Simulación
y Optimización

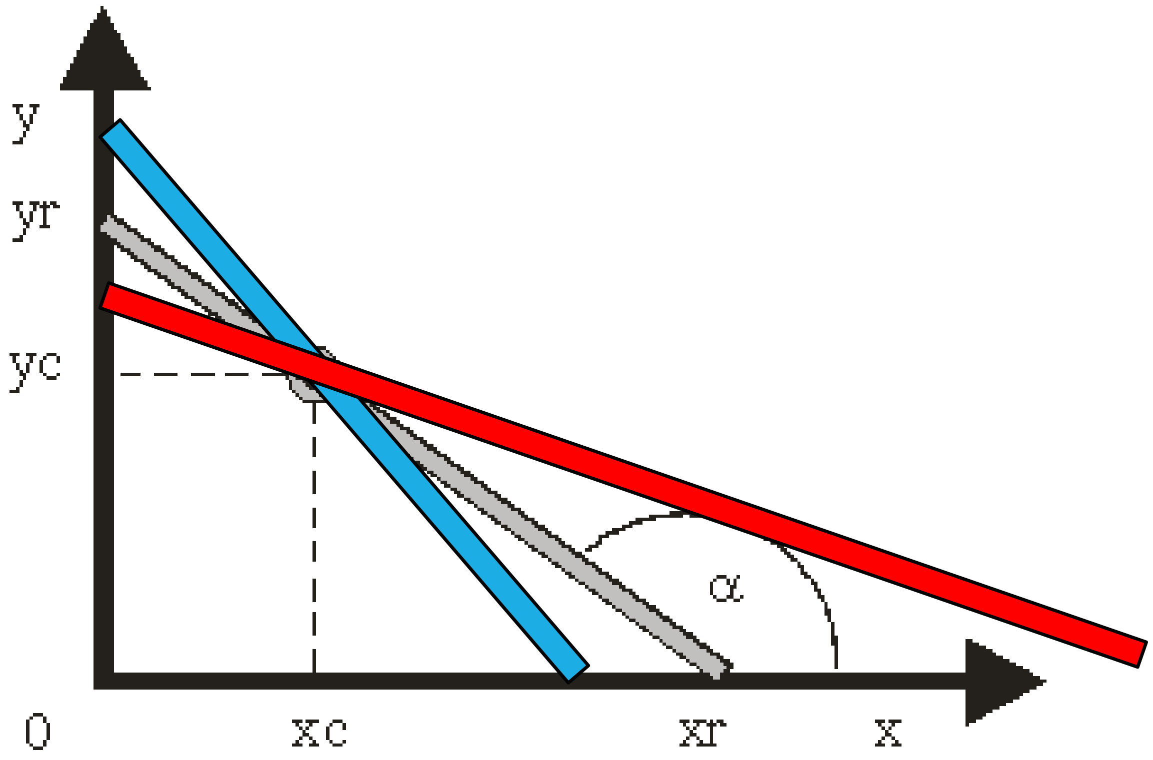
Optimización
Introducción
Parte II

Enrique E. Tarifa, Facultad de Ingeniería, UNJu

Instalación de una viga

Problema de la viga

Determinar la viga de longitud mínima que pase por el punto de carga (2 m, 3 m).



Modelo de optimización

$$\underset{xr,yr,l}{\text{Min}}\, l$$

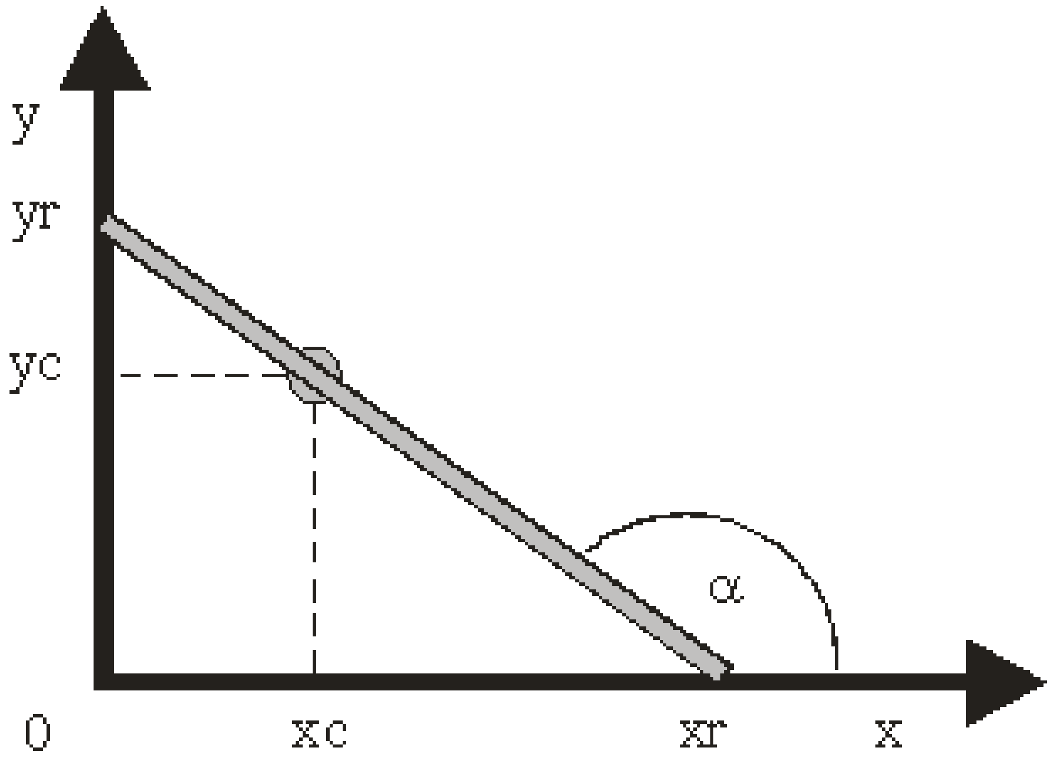
s. a:

$$\frac{yr}{xr} = \frac{yc}{xr - xc}$$

$$l = \sqrt{xr^2 + yr^2}$$

$$xc \leq xr$$

$$yc \leq yr$$



Instalación de una viga con xr.xlsx

Formas de modelos

Modelo estándar

$$\underset{xr,yr,l}{\text{Min}}\, l$$

s. a:

$$\frac{yr}{xr} - \frac{yc}{xr - xc} = 0$$

$$l^2 - xr^2 - yr^2 = 0$$

$$xc - xr \leq 0$$

$$yc - yr \leq 0$$

Modelo de estado

$$\underset{xr}{\text{Min}}\, l$$

$$yr \leftarrow \frac{yc}{xr - xc} xr$$

$$l \leftarrow \sqrt{xr^2 + yr^2}$$

s. a:

