta \quad \alpha > 0$$

$$\text{Min} \{g(x)\} = \alpha \text{Max} \{f(x)\} + \beta \quad \alpha < 0$$

$$\text{Min} \{-f(x)\} = -\text{Max} \{f(x)\}$$

Solución analítica

Solución analítica

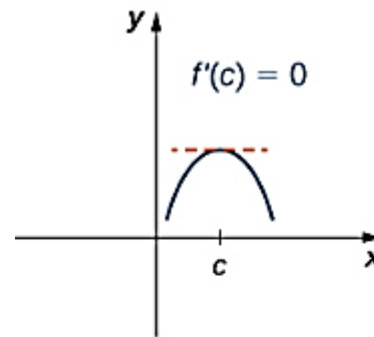
- Punto crítico:

- $\left. \frac{df}{dx} \right|_c = 0$ o no existe.

- Punto extremo:

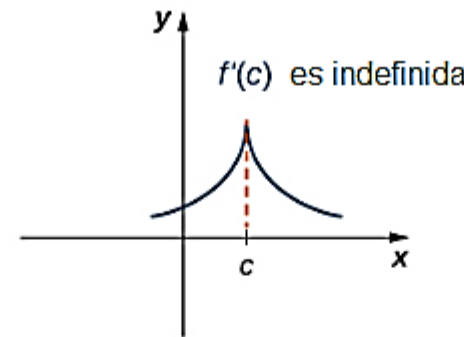
- $\left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_c > 0$, mínimo

- $\left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_c < 0$, máximo



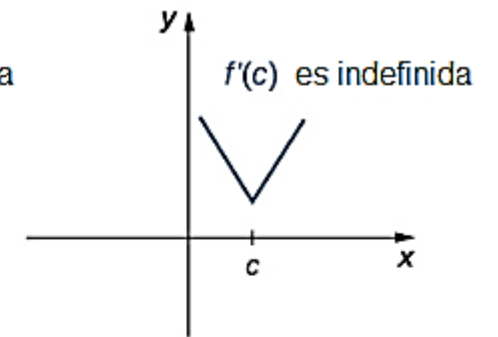
Máximo local en c

(a)



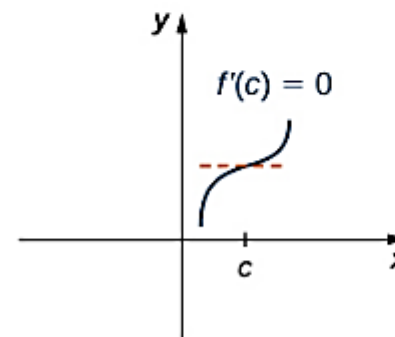
Máximo local en c

(b)



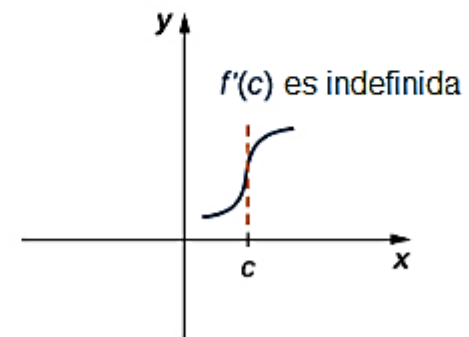
Mínimo local en c

(c)



No hay un extremo local en c

(d)



No hay un extremo local en c

(e)

Solo costo de operación

Costo de operación

Maximizar los beneficios de una planta química que produce tres productos (D, E, F) a partir de tres reactivos (A, B, C). Los procesos son paralelos. Las reacciones involucradas son las siguientes:



Costo de operación

Materia Prima	Disponibilidad (lb/d)	Costo (c/lb)
A	40000	1.5
B	30000	1.0
C	25000	2.5

Producto	lb reactivo/ lb producto	Costo del proceso (c/lb)	Precio de venta (c/lb)
D	2/3 A, 1/3 B	1.5	4.0
E	2/3 A, 1/3 B	0.5	3.3
F	1/2 A, 1/6 B, 1/3 C	1.0	3.8

