

Modelado Parte I

Enrique E. Tarifa, Facultad de Ingeniería, UNJu

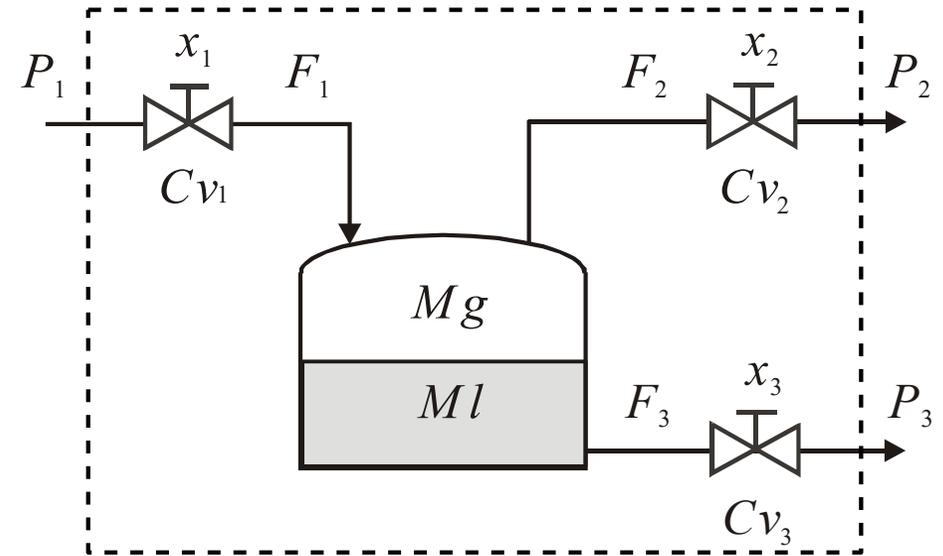
Modelado

Modelado

- Construye una aproximación.
- Es un proceso continuo.
- Es un arte.
- Debe producir un modelo realista y robusto.

Etapas del modelado

1. Definición de los objetivos del modelo
2. Formulación de un modelo conceptual
3. Formulación del modelo matemático
4. Estimación de parámetros



Etapas del modelado

5. Simplificación:

1. Despreciar fenómenos, linealizar, suponer constante: pérdida de exactitud.
2. Eliminación de variables: pérdida de información.

$$\mu = 1 \text{ cP}$$

$$\rho = 1 \frac{\text{kg}}{\text{l}}$$

6. Análisis de la consistencia matemática:

1. Grados de libertad nulo: incógnitas-ecuaciones.
2. Consistencia de unidades: sistema de unidades.

$$\left. \begin{array}{l} r = k C_A \\ k = \alpha e^{-\frac{E}{RT}} \end{array} \right\} \Leftrightarrow r = \alpha e^{-\frac{E}{RT}} C_A$$

Metros o millas... Houston, tenemos un problema!



El 23 de septiembre de 1999, tras más de nueve meses de viaje entre la Tierra y Marte, la sonda espacial *Mars Climate Orbiter* se desintegró al entrar en contacto con la atmósfera del planeta