Simulación y Optimización

Optimización Introducción Parte I

Enrique E. Tarifa, Facultad de Ingeniería, UNJu

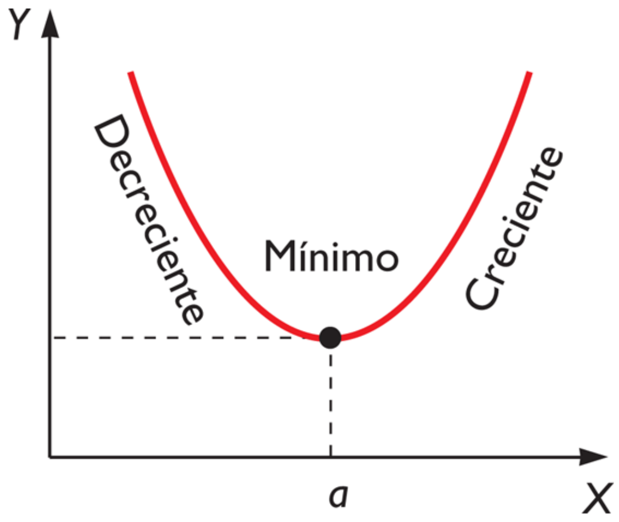
Definiciones

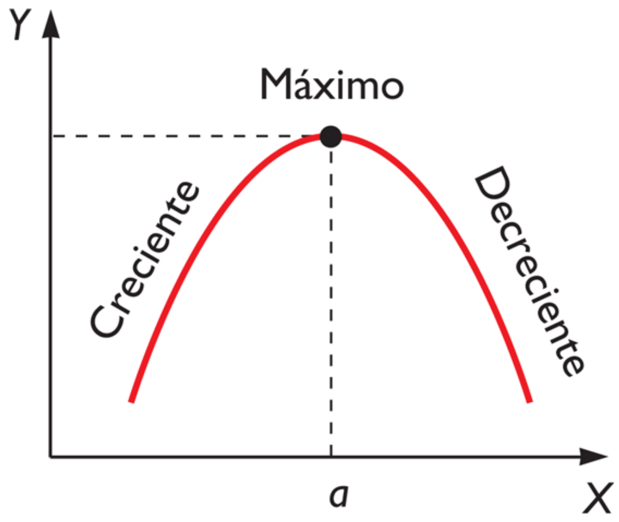
Concepto de optimización

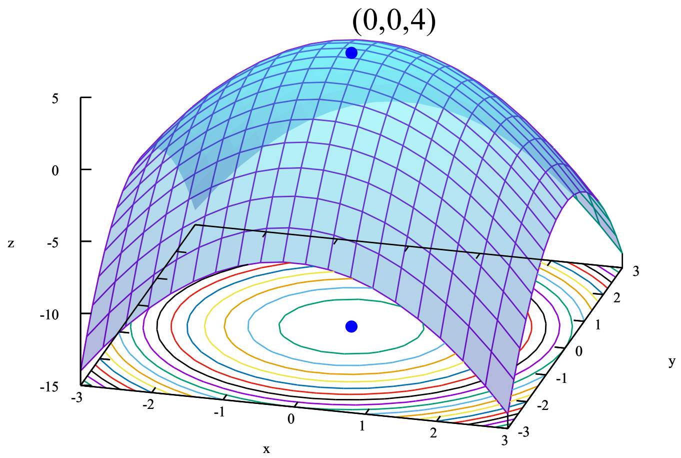
- “Para definirlo crudamente pero no inapropiadamente, la ingeniería es el arte de hacer bien con un dólar aquello que cualquier chapucero haría con dos dólares” (Wellington, 1900).
- En ingeniería, no basta con hacer una cosa, sino que hay que hacerla de la mejor forma posible.
- Optimizar es hacer lo mejor que se pueda dentro de lo posible.

Concepto de optimización

Maximizar o minimizar una función, cumpliendo con algunas restricciones.