$$xc \leq xr$$

$$yc \leq yr$$

Modelo de sustitución

$$\underset{xr}{\text{Min}} \sqrt{xr^2 + \left(\frac{yc}{xr - xc} xr \right)^2}$$

s. a:

$$xc \leq xr$$

$$yc \leq \frac{yc}{xr - xc} xr$$

Programación matemática

Programación matemática

$$\underset{x_j}{\mathrm{Max}}\, FO(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

s. a:

$$h_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$g_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq 0 \quad k = 1, 2, \ldots, o$$

$$GL = n - m$$

Modelo de estado

$$x_i = F_i\left(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n\right) \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix} \qquad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_{n-m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{m+1} \\ x_{m+2} \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$y_i \leftarrow F_i\left(u_1, u_2, \dots, u_{n-m}\right) \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Modelo de estado

$$x_i = F_i\left(x_3\right) \quad i = 1, 2$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yr \\ l \end{pmatrix} \qquad u = \left(u_1\right) = \left(x_3\right) = \left(xr\right)$$

$$y_i \leftarrow F_i\left(u_1\right) \quad i = 1, 2$$

Modelo de estado

$$\underset{u_j}{\text{Max}}\ FO\left(y_1, y_2, \ldots, y_m, u_1, u_2, \ldots, u_{n-m}\right) \quad j = 1, 2, \ldots, n-m$$

$$y_i \leftarrow F_i\left(u_1, u_2, \ldots, u_{n-m}\right) \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

s. a:

$$g_k\left(y_1, y_2, \ldots, y_m, u_1, u_2, \ldots, u_{n-m}\right) \leq 0 \quad k = 1, 2, \ldots, o$$

$$GL = n - m$$

Modelo de sustitución

$$\underset{u_j}{\text{Max}}\ FO\left(F_1\left(u_1,u_2,\ldots,u_{n-m}\right),F_2\left(u_1,u_2,\ldots,u_{n-m}\right),\ldots,F_m\left(u_1,u_2,\ldots,u_{n-m}\right),u_1,u_2,\ldots,u_{n-m}\right)$$

$$j=1,2,\ldots,n-m$$

s. a:

$$g_k\left(F_1\left(u_1,u_2,\ldots,u_{n-m}\right),F_2\left(u_1,u_2,\ldots,u_{n-m}\right),\ldots,F_m\left(u_1,u_2,\ldots,u_{n-m}\right),u_1,u_2,\ldots,u_{n-m}\right)\le 0$$

$$k=1,2,\ldots,o$$

$$GL=n-m$$

Optimización de trayectoria

Optimización de trayectoria

$$\underset{x_j(t)}{\text{Max}}\, FO\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)\Big|_{t=t_\mathrm{f}} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

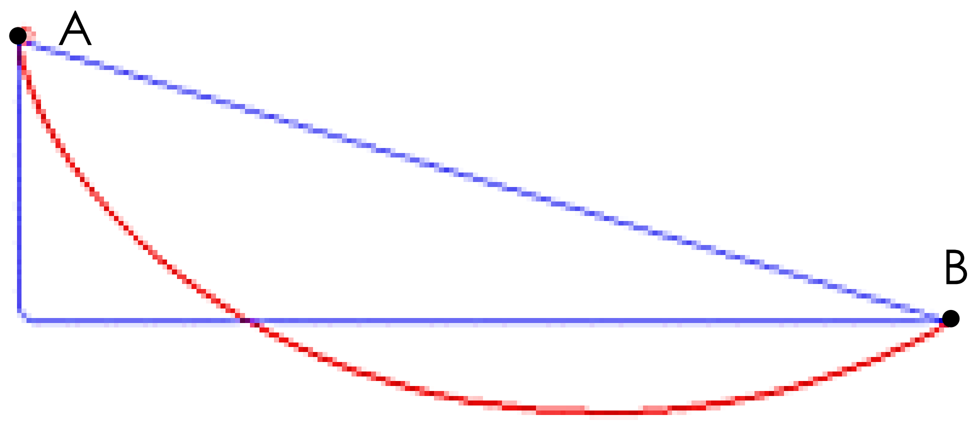
s. a:

$$\frac{dx_l}{dt} = f_l\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \qquad l = 1, 2, \ldots, p$$

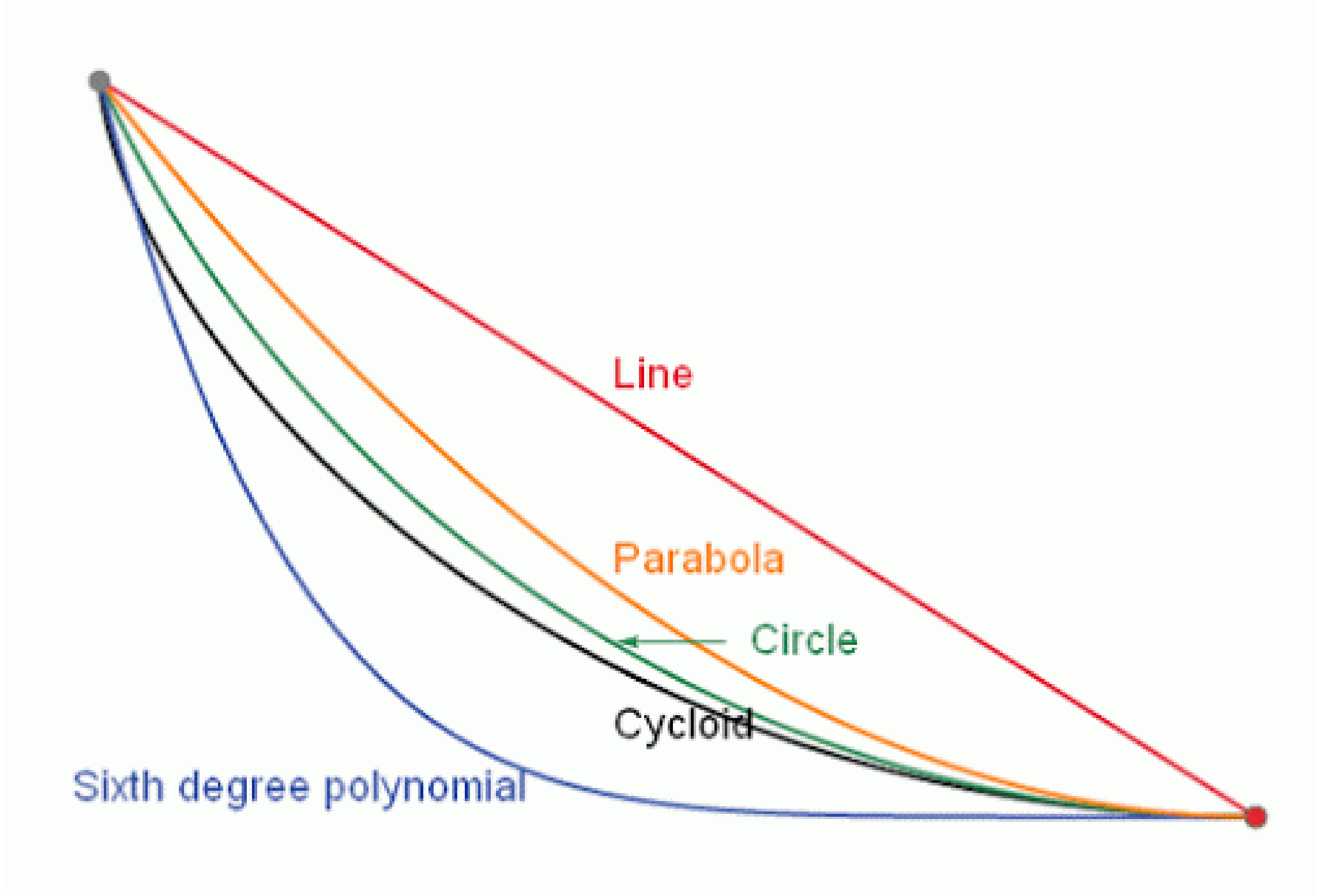
$$x_l\left(t_0\right) = x_{l0} \qquad\qquad t_0 \le t \le t_\mathrm{f}$$