Costo de operación

- La función objetivo: beneficios (\$/d) = ingresos – costos
- $x = (A \ B \ C \ D \ E \ F)^T$ (lb/d)
- Ingresos (\$/d) = $0.04x_4 + 0.033x_5 + 0.038x_6$
- Costo de materia prima (\$/d) = $0.015x_1 + 0.01x_2 + 0.025x_3$
- Costo de procesamiento (\$/d) = $0.015x_4 + 0.005x_5 + 0.01x_6$

$$f(x) = 0.025x_4 + 0.028x_5 + 0.028x_6 - 0.015x_1 - 0.01x_2 - 0.025x_3$$

Costo de operación

- Balances de materia de las materias primas:

	D	E	F
A	$x_1 = 0.667 x_4 + 0.667 x_5 + 0.5 x_6$		
B	$x_2 = 0.333 x_4 + 0.333 x_5 + 0.167 x_6$		
C	$x_3 = 0.333 x_6$		

Costo de operación

○ Disponibilidad:

$$0 \leq x_1 \leq 40000$$

$$0 \leq x_2 \leq 30000$$

$$0 \leq x_3 \leq 25000$$

Costo de operación

$$\text{Max}_{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6} \quad 0.025 x_4 + 0.028 x_5 + 0.028 x_6 - 0.015 x_1 - 0.01 x_2 - 0.025 x_3$$

s. a:

$$x_1 = 0.667 x_4 + 0.667 x_5 + 0.5 x_6$$

$$x_2 = 0.333 x_4 + 0.333 x_5 + 0.167 x_6$$

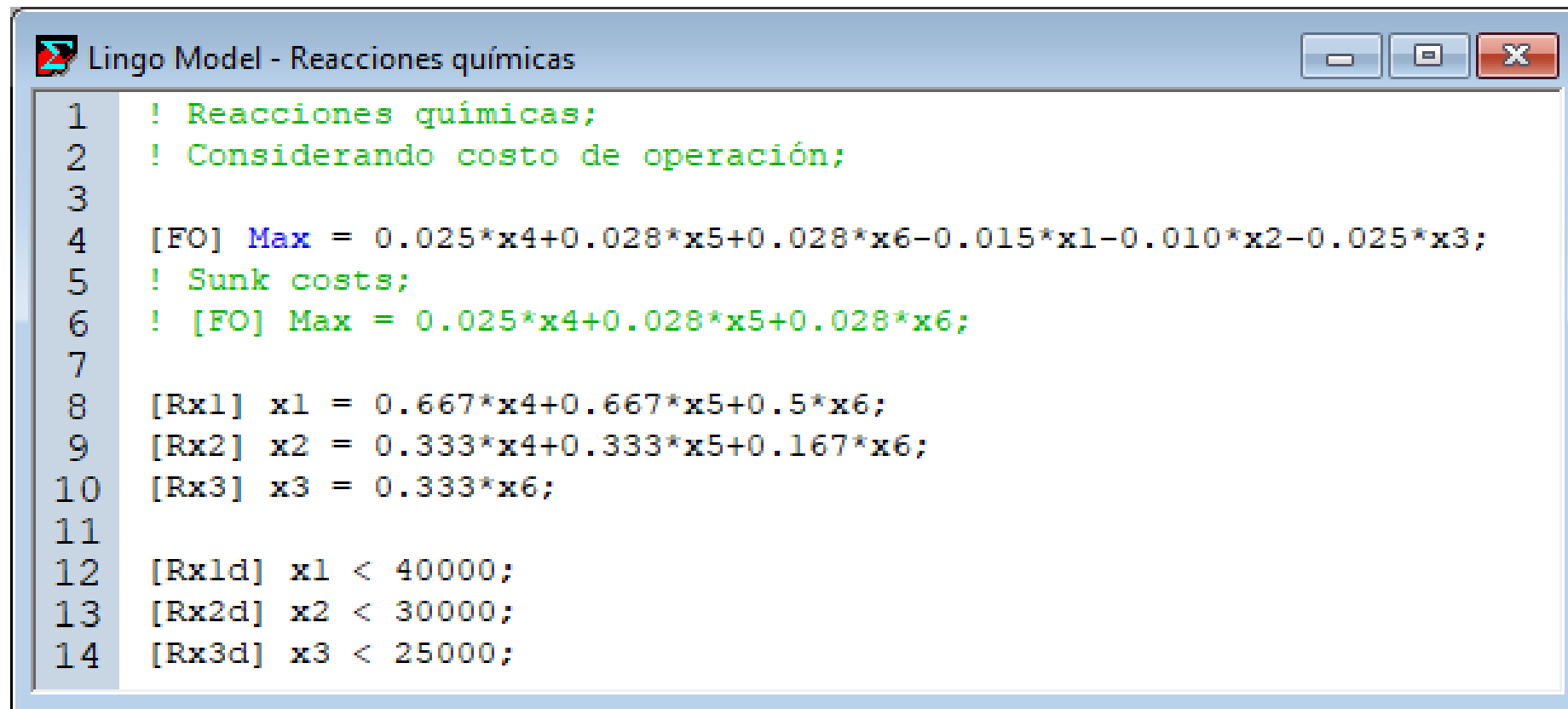
$$x_3 = 0.333 x_6$$

$$0 \leq x_1 \leq 40000$$

$$0 \leq x_2 \leq 30000$$

$$0 \leq x_3 \leq 25000$$

Modelo en LINGO



```
1  ! Reacciones químicas;
2  ! Considerando costo de operación;
3
4  [FO] Max = 0.025*x4+0.028*x5+0.028*x6-0.015*x1-0.010*x2-0.025*x3;
5  ! Sunk costs;
6  ! [FO] Max = 0.025*x4+0.028*x5+0.028*x6;
7
8  [Rx1] x1 = 0.667*x4+0.667*x5+0.5*x6;
9  [Rx2] x2 = 0.333*x4+0.333*x5+0.167*x6;
10 [Rx3] x3 = 0.333*x6;
11
12 [Rx1d] x1 < 40000;
13 [Rx2d] x2 < 30000;
14 [Rx3d] x3 < 25000;
```

Resultados en LINGO

Variable	Value	Reduced Cost
X4	0.000000	0.3000000E-02
X5	59970.01	0.000000
X6	0.000000	0.4882534E-03
X1	40000.00	0.000000
X2	19970.01	0.000000
X3	0.000000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
FO	879.4603	1.000000
RX1	0.000000	-0.3698651E-01
RX2	0.000000	-0.1000000E-01
RX3	0.000000	-0.2500000E-01
RX1D	0.000000	0.2198651E-01
RX2D	10029.99	0.000000
RX3D	25000.00	0.000000

Costo hundido o *sunk cost*

- Gastos ya realizados.
- No deben ser tenidos en cuenta.
- Cuando la materia prima fue comprada previamente.
- Costo de adquisición $\rightarrow 0$

$$\text{Max}_{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6} \quad 0.025x_4 + 0.028x_5 + 0.028x_6 - \cancel{0.015x_1 - 0.01x_2 - 0.025x_3}$$

Ingresos

$$\text{Max}_{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6} \quad 0.025 x_4 + 0.028 x_5 + 0.028 x_6$$

s. a:

$$x_1 = 0.667 x_4 + 0.667 x_5 + 0.5 x_6$$

$$x_2 = 0.333 x_4 + 0.333 x_5 + 0.167 x_6$$

$$x_3 = 0.333 x_6$$

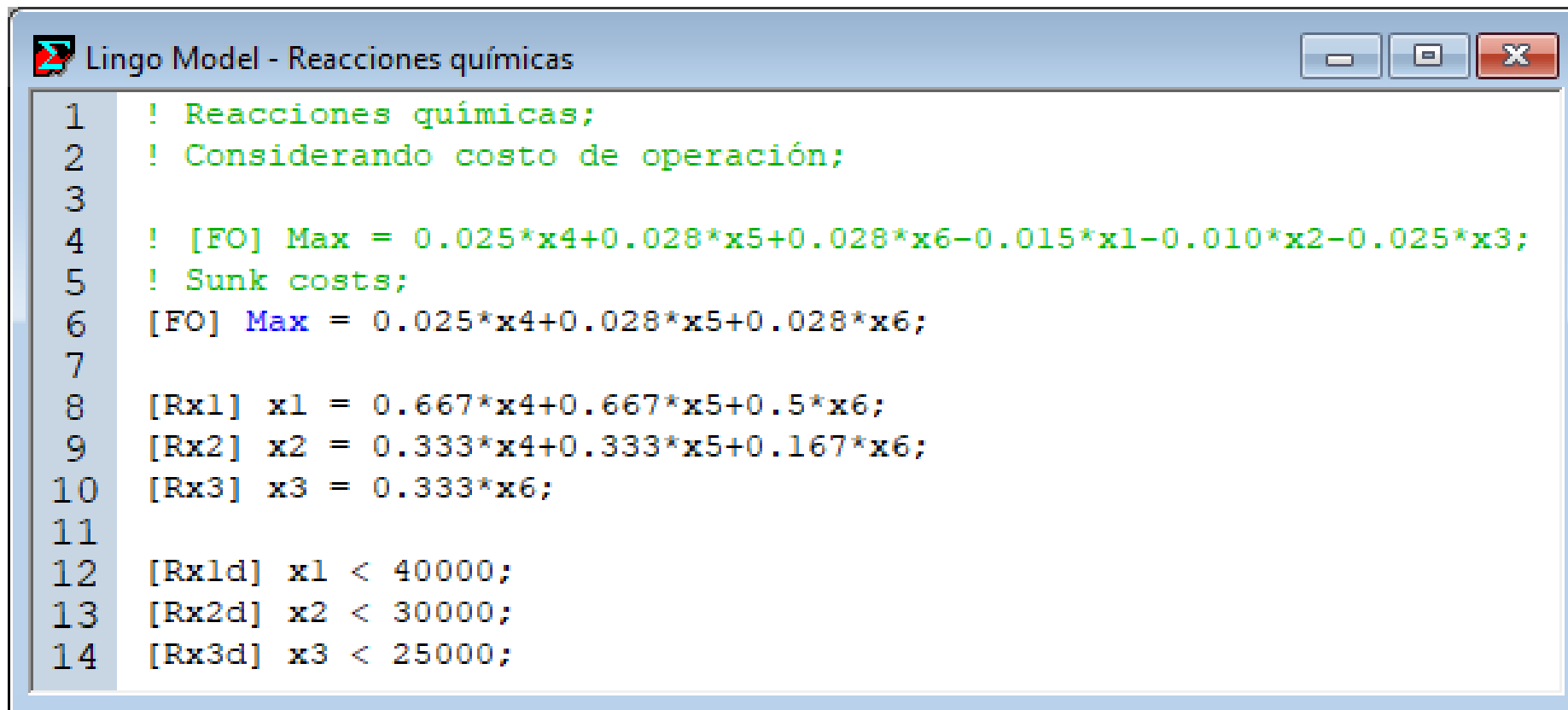
$$0 \leq x_1 \leq 40000$$

$$0 \leq x_2 \leq 30000$$

$$0 \leq x_3 \leq 25000$$

Reacciones químicas.lg4

Modelo en LINGO



```
1  ! Reacciones químicas;
2  ! Considerando costo de operación;
3
4  ! [FO] Max = 0.025*x4+0.028*x5+0.028*x6-0.015*x1-0.010*x2-0.025*x3;
5  ! Sunk costs;
6  [FO] Max = 0.025*x4+0.028*x5+0.028*x6;
7
8  [Rx1] x1 = 0.667*x4+0.667*x5+0.5*x6;
9  [Rx2] x2 = 0.333*x4+0.333*x5+0.167*x6;
10 [Rx3] x3 = 0.333*x6;
11
12 [Rx1d] x1 < 40000;
13 [Rx2d] x2 < 30000;
14 [Rx3d] x3 < 25000;
```