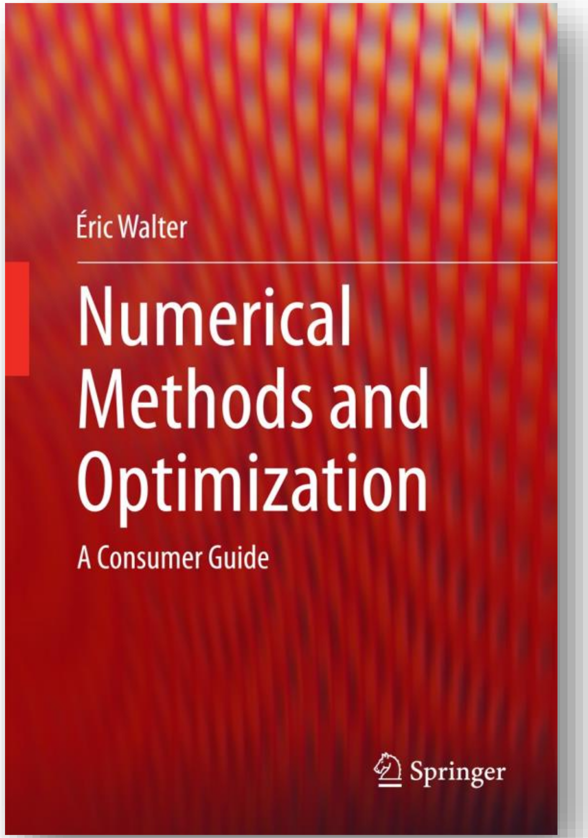


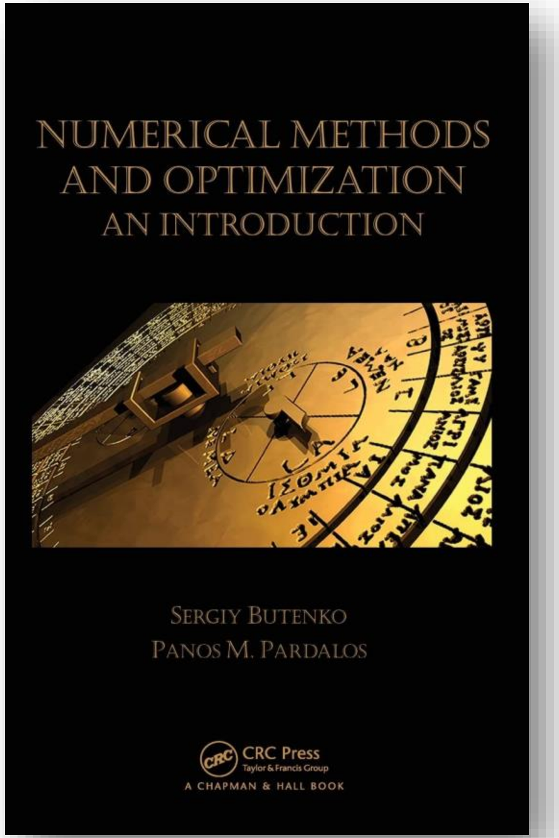


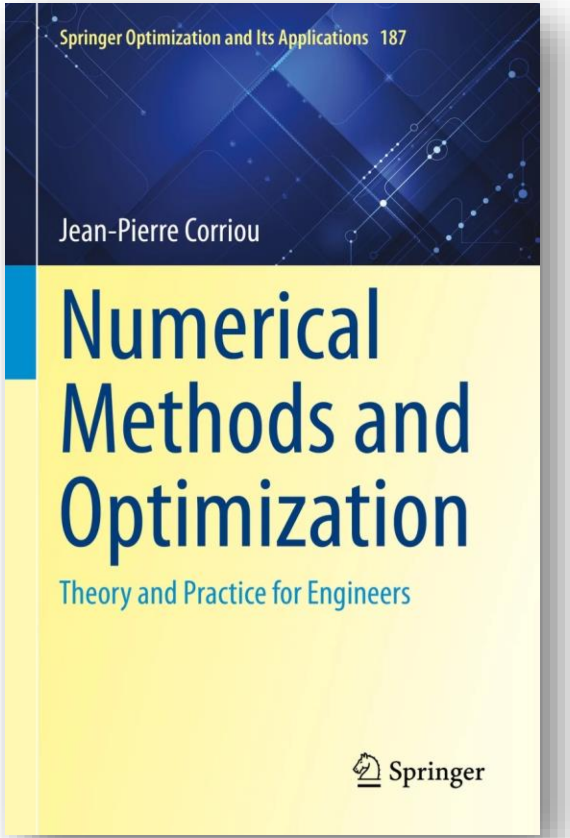
Etapas de la optimización

1. Especificación del problema
2. Formulación del modelo
3. Resolución del modelo
4. Verificación de las condiciones de optimalidad
5. Análisis de sensibilidad

Resolución del modelo







Curso de Stanford

Mathematical Optimization

- Unit 1: Introductory Topics
- Unit 2: Unbounded Optimization Without Calculus
- Unit 3: Linear Programming
- Unit 4: Unbounded Optimization With Calculus
- Unit 5: Constrained Optimization With Calculus)

Mathematical Optimization is a high school course in 5 units, comprised of a total of 56 lessons. The first three units are non-Calculus, requiring only a knowledge of Algebra; the last two units require completion of Calculus AB. All of the units make use of the Julia programming language to teach students how to apply basic coding techniques to solve complex and relevant mathematical problems.

The curriculum has complementary IJulia notebooks for all lessons involving programming (and some that do not).

These lessons in Mathematical Optimization were written in 2014 by Julia Roberts, a math teacher at Cupertino High School in the Fremont Union High School District, in conjunction with Dr. Mykel Kochenderfer, professor of Aeronautics and Astronautics at Stanford University, through a grant from the National Science Foundation. They were edited, updated, and turned into Julia notebooks in 2015 by Renee Trochet, a math teacher at Eastside College Preparatory in East Palo Alto, also in conjunction with Dr. Kochenderfer and funded by the NSF.

The goals of these lessons are:

- to increase exposure of high school students to current topics of interest in mathematics, including optimization and the use of programming as a tool
- to increase the number and variety of students interested in STEM fields
- to provide students with better preparation for future studies in STEM fields.

Introduction and Acknowledgements

Unit 1: Introductory Topics

This unit introduces the foundational concepts of optimization, iteration, and recursion, as well as laying groundwork with introductory topics like vectors, secant method, Fibonacci numbers, and three-point intervals. It introduces students to the Julia language including

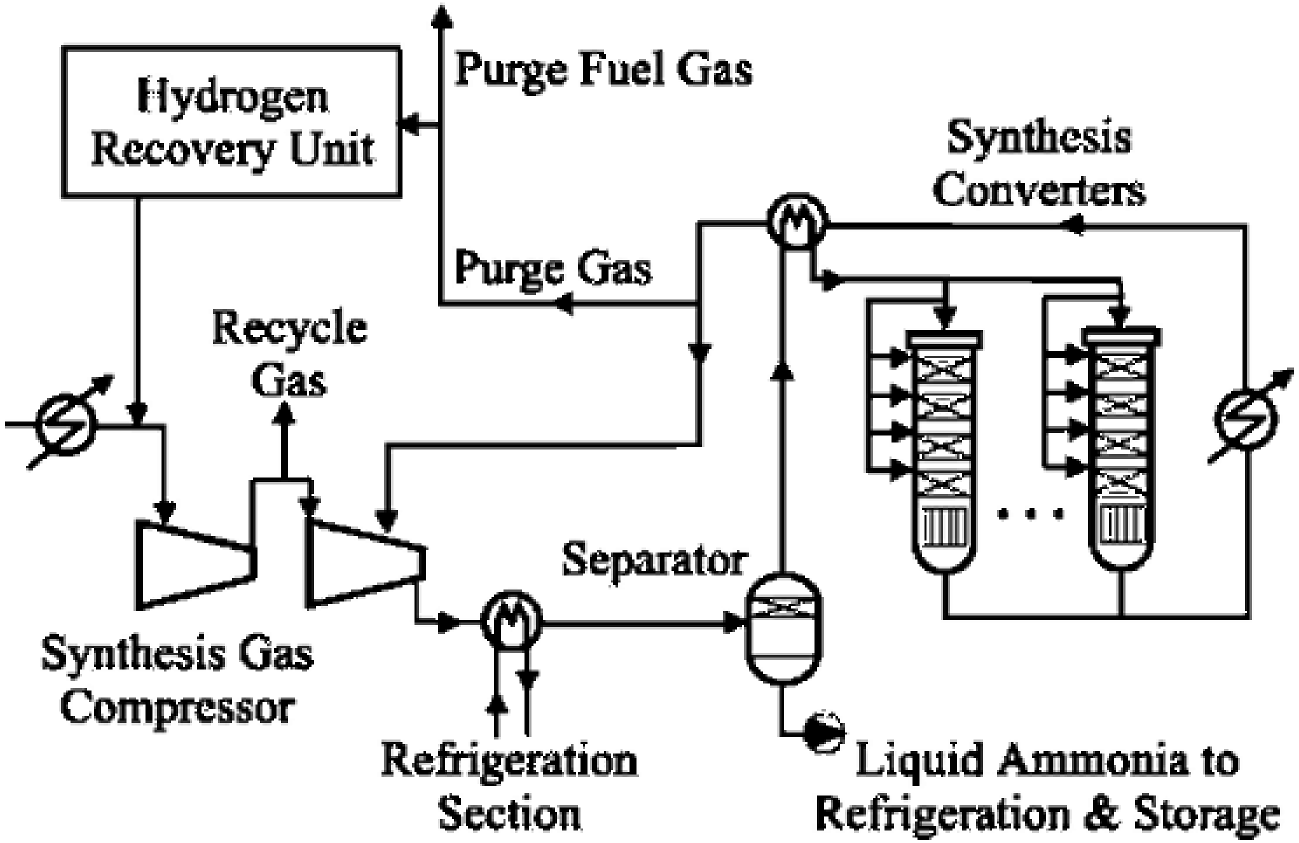
Curso de optimización

Verificación de la optimalidad

- Verificación de una raíz, $f(x_0) = 0$.
- Verificación de un óptimo, $f(x_0) = \text{mínimo}$.