Curva braquistócrona

En 1696, Jakob Bernoulli y Johann Bernoulli resolvieron el problema de la braquistócrona, el primer resultado en el cálculo de variaciones.



Curva braquistócrona



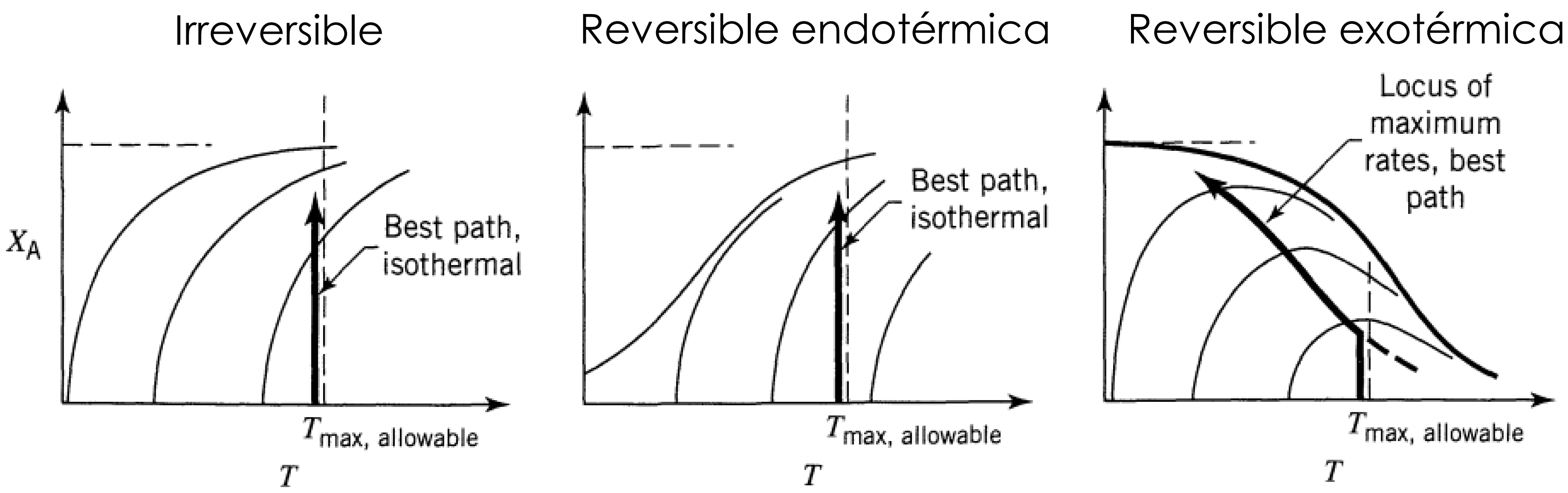
Progresión óptima de temperatura

$$\underset{T(x)}{\mathrm{Max}}\; X_A\left(x_f\right)$$

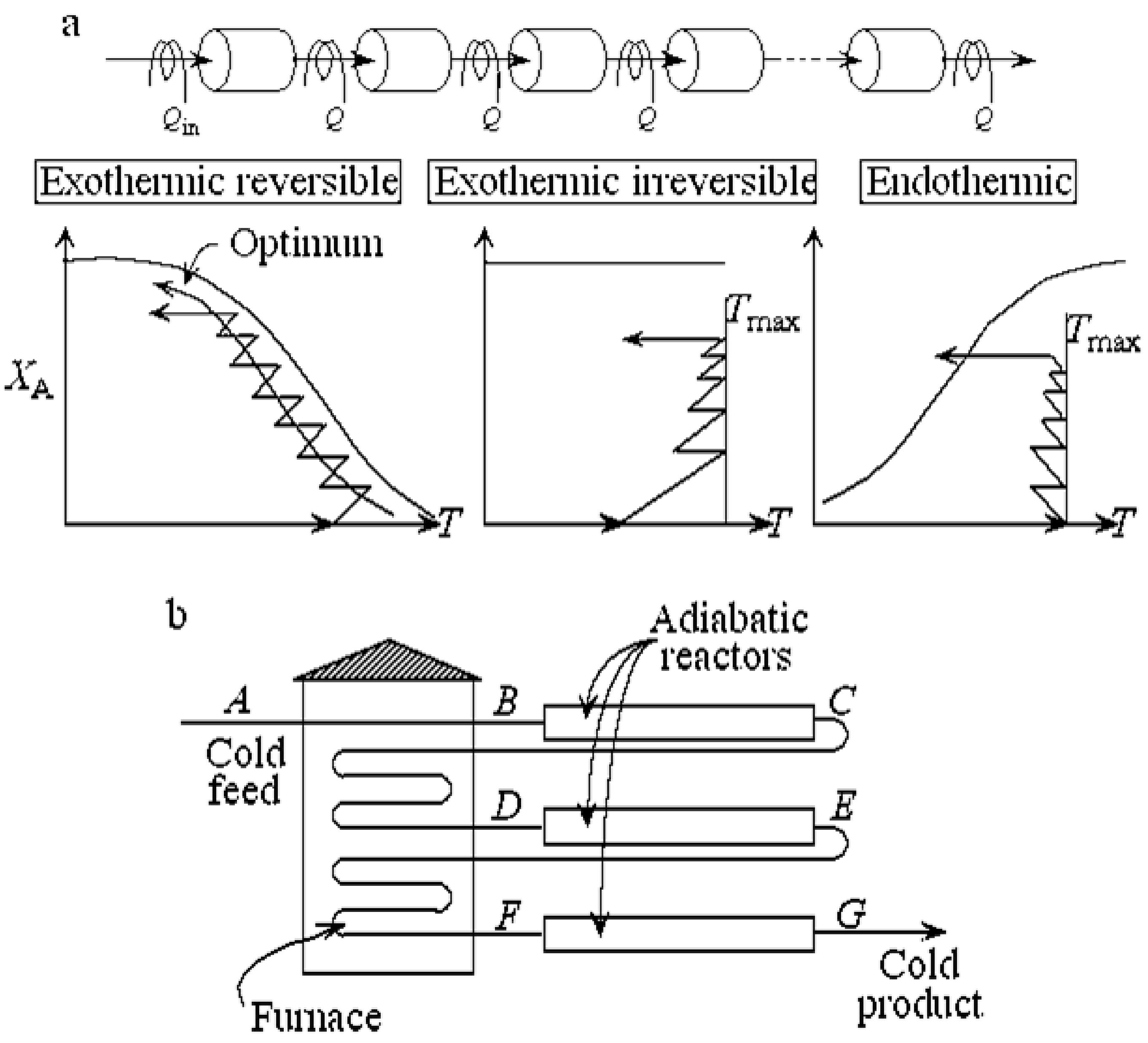
s. a:

$$\frac{dX}{dx} = F\left(x\right)$$

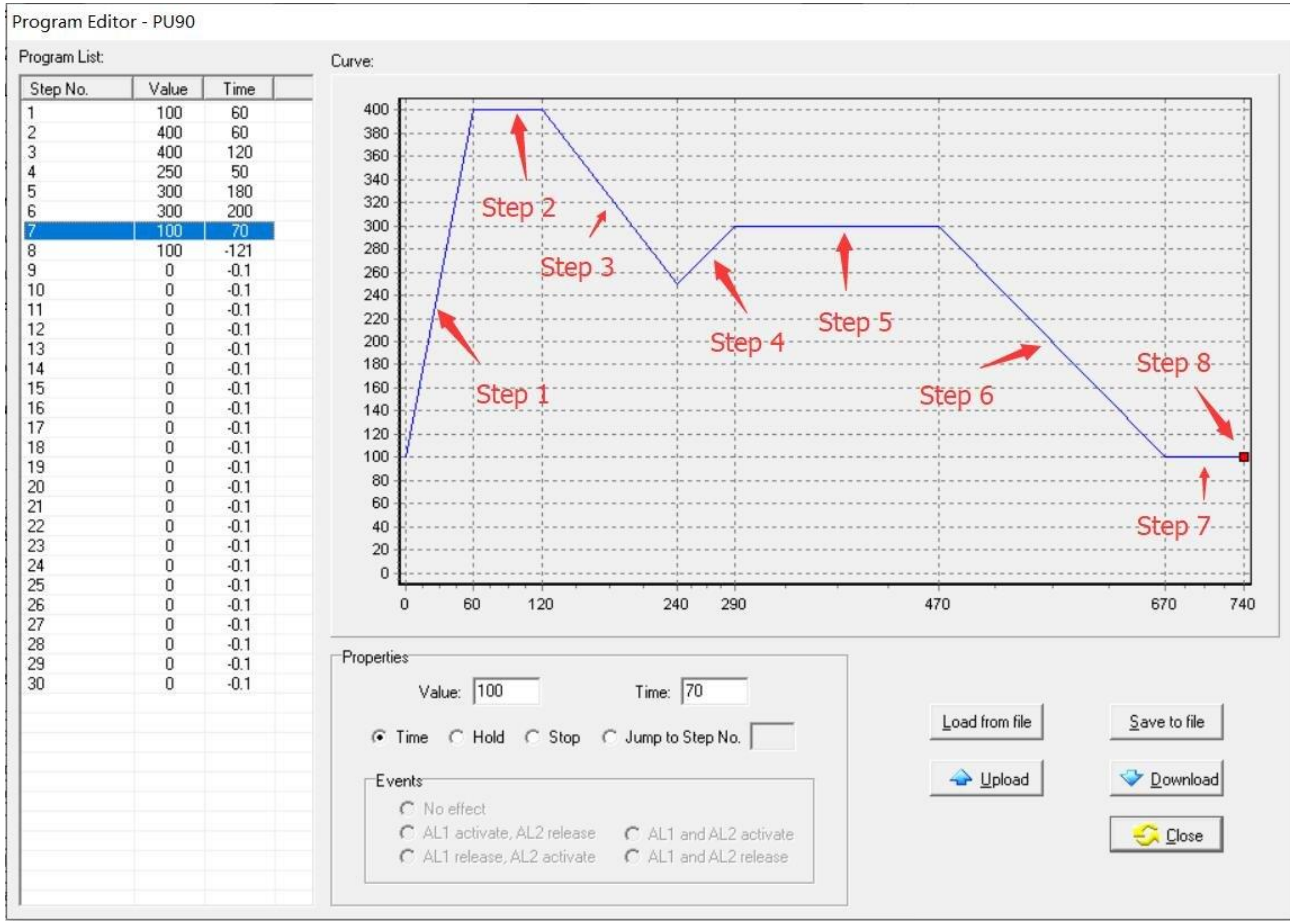
$$X\left(x\right) = X_0$$



donde x es *t* para reactores *batch*, o es z para reactores tubulares.


a
Q_{in}
Q
Q
Q
Q
Exothermic reversible
Exothermic irreversible
Endothermic
Optimum
X_A
T
T_{max}
T
T_{max}
T
b
Adiabatic reactors
A
B
C
Cold feed
D
E
F
G
Cold product
Furnace