Resultados en LINGO

Variable	Value	Reduced Cost
X4	0.000000	0.3000000E-02
X5	3691.848	0.000000
X6	75075.08	0.000000
X1	40000.00	0.000000
X2	13766.92	0.000000
X3	25000.00	0.000000
Row	Slack or Surplus	Dual Price
FO	2205.474	1.000000
RX1	0.000000	-0.4197901E-01
RX2	0.000000	0.000000
RX3	0.000000	-0.2105254E-01
RX1D	0.000000	0.4197901E-01
RX2D	16233.08	0.000000
RX3D	0.000000	0.2105254E-01

Solo costo de capital

Costo de capital

- Se quiere determinar la mejor relación L/D para un tanque cilíndrico y compararla con el heurístico que plantea que es 3.
- Suposiciones:
 - Las dos tapas son planas.
 - El espesor t y la densidad de las paredes son constantes.
 - El costo de fabricación y de material es el mismo para las tapas como para el cuerpo, y es igual a S (\$/lb).
 - No hay desperdicios durante la fabricación.

Costo de capital

- La función objetivo debería ser el costo de capital (f_1); pero puede simplificarse tomando el peso (f_2) o directamente la superficie (f_3):

$$f_1 = S \rho \left(\frac{\pi D^2}{2} + \pi D L \right) t$$

$$f_2 = \rho \left(\frac{\pi D^2}{2} + \pi D L \right) t$$

$$f_3 = \frac{\pi D^2}{2} + \pi D L$$

Costo de capital

$$\text{Min}_{D,L} \frac{\pi D^2}{2} + \pi D L$$

s. a:

$$V = \frac{\pi D^2}{4} L$$

$$D \geq 0$$

$$L \geq 0$$

Costo de capital

- Modelo de estado:

$$\text{Min}_D \frac{\pi D^2}{2} + \pi D L$$

$$L \leftarrow \frac{4V}{\pi D^2}$$

s. a:

$$D \geq 0$$

$$L \geq 0$$

Costo de capital

- Modelo de sustitución:

$$\text{Min}_D \frac{\pi D^2}{2} + \frac{4V}{D}$$

s. a:

$$D \geq 0$$

Costo de capital

- Punto crítico:

- $\left. \frac{df}{dD} \right|_{D^{\text{opt}}} = \pi D^{\text{opt}} - 4 V / D^{\text{opt}^2} = 0$

- $D^{\text{opt}} = \sqrt[3]{4 V / \pi}$

- Punto mínimo:

- $\left. \frac{d^2 f}{dD^2} \right|_{D^{\text{opt}}} = \pi + 8 V / D^{\text{opt}^3} > 0$

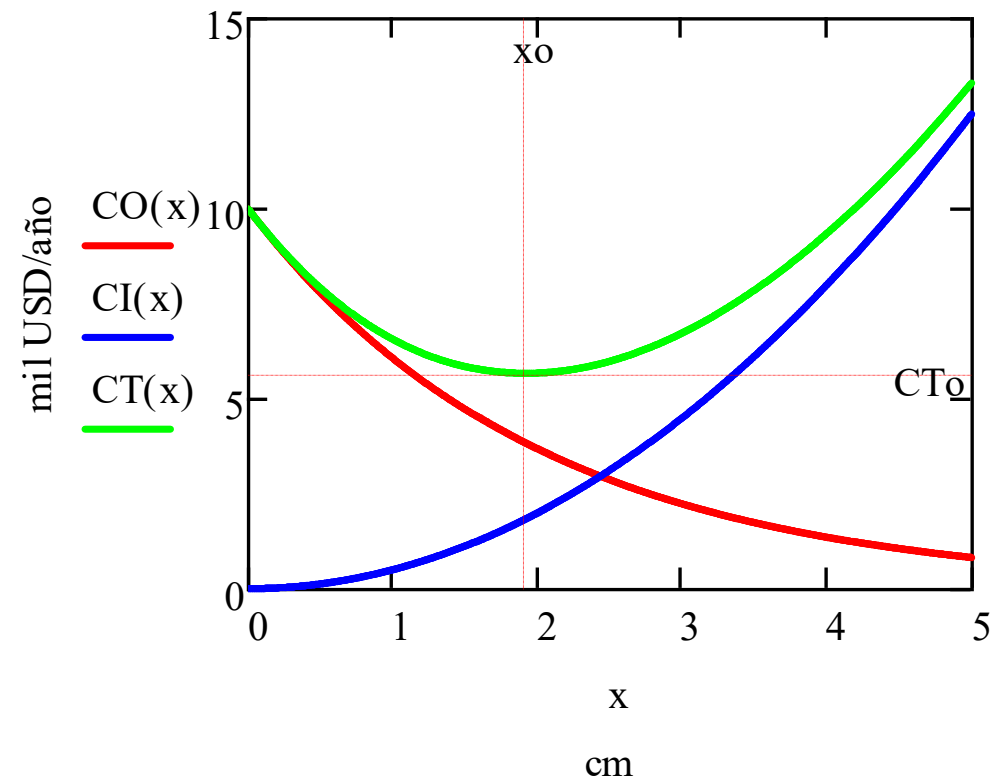
Costo de capital

$$D^{\text{opt}} = \left(\frac{4V}{\pi} \right)^{1/3} \quad L^{\text{opt}} = \left(\frac{4V}{\pi} \right)^{1/3}$$

$(L/D)^{\text{opt}} = 1$. Esto está lejos del 3 planteado por la experiencia. La diferencia se debe a que las suposiciones realizadas no se cumplen en la práctica.

Costo de operación y de capital

Espesor de capa aislante



Costo total

- $CT = CO + CI$ (\$/año)
- Q : Calor disipado (W).
- Y : Horas de operación por año (h/año).
- H_t : Costo de la energía (\$/Wh).
- C : Costo unitario (\$/m²).
- A : Área a cubrir (m²).
- r : Factor de reembolso, $r = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$.
- i : tasa de interés (tanto por uno).

$$\text{Min}_{Q,C,x} Q Y H_t + C A r$$

s. a:

$$Q = \frac{A \Delta T}{x / k + 1 / h_c}$$

$$C = F_0 + F_1 x$$

$$Q \geq 0$$

$$C \geq 0$$

$$x \geq 0$$

Costo total

$$\text{Min}_x \frac{A \Delta T}{x / k + 1 / h_c} Y H_t + (F_0 + F_1 x) A r$$

s. a:

$$x \geq 0$$

Costo total

$$x^{\text{opt}} = k \left[\left(\frac{Y H_t \Delta T}{k F_1 r} \right)^{1/2} - \frac{1}{h_c} \right]$$

$$\left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x^{\text{opt}}} = \frac{2 A Y H_t \Delta T}{k^2 \left(\frac{x^{\text{opt}}}{k} + \frac{1}{h_c} \right)^3} > 0 \quad \text{Es un mínimo.}$$

Costo total

- Si x no es mucho menor que el radio de la tubería, se debe cambiar el aislante o modificar el modelo.
- r_i : Radio interno de la capa.
- A_i : Área interna de la capa.

$$\text{Min}_{Q,C,x} Q Y H_t + C A_i r$$

s. a:

$$Q = \frac{A_i \Delta T}{r_i \ln \left((r_i + x) / r_i \right) / k + r_i / (h_c (r_i + x))}$$

$$C = F_0 + F_1 x$$

$$Q \geq 0$$

$$C \geq 0$$

$$x \geq 0$$

Beneficios

Espesor de capa aislante

- Beneficios = Ingresos - Costos
- Calor perdido sin aislante: $Q_0 = h_c A \Delta T$

$$\text{Max}_{Q,C,x} (Q_0 - Q) Y H_t - C A r$$

s. a:

$$Q = \frac{A \Delta T}{x / k + 1 / h_c}$$

$$C = F_0 + F_1 x$$

$$Q \leq Q_0$$

$$Q \geq 0$$

$$C \geq 0$$

$$x \geq 0$$

Beneficios

$$\text{Max}_x \left(Q_0 - \frac{A \Delta T}{x / k + 1 / h_c} \right) Y H_t - (F_0 + F_1 x) A r$$

s. a:

$$x \geq 0$$

Beneficios

$$x^{\text{opt}} = k \left[\left(\frac{Y H_t \Delta T}{k F_1 r} \right)^{1/2} - \frac{1}{h_c} \right]$$

$$\left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x^{\text{opt}}} = - \frac{2 A Y H_t \Delta T}{k^2 \left(\frac{x^{\text{opt}}}{k} + \frac{1}{h_c} \right)^3} < 0 \quad \text{Es un máximo.}$$

Generador de vapor

- Optimizar el área de intercambio de un generador de vapor para generar vapor a 250 °F y 30 psia usando aceite a 400 °F.
- $U = 100 \text{ BTU}/(\text{h ft}^2 \text{ °F})$, $W_{\text{aceite}} C_{p_{\text{aceite}}} = 7.5 \times 10^4 \text{ BTU}/(\text{°F h})$
- El precio del área de intercambio es 25 \$/ft².
- El beneficio del vapor generado es $2 \times 10^{-6} \text{ \$/BTU}$.
- Las horas de servicio son 8000 h/año.
- Préstamo con una tasa de interés de 15 % a 10 años en cuotas anuales iguales.

Generador de vapor

$$\text{Max}_{F, I_0, W_{\text{agua}}, A, T_2} F - r I_0$$

s. a:

$$F = 2 \times 10^{-6} \Delta H_v W_{\text{agua}} 8000$$

$$I_0 = 25 A$$

$$W_{\text{aceite}} C p_{\text{aceite}} (400 - T_2) = \frac{U A (400 - T_2)}{\ln (150 / (T_2 - 250))}$$

$$W_{\text{aceite}} C p_{\text{aceite}} (400 - T_2) = \Delta H_v W_{\text{agua}}$$

$$r = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

Generador de vapor

$$FO(T_2) = 0.016 W_{\text{aceite}} C_{p_{\text{aceite}}} (400 - T_2) - 25 r \frac{W_{\text{aceite}} C_{p_{\text{aceite}}}}{U} \ln \left(\frac{150}{T_2 - 250} \right)$$

$$\left. \frac{dFO}{dT_2} \right|_{T_2^{\text{opt}}} = 25 r \frac{W_{\text{aceite}} C_{p_{\text{aceite}}}}{U} \frac{1}{T_2^{\text{opt}} - 250} - 0.016 W_{\text{aceite}} C_{p_{\text{aceite}}} = 0$$

Generador de vapor

$$T_2^{\text{opt}} = 250 + 15.62 \, r = 250 + 15.62 \, 0.2 = 253.1 \, ^\circ\text{F}$$

$$A^{\text{opt}} = \frac{W_{\text{aceite}} C p_{\text{aceite}} (400 - T_2^{\text{opt}})}{U (400 - T_2^{\text{opt}})} \ln \left(150 / (T_2^{\text{opt}} - 250) \right) = 2905 \, \text{ft}^2$$

Generador de vapor

$$\left. \frac{d^2 FO}{dT_2^2} \right|_{T_2^{\text{opt}}} = -25 r \frac{W_{\text{aceite}} C_{p_{\text{aceite}}}}{U} \frac{1}{\left(T_2^{\text{opt}} - 250\right)^2} < 0$$

Es un máximo.