Planta de NH_3

- Reciclo
- Purga
- Integración energética



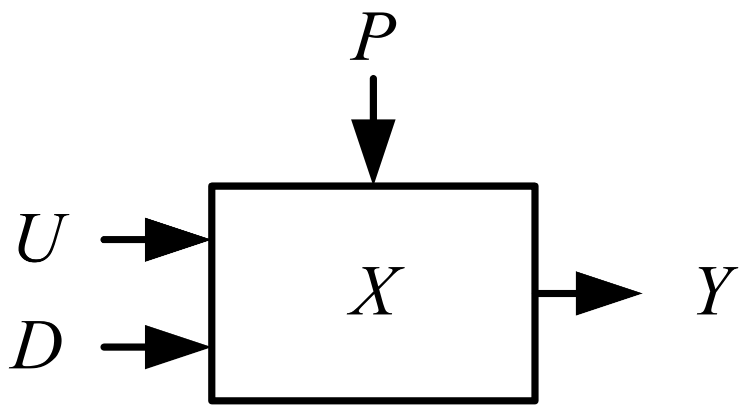
Campos de aplicación

- Gerenciamiento
- Diseño de procesos
- Diseño de equipos
- Control de procesos
- Operación de la planta
- Comercialización

Toma de decisiones

Clasificación de variables

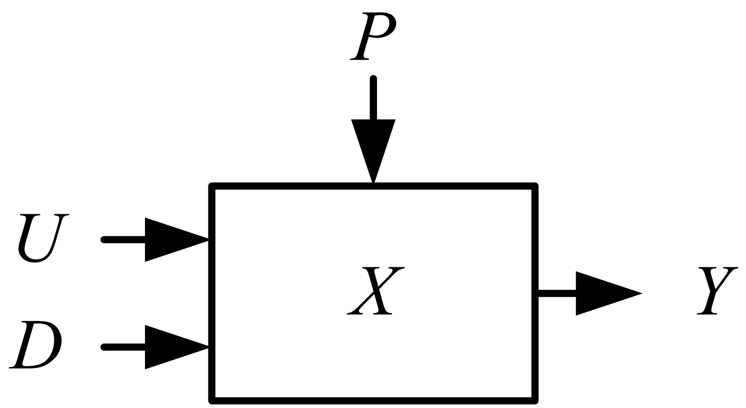
- Parámetros (*P*)
- Variables de entrada:
  - Manipulables (*U*)
  - Perturbación (*D*)
- Variables de salida (*Y*)
- Variables internas (*I*)
- Variables de estado ($X \subseteq I$)



Una variable es un símbolo que se usa para designar valores.

Clasificación de variables

- Diseño: Fijar P y proveer U para atenuar D y obtener el Y deseado.
- Especificación: Similar a diseño.
- Operación: Fijar U para inicializar X y atenuar D para obtener el Y deseado.
- Supervisión: Observar Y, estimar X.



Toma de decisiones

Modelo de optimización

Optimizar

Obtener el mejor {Objetivo}

Acciones

s. a (sujeto a):

Alternativas $\in$ {posible, práctico}

Solución: Alternativa óptima y el valor del objetivo

Modelo de optimización

Operador de optimización $\underset{X}{\text{Max}}\, FO(X)$ Función objetivo

Variable de decisión

s. a:

Restricciones

$$H(X) = 0$$

$$G(X) \leq 0$$

→ X^{opt}, $FO(x^{opt})$

- $GL = n\text{-}m > 0$
- n: incógnitas
- m: igualdades

Función objetivo

Función objetivo

Operadores: Max y Min

Criterios	Función objetivo
Económico	Beneficios, costos, retorno de capital, TIR, VAN
Técnico	Nivel de producción, tiempo de producción, utilización de servicios, calidad del producto
De seguridad	Probabilidad de accidentes, consecuencias de accidentes, riesgo
Ambiental	Concentración de contaminantes, caudal de efluentes, consumo de recursos naturales
Personal	Utilidad

Problema multicriterio

- Plantear un problema con múltiples funciones objetivo.
- Resolver secuencialmente.
- Plantear una función objetivo combinada.
- Convertir los objetivos secundarios en restricciones.

$$FO(X) = \sum_{k=1}^{l} w_k r_k FO_k(X)$$

$$\sum_{k=1}^{l} w_k = 1$$

- *r*: factor de conversión de unidades.
- w: peso.

Restricciones

Restricciones

- Son tan importantes como la función objetivo.
- $\min_{x} costo \rightarrow \text{cierre de planta}$
- $\max_{x} seguridad \rightarrow \text{cierre de planta}$

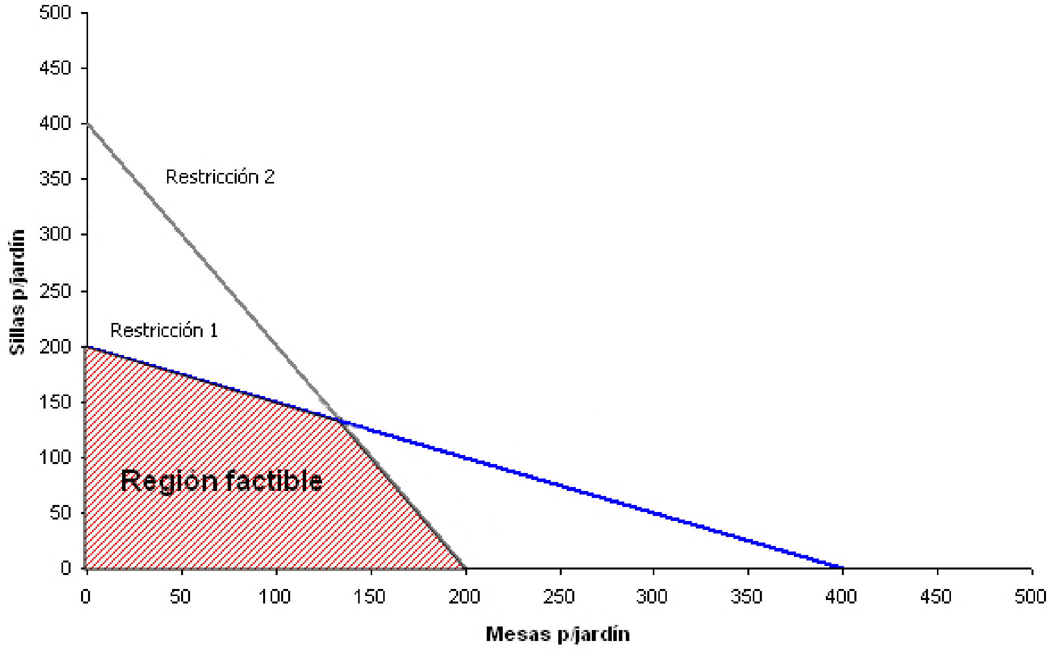
Restricciones

- Naturaleza del sistema (lo posible)
  - Modelo de simulación del sistema
  - Región de validez del modelo de simulación
- Criterios ingenieriles (lo práctico)