Control por computadora



Controlador analógico

Clasificación de modelos de programación matemática

Programación matemática

$$\underset{x_j}{\text{Max}}\, FO\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

s. a:

$$h_i\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$g_k\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \leq 0 \quad k = 1, 2, \ldots, o$$

$$GL = n - m$$

Clasificación de modelos

- Programación Lineal (LP, *Linear Programming*)
- Programación No Lineal (NLP, *Nonlinear Programning*)
- Programación Lineal Entera (ILP, *Integer Linear Programming*)
- Programación No Lineal Entera (INLP, *Integer Nonlinear Programming*)
- Programación Lineal Entera Mixta (MILP, *Mixed Integer Linear Programming*)
- Programación No Lineal Entera Mixta (MINLP, *Mixed Integer Nonlinear Programming*)

$$FO(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$$

Oportunidades para optimizar

Oportunidad para optimizar

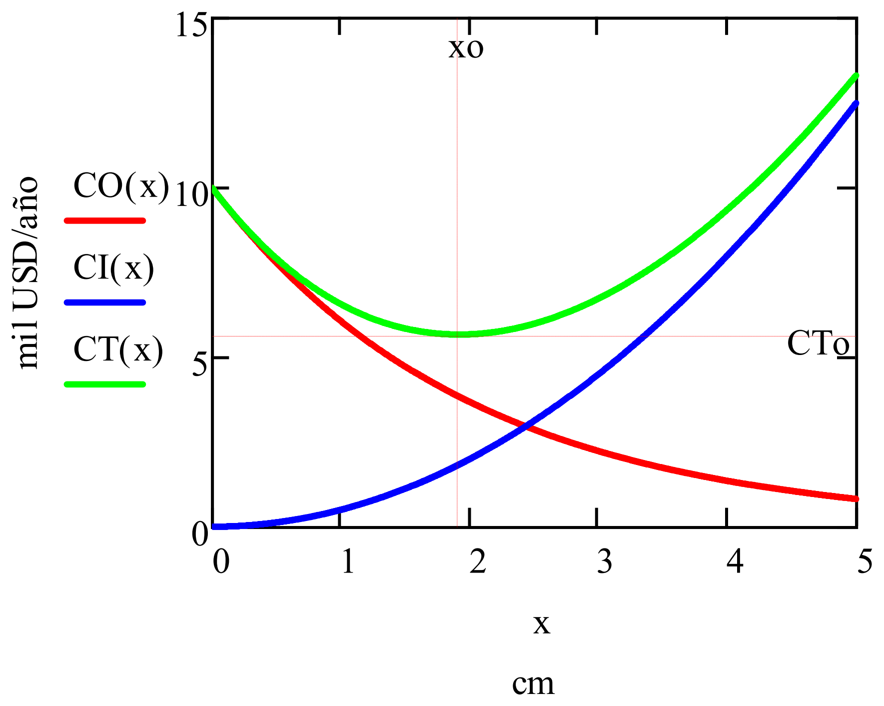
- Ventas limitadas por producción: Se debe maximizar la producción.
- Ventas limitadas por el mercado: Se deben minimizar los costos de producción.
- Grandes volúmenes de producción: Pequeños ahorros en los costos de producción tienen un gran impacto, es el caso de las refinerías y plantas químicas.
- Alto consumo de materia prima o energía: Optimizar los equipos con mayor consumo.

Oportunidad para optimizar

- La calidad de los productos es superior a la requerida por el mercado: Minimizar los costos reduciendo la calidad hasta el límite de aceptación.
- Pérdida de componentes valiosos en los efluentes: Minimizar las pérdidas teniendo en cuenta la legislación ambiental.
- Alto costo de mano de obra: Pasar de *batch* a continuo, modificar el *scheduling*, etc.

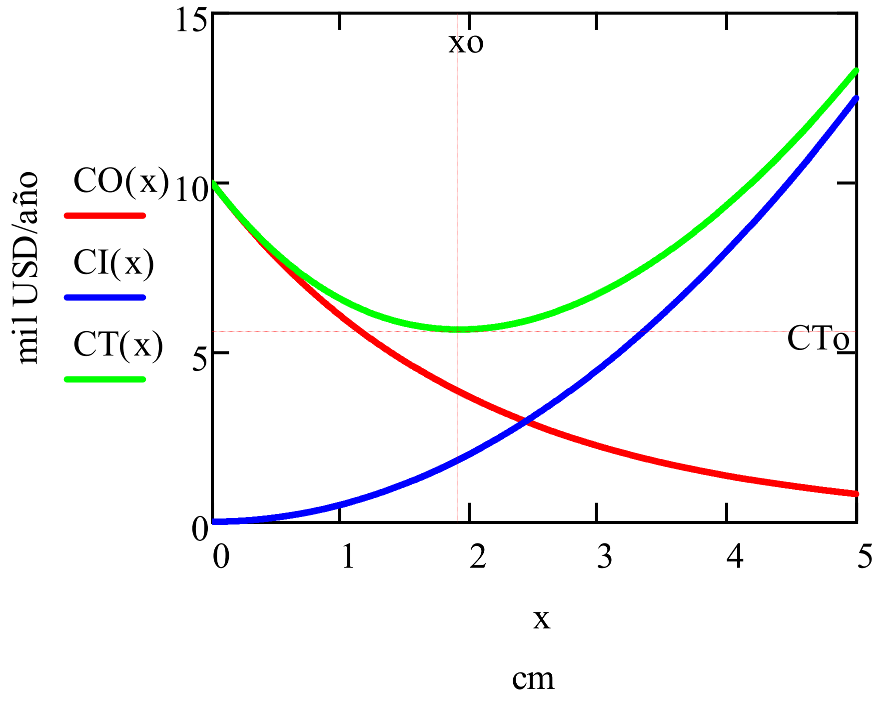
Pistas: *trade-off*

- Descubrir efectos que se opongan entre sí (*trade-off*):
  - Espesor de aislante, $x(+)$
  - Costo de instalación, $CI(+)$
  - Costo de operación $CO(-)$



Pista: valores extremos

- Descubrir una variable cuyos valores extremos conducen a situaciones inconvenientes:
  - x =1 m, *CI* alto, *CO* bajo
  - x =1 mm, *CI* bajo, *CO* alto

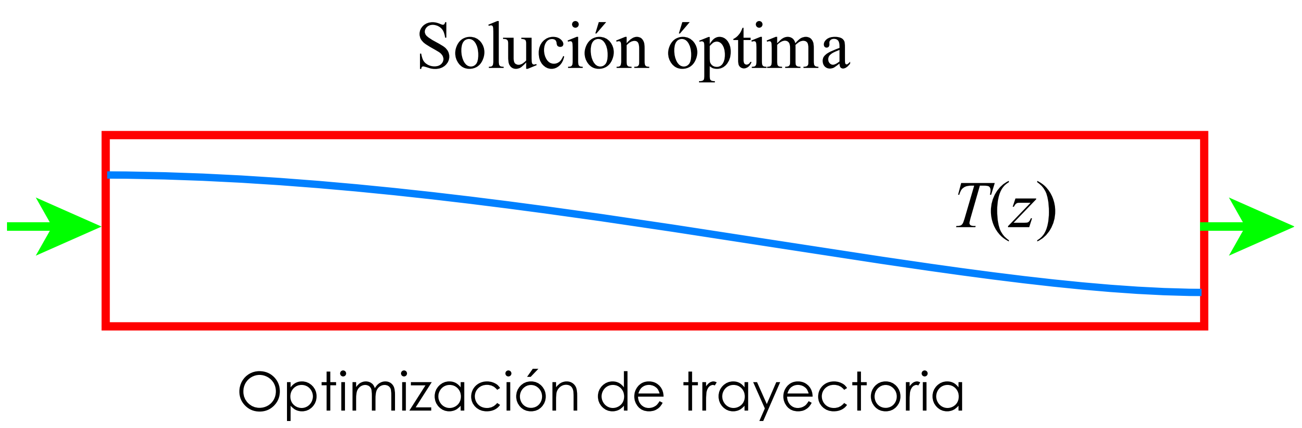


Etapas de la optimización

Etapas de la optimización

1. Definir el sistema a optimizar.
2. Determinar el criterio de optimización $\rightarrow$ la función objetivo.
3. Modelar el sistema $\rightarrow$ las restricciones.
4. Aplicar un método matemático adecuado.
5. Verificar la solución. Condiciones de optimalidad.
6. Analizar la sensibilidad de la solución con respecto a los parámetros y suposiciones.
7. Implementación.

Implementación



Fábrica de contenedores

Fábrica de contenedores

Para una planta que produce contenedores de plástico, la demanda anual es de $Q = 1110$ contenedores distribuida homogéneamente a lo largo del año a precio fijo. Determinar el *schedule* de producción. La producción se puede considerar instantánea.

Fábrica de contenedores

- Valores extremos:
  - Si se produce todo a principio de año, el costo de inventario será grande.
  - Si se produce al mismo ritmo que la demanda, la planta se pondrá en marcha y se detendrá muchas veces. El costo de operación será alto.
- Debe existir una cantidad óptima de ciclos n de operación por año para satisfacer la demanda Q.
- En cada ciclo, se producirán D contenedores. Es una cantidad entera.

Fábrica de contenedores

- Criterio: Económico
- Función objetivo:
  - Costo de inventario (\$/año): $k_1 D$
  - Costo de producción por ciclo (\$/ciclo): $k_2 + k_3 D$
  - Costo total (\$/año): $C = k_1 D + n(k_2 + k_3 D\ )$
- Restricción:
  - Cantidad de ciclos necesarios: $n = \frac{Q}{D}$

Fábrica de contenedores

- Parámetros:
  - Q: Total de unidades producidas por año (contenedor/año).
  - k_1, k_2 y k_3: Constantes de costo.
- Variables de decisión:
  - C: Costo total anual ($/año).
  - D: Número de unidades producidas en cada ciclo, es un número entero (contenedor/ciclo).
  - n: Ciclos por año (puesta en marcha, parada y venta de D), no es necesariamente entera (ciclo/año).

Fábrica de contenedores

$$\underset{C,D,n}{\text{Min}}\, C$$

s. a:

$$C = k_1 D + n\left(k_2 + k_3 D\right)$$

$$n = \frac{Q}{D}$$

$$D \in \mathbb{N}$$

$$C \geq 0$$

$$n \geq 0$$

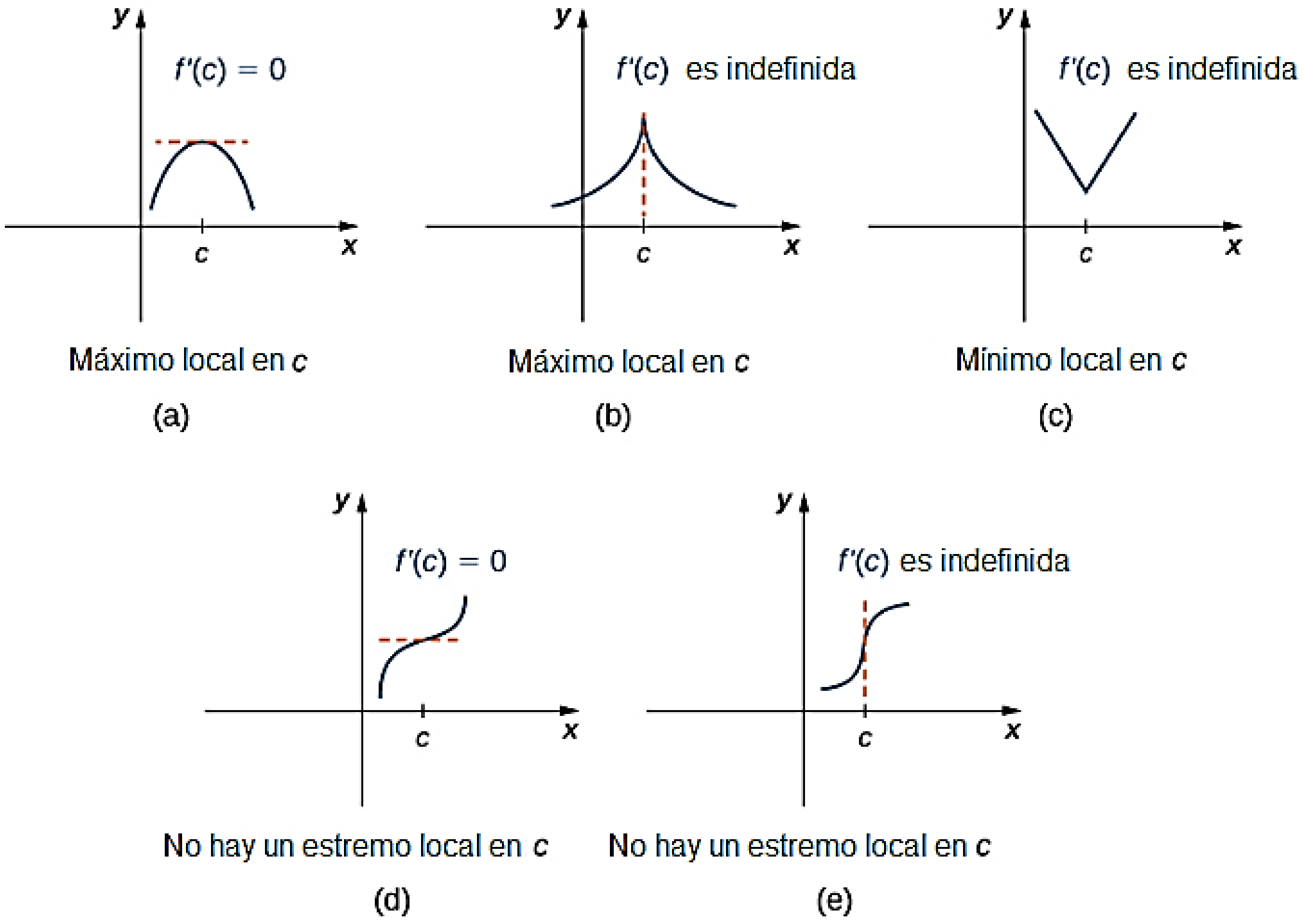
Q, k_1, k_2 y k_3 → → C, D y n

GL = 3-2 = 1

Solución analítica

Solución analítica

- Punto crítico:
  - $\frac{df}{dx} = 0$ o no existe.
- Punto extremo:
  - $\frac{d^2f}{dx^2} > 0$, mínimo
  - $\frac{d^2f}{dx^2} < 0$, máximo



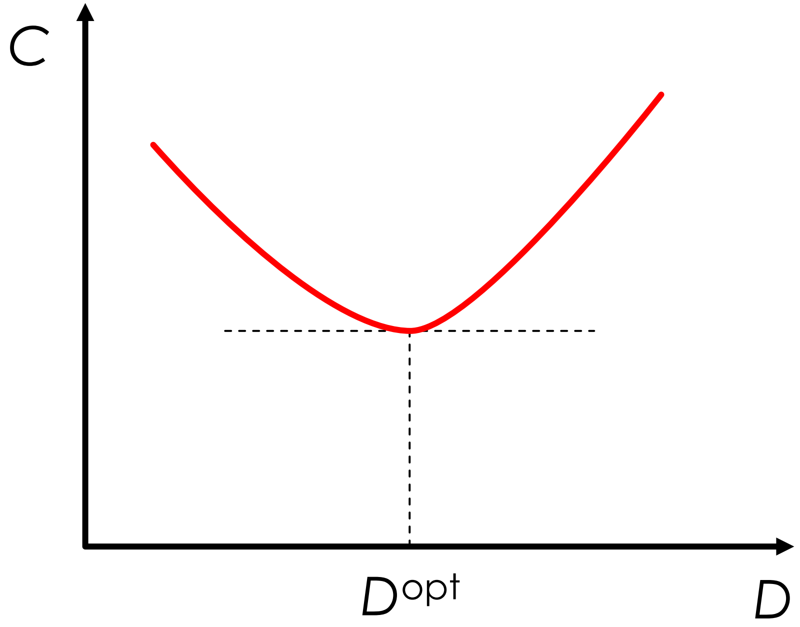
Fábrica de contenedores

- Eliminando *n*: $C = k_1 D + \dfrac{k_2 Q}{D} + k_3 Q$
- Resolución analítica:

$$\frac{dC}{dD} = k_1 - \frac{k_2 Q}{D^2} = 0$$

$$D^{\text{opt}} = \sqrt{\frac{k_2 Q}{k_1}}$$

$$\frac{d^2 C}{dD^2} = \frac{2 k_2 Q}{D^3} = 2\sqrt{\frac{k_1^3}{k_2 Q}} > 0$$



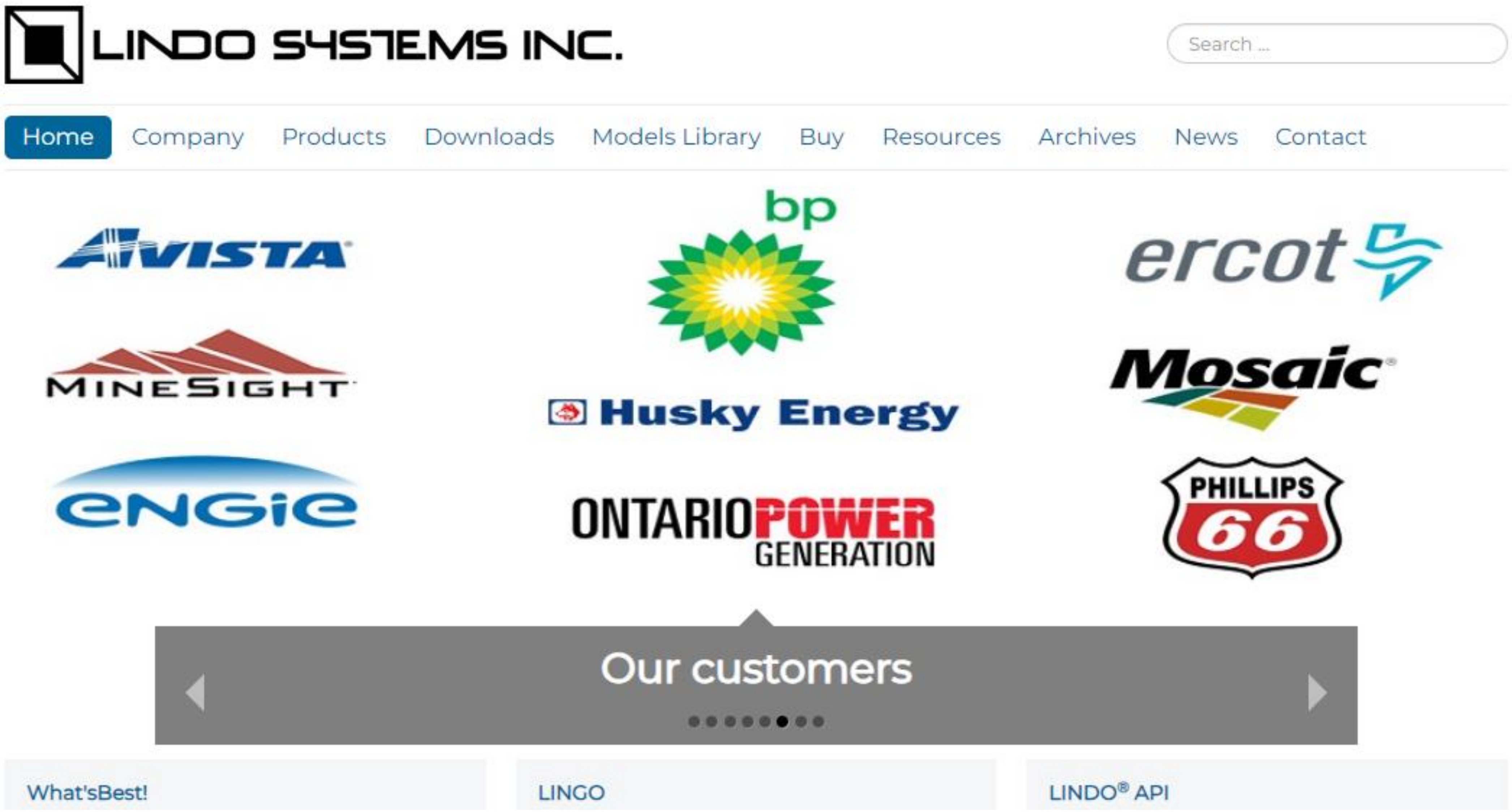
Fábrica de contenedores

- Análisis: No depende de k_3. Si se modifica Q, D^{opt} varía con la raíz cuadrada $\rightarrow$ heurístico.

$$D^{opt} = \sqrt{\frac{k_2 Q}{k_1}}$$

Fábrica de contenedores

- Datos:
  - Q = 1110 contenedor/año
  - k_1 = 10000 \$·ciclo/(año·contenedor)
  - k_2 = 1000 \$/ciclo
  - k_3 = 50 \$/contenedor



https://www.lindo.com

LINGO

- No distingue minúsculas de mayúsculas.
- Supone que las variables de decisión son no negativas.
- Considera a las desigualdades estrictas iguales a las desigualdades no estrictas: $X < 10 \Leftrightarrow X \leq 10$.
- @LOG es el logaritmo natural.

LINGO

- Los comentarios comienzan con “!”.
- Las líneas finalizan con “;”.
- Los nombres de las ecuaciones deben ser distintos que los nombres de las variables:
  - [FO]: Función objetivo.
  - [RX]: Restricción de la variable X.

Modelo en LINGO

Asignaciones

Ecuaciones

Lingo Model - Contenedores

```
! Fábrica de contenedores
n: ciclo/año
D: contenedor/ciclo
C: $/año;

Data:
  K1 = 10000; ! $*ciclo/(año*contenedor);
  K2 = 1000;  ! $/ciclo;
  K3 = 50;    ! $/contenedor;
  Q = 1110;   ! contenedor/año;
EndData

[FO] Min = C;
[RC] C = K1*D+n*(K2+K3*D);
[Rn] n*D = Q;
[RD] @gin(D);
```

Extensión lg4

Contenedores.lg4

Resultados en LINGO

Variable	Value	Reduced Cost
K1	10000.00	0.000000
K2	1000.000	0.000000
K3	50.00000	0.000000
Q	1110.000	0.000000
C	266409.1	0.000000
D	11.00000	826.4446
N	100.9091	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
FO	266409.1	-1.000000
RC	0.000000	-1.000000
RN	0.000000	-140.9091

Deben ser no negativos.

Extensión lgr

Fábrica de contenedores

Datos

- Q = 1110 contenedor/año
- k_1 = 10000 \$·ciclo/(año·contenedor)
- k_2 = 1000 \$/ciclo
- k_3 = 50 \$/contenedor

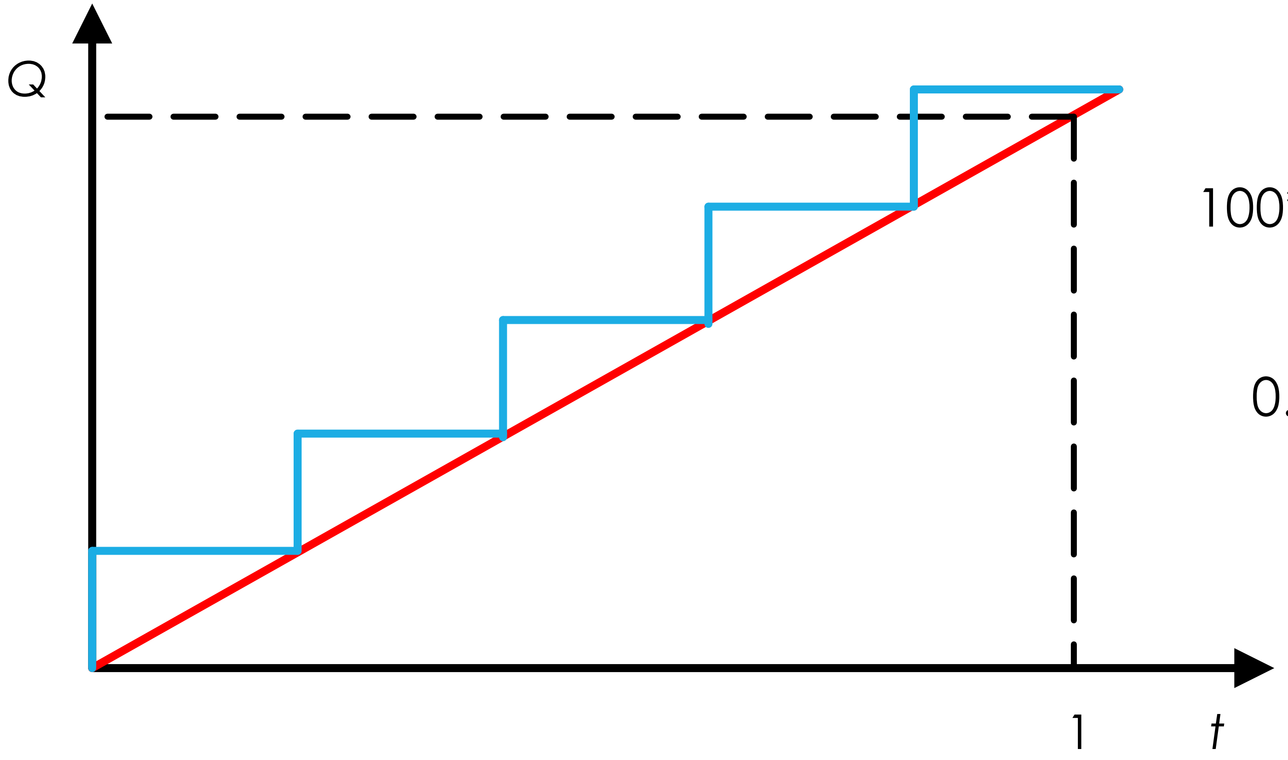
Solución

- Con *D* libre:
  - C = 266213.1 \$/año
  - D = 10.54 contenedor
  - n = 105.36 ciclo
- Con *D* natural:
  - C = 266409.1 \$/año
  - D = 11 contenedor
  - n = 100.91 ciclo

Demanda acumulada

Q = 1110 contenedor/año
C = 266409.1 \$/año
D = 11 contenedor
n = 100.91 ciclo

Cada escalón es un ciclo.



$100*11+10 = 1110$

$0.9091 \times 11 = 10$