Región factible

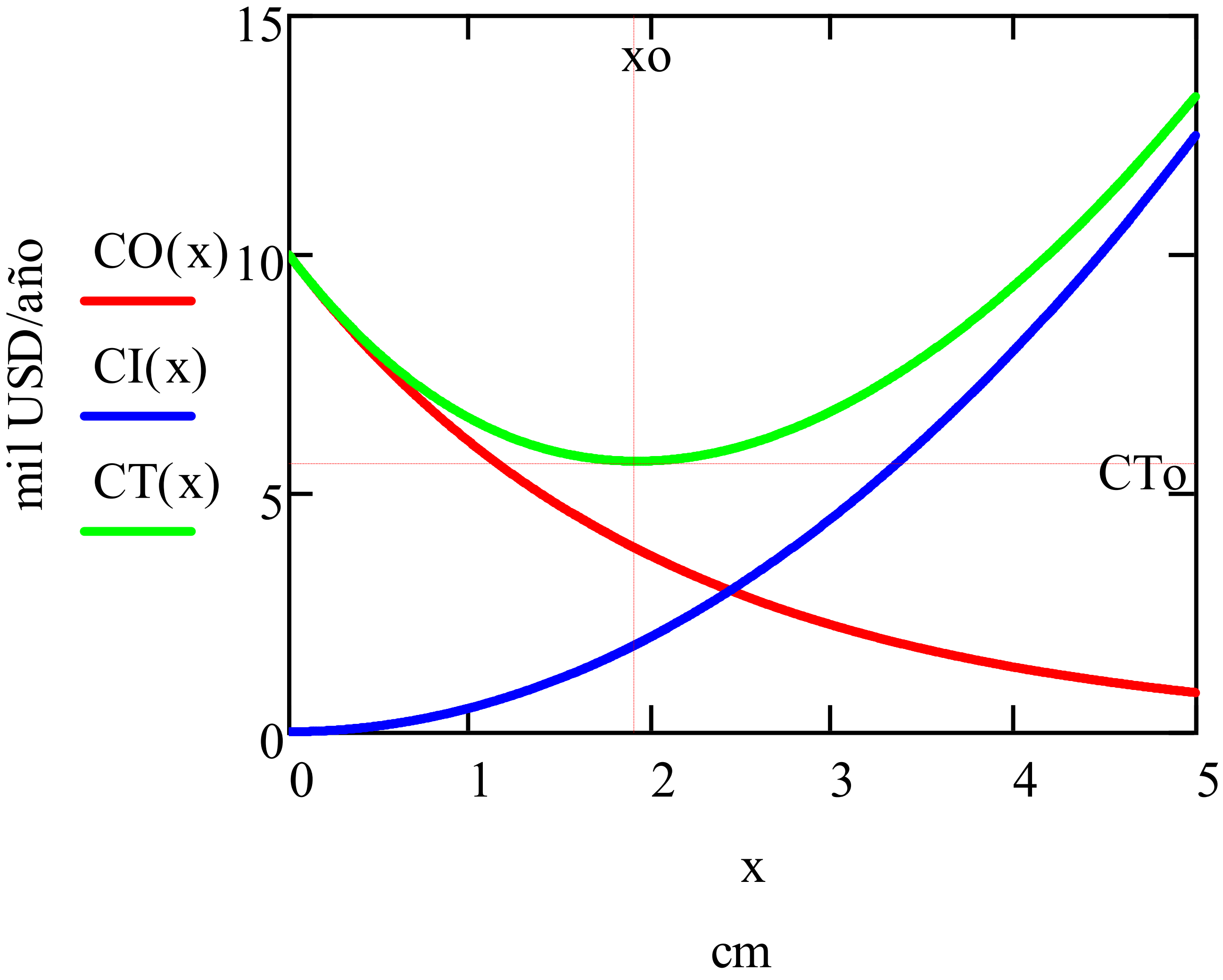
Región factible

- Es la región formada por todos los *X* que satisfacen a todas las restricciones.
- El punto óptimo es un punto de la región factible que maximiza o minimiza a la función objetivo.



Espesor de capa aislante

Espesor de capa aislante



x^{O} = 1.92 cm y CT^{O} = 5.67 mil USD/año

Modelo de optimización

$$\underset{X}{\text{Max}}\, FO(X)$$

s. a:

$$H(X) = 0$$

$$G(X) \leq 0$$

$$\underset{x}{\text{Min}}\, CT(x)$$

s. a:

$$x \geq 0$$

x^{opt}, $CT(x^{opt})$

Restricciones

- La temperatura externa debe ser mínima.
- La temperatura externa debe ser menor que 60 °C $\Rightarrow$ x^T.
- Distancia mínima a la pared $\Rightarrow$ x^P.

$$\min_x CT(x)$$

$$\min_x T(x)$$

s. a:

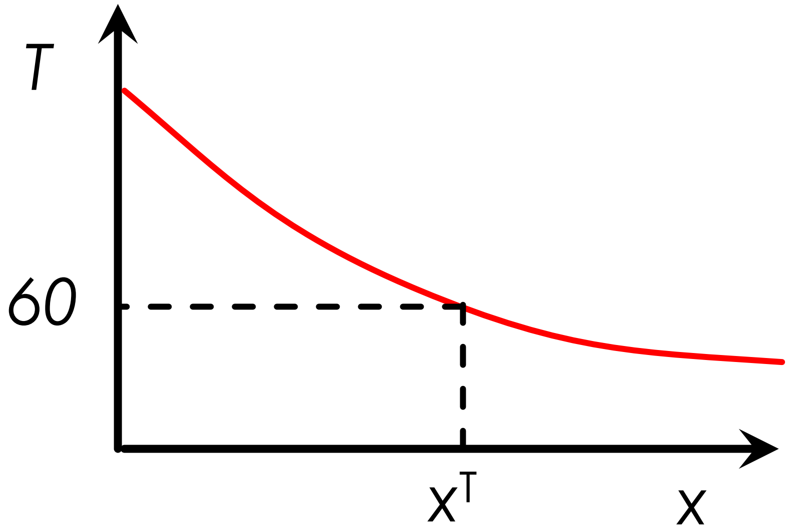
$$x \geq 0$$

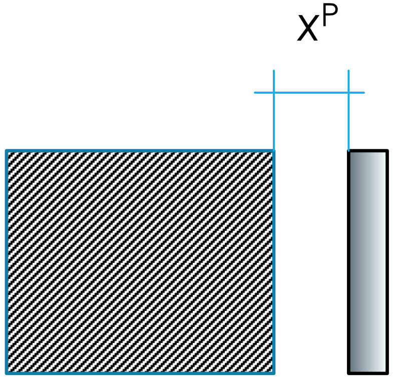
$$\min_x CT(x)$$

s. a:

$$x \geq 0$$

$$\cancel{T(x) \leq 60}$$





$$x \geq x^T$$

$$x \leq x^P$$

Modelo de optimización

$$\underset{x}{\text{Min}}\, CT(x)$$

s. a:

$$x \geq x^{\text{T}}$$

$$x \leq x^{\text{P}}$$

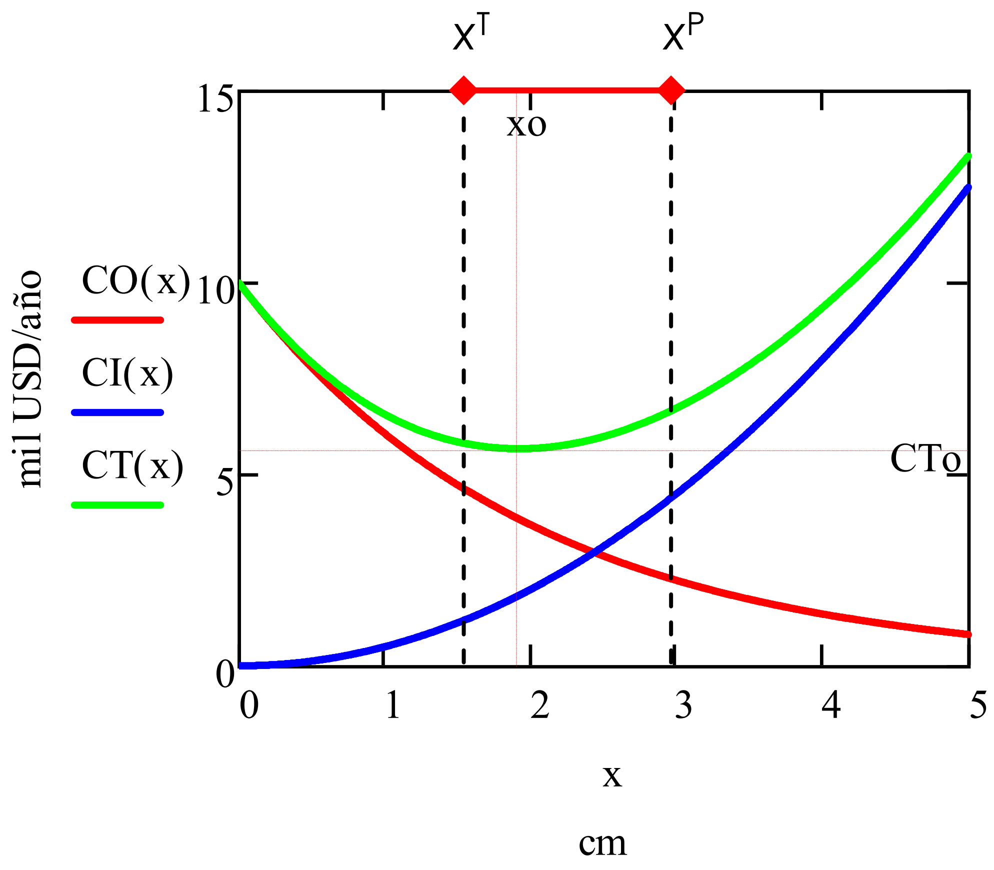
La región factible es el intervalo $[x^T, x^P]$.

Efectos de las restricciones

- $x^T < x^O < x^P$: el óptimo sigue siendo x^O.
- $x^P < x^O$: el óptimo es x^P.
- $x^O < x^T$: el óptimo es x^T.
- $x^P < x^T$: no tiene región factible.

$$x \geq x^T = 5$$

$$x \leq x^P = 2$$



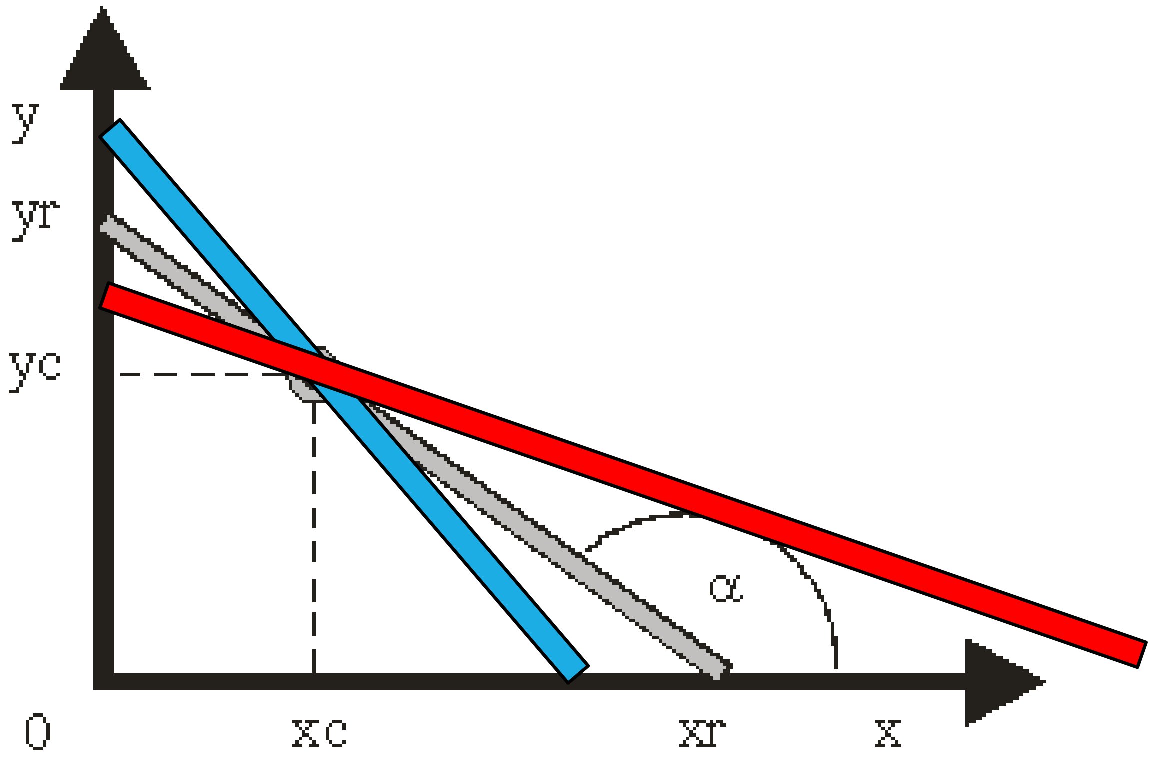
Efectos de las restricciones

Al agregar una restricción, la solución óptima no cambia o empeora o deja de existir.

Instalación de una viga

Problema de la viga

Determinar la viga de longitud mínima que pase por el punto de carga (2 m, 3 m).



Modelo de optimización

$$\underset{xr,yr,l}{\text{Min}}\ l$$

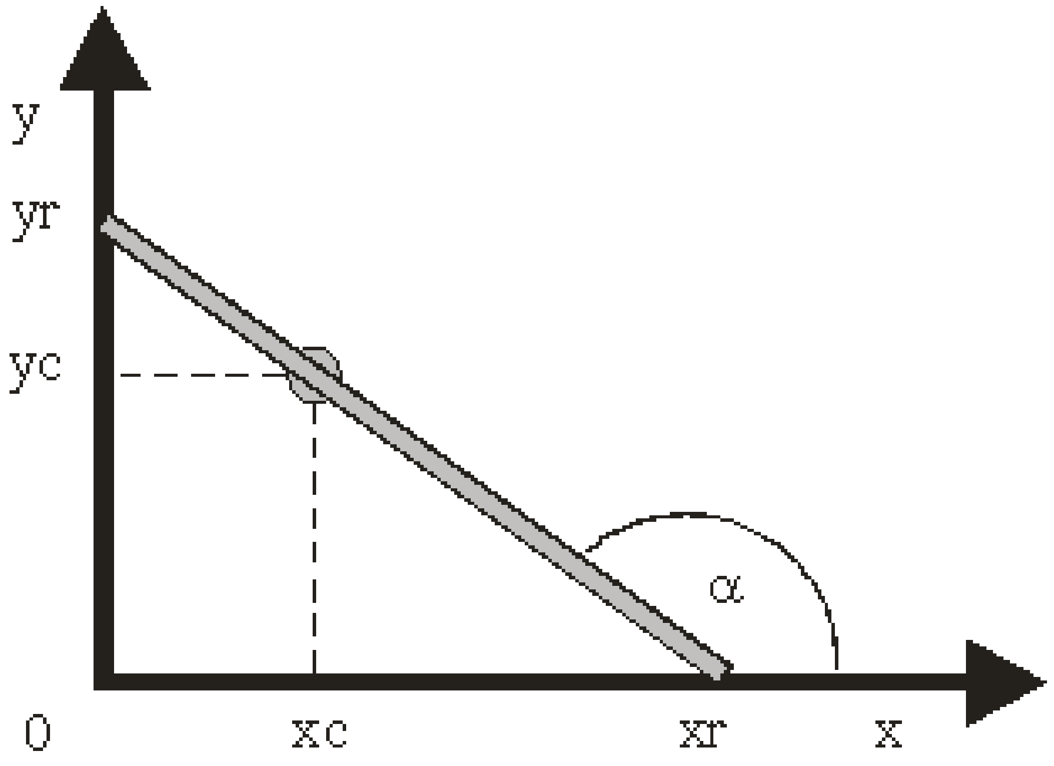
s. a:

$$\frac{yr}{xr} = \frac{yc}{xr - xc}$$

$$l = \sqrt{xr^2 + yr^2}$$

$$xc \le xr$$

$$yc \le yr$$



Instalación de una viga con xr.xlsx

Modelo estándar

Modelo estándar de la instalación de una viga

FO		Variables			Parámetros	
5		xr	3		xc	2
		yr	4		yc	3
		l	5			

MI	Tipo	MD
1.3333333	=	3
5	=	5
2	<=	3
3	<=	4

$$\min_{xr,yr,l} l$$

s. a:

$$\frac{yr}{xr} = \frac{yc}{xr - xc}$$

$$l = \sqrt{xr^2 + yr^2}$$

$$xc \le xr$$

$$yc \le yr$$

1 2 3 4

Modelo estándar | Modelo estándar var | Modelo de estado

Modelo estándar

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Modelo estándar**							
2								
3	**FO**		**Variables**			**Parámetros**		
4	=D6		xr	3		xc	2	
5			yr	4		yc	3	
6			l	5				
7								
8	**MI**	**Tipo**	**MD**					
9	=D5/D4	=	=G5/(D4-G4)					
10	=D6	=	=RAIZ(D4^2+D5^2)					
11	=G4	<=	=D4					
12	=G5	<=	=D5					
13								
14								
15								
16								
17								
18								

Modelo estándar | Modelo estándar var | Modelo de estado

$$\min_{xr,yr,l} l$$

s. a:

$$\frac{yr}{xr} = \frac{yc}{xr - xc}$$

$$l = \sqrt{xr^2 + yr^2}$$

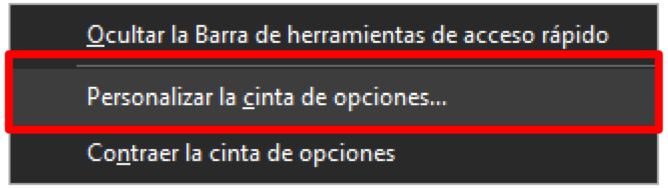
$$xc \leq xr$$

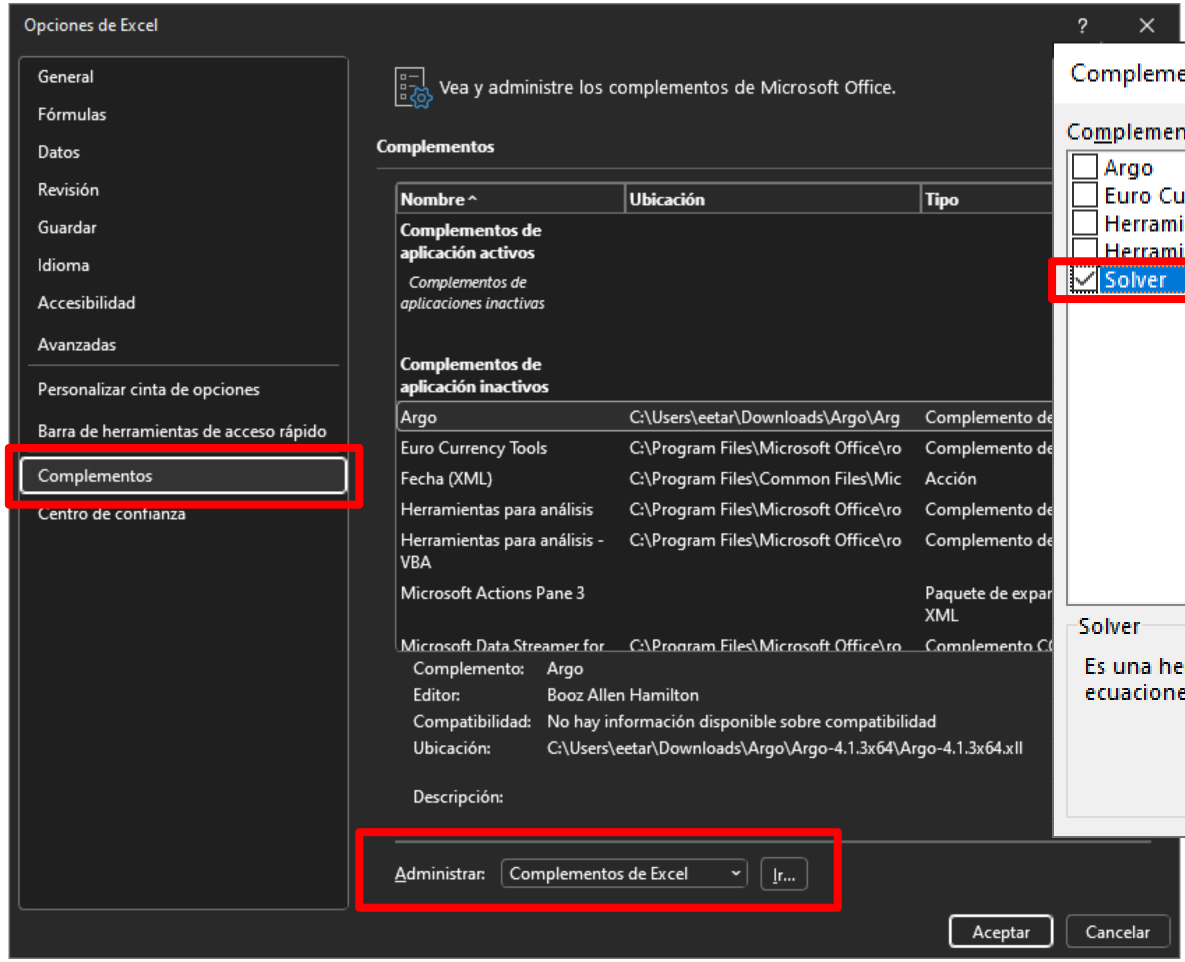
$$yc \leq yr$$

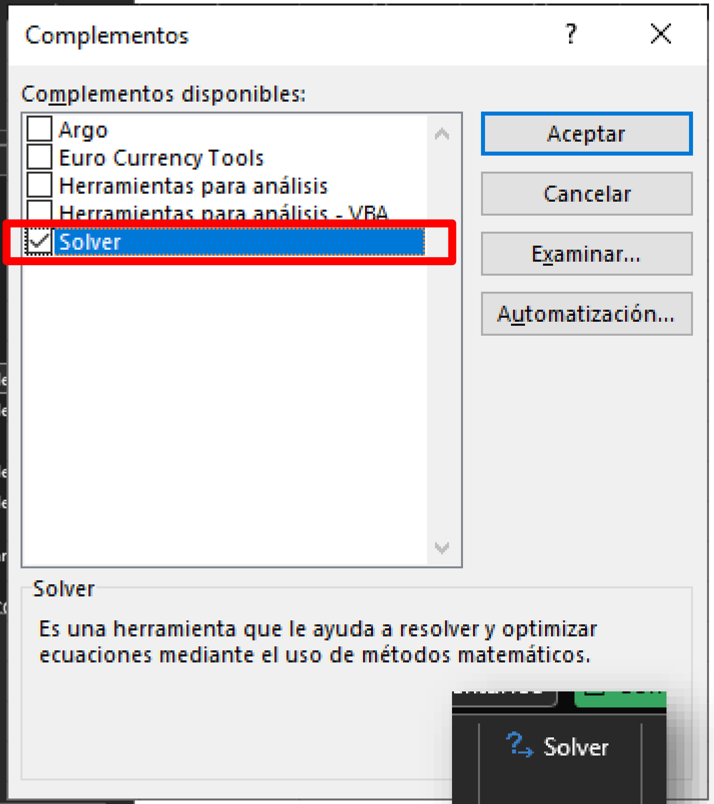
Instalación de Solver en Excel

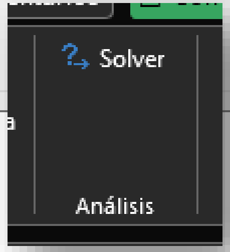
1. En un espacio vacío de la cinta, hacer clic con el botón derecho.
2. Seleccionar "Personalizar la cinta de opciones…".
3. En el lado izquierdo de la ventana que se abre, seleccionar "Complementos".
4. En la parte central inferior de la ventana, en "Administrar", seleccionar "Complementos de Excel", y hacer clic en el botón "Ir…".
5. En el formulario que se abre, activar Solver.
6. Solver aparecerá en el extremo derecho de la cinta "Datos".

Instalación de Solver en Excel

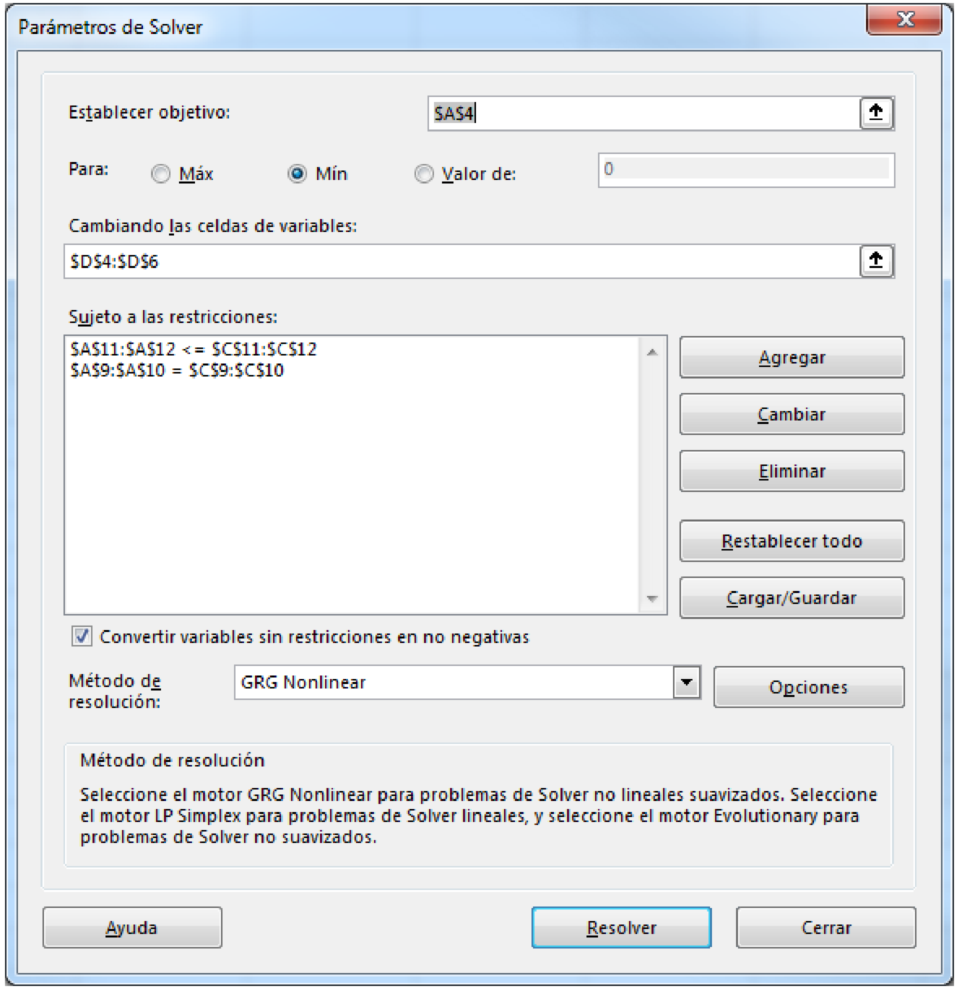








Solver para el modelo estándar



Modelo estándar

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Modelo estándar (**						
2							
3	**FO**		**Variables**			**Parámetros**	
4	=l		xr	4.61966221013412		xc	2
5			yr	5.29037123114334		yc	3
6			l	7.02348236768968			
7							
8	**MI**	**Tipo**	**MD**				
9	=yr/xr	=	=yc/(xr-xc)				
10	=l	=	=RAIZ(xr^2+yr^2)				
11	=xc	<=	=xr				
12	=yc	<=	=yr				

$$\min_{xr,yr,l} l$$

s. a:

$$\frac{yr}{xr} = \frac{yc}{xr - xc}$$

$$l = \sqrt{xr^2 + yr^2}$$

$$xc \leq xr$$

$$yc \leq yr$$

Modelo estándar | Modelo estándar var | Modelo de estado

Modelo estándar

- n = 3 (xr, yr, l)
- Solo las igualdades.
- m = 2
- GL debe ser positivo.
- $GL = n\text{-}m$ = 3-2 = 1

$$\underset{xr,yr,l}{\mathrm{Min}}\; l$$

s. a:

$$\frac{yr}{xr} - \frac{yc}{xr - xc} = 0$$

$$l^2 - xr^2 - yr^2 = 0$$

$$xc - xr \le 0$$

$$yc - yr \le 0$$

Implementación en Mathcad

$$\min_{xr,yr,l} l$$

s. a:

$$\frac{yr}{xr} - \frac{yc}{xr - xc} = 0$$

$$l^2 - xr^2 - yr^2 = 0$$

$$xc - xr \le 0$$

$$yc - yr \le 0$$

Instalación de una viga xr.xmcd

Datos:

$xc := 2 \cdot m$

$yc := 3 \cdot m$

$lmax := 10 \cdot m$

Función objetivo:

$fo(xr, yr, l) := l$

Inicialización:

$xr := 1.1xc$

$yr := 1.1yc$

$l := \sqrt{xr^2 + yr^2}$

Restricciones:

Given

$\frac{yr}{xr} - \frac{yc}{xr - xc} = 0$

$l^2 - xr^2 - yr^2 = 0$

$xc - xr \le 0$

$yc - yr \le 0$

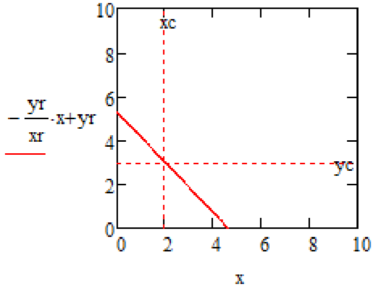
$\begin{pmatrix} xr \\ yr \\ l \end{pmatrix} := \mathrm{Minimize}(fo, xr, yr, l)$

Solución:

$xr = 4.621\,m$

$yr = 5.29\,m$

$l = 7.023\,m$



Modelo de estado

$$\underset{xr}{\text{Min}}\, l$$

$$yr \leftarrow \frac{yc}{xr - xc} xr$$

$$l \leftarrow \sqrt{xr^2 + yr^2}$$

s. a:

$$xc \leq xr$$

$$yc \leq yr$$

Instalación de una viga con xr.xlsx

Modelo de estado

Modelo de estado de la instalación de una viga

FO		Variables			Parámetros	
33.073252		xr	2.2		xc	2
		yr	33		yc	3
		l	33.073252			

MI	Tipo	MD
2	<=	2.2
3	<=	33

$$\min_{xr} l$$

$$yr \leftarrow \frac{yc}{xr - xc} xr$$

$$l \leftarrow \sqrt{xr^2 + yr^2}$$

s. a:

$$xc \leq xr$$

$$yc \leq yr$$

Modelo estándar | Modelo estándar var | Modelo de estado

Modelo de estado

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Modelo de estado**							
2								
3	**FO**		**Variables**			**Parámetros**		
4	=D6		xr	2.2		xc	2	
5			yr	=G5/(D4-G4)*D4		yc	3	
6			l	=RAIZ(D4^2+D5^2)				
7								
8	**MI**	**Tipo**	**MD**					
9								
10								
11	=G4	<=	=D4					
12	=G5	<=	=D5					
13								
14								
15								
16								
17								
18								

$$\operatorname*{Min}_{xr} l$$

$$yr \leftarrow \frac{yc}{xr - xc} xr$$

$$l \leftarrow \sqrt{xr^2 + yr^2}$$

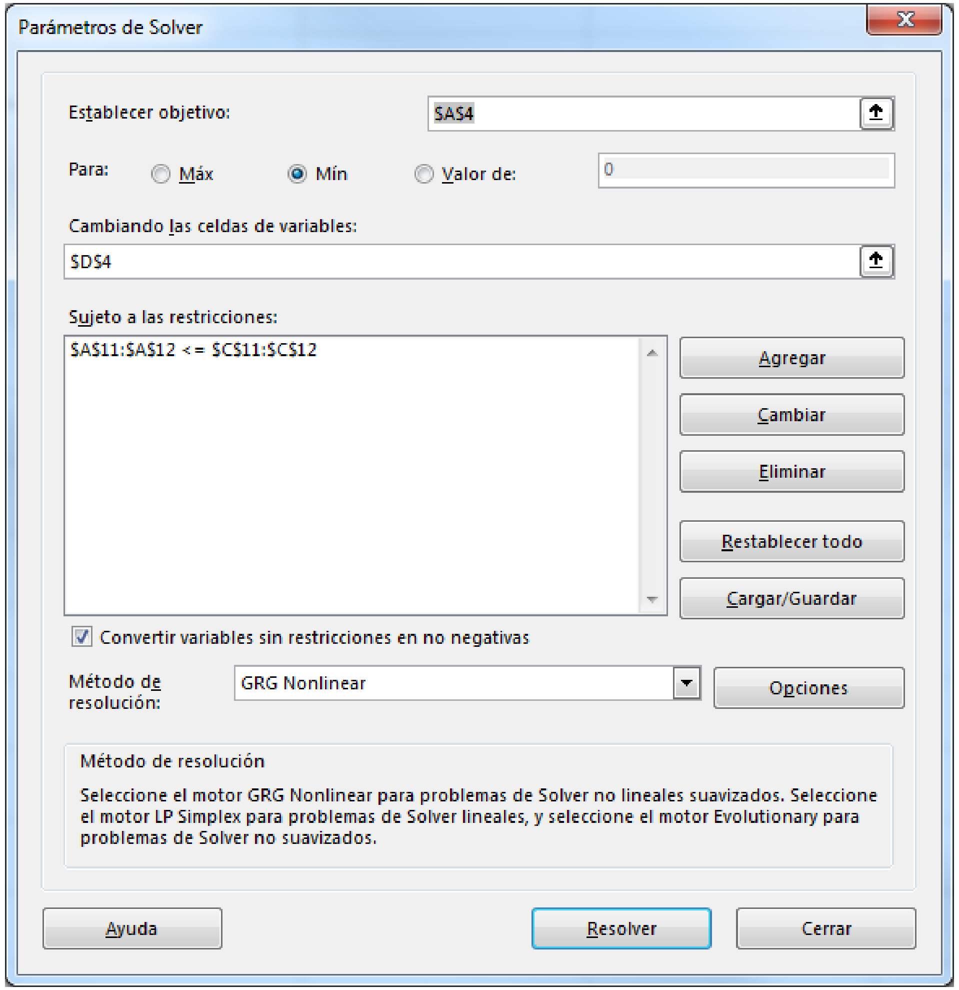
s. a:

$$xc \leq xr$$

$$yc \leq yr$$

Modelo estándar | Modelo estándar var | **Modelo de estado**

Solver para el modelo de estado



Implementación en Mathcad

$$\underset{xr}{\mathrm{Min}}\, l$$

$$yr \leftarrow \frac{yc}{xr - xc} xr$$

$$l \leftarrow \sqrt{xr^2 + yr^2}$$

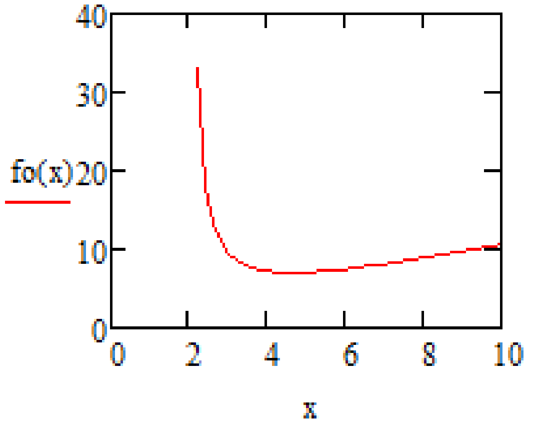
s. a:

$$xc \leq xr$$

$$yc \leq yr$$

$$fo(xr) := \left| \begin{array}{l} yr \leftarrow \dfrac{yc}{xr - xc} \cdot xr \\ l \leftarrow \sqrt{xr^2 + yr^2} \end{array} \right.$$

$$x := 1.1 \cdot xc, 1.2 \cdot xc .. 5 \cdot xc$$



$$xr := 1.2 \cdot xc$$

Given

$$xc \leq xr$$

$$yc \leq \frac{yc}{xr - xc} \cdot xr$$

$$xr := \mathrm{Minimize}(fo, xr)$$

$$xr = 4.621\,\mathrm{m}$$

Instalación de una viga xr.xmcd

Modelo de sustitución

$$\underset{xr}{\text{Min}} \sqrt{xr^2 + \left(\frac{yc}{xr - xc}\, xr\right)^2}$$

s. a:

$$xc \leq xr$$

$$yc \leq \frac{yc}{xr - xc}\, xr$$

Formas de modelos

Modelo estándar

$$\underset{xr,yr,l}{\text{Min}}\, l$$

s. a:

$$\frac{yr}{xr} - \frac{yc}{xr - xc} = 0$$

$$l^2 - xr^2 - yr^2 = 0$$

$$xc - xr \leq 0$$

$$yc - yr \leq 0$$

Modelo de estado

$$\underset{xr}{\text{Min}}\, l$$

$$yr \leftarrow \frac{yc}{xr - xc} xr$$

$$l \leftarrow \sqrt{xr^2 + yr^2}$$

s. a:

$$xc \leq xr$$

$$yc \leq yr$$

Modelo de sustitución

$$\underset{xr}{\text{Min}} \sqrt{xr^2 + \left(\frac{yc}{xr - xc} xr\right)^2}$$

s. a:

$$xc \leq xr$$

$$yc \leq \frac{yc}{xr - xc} xr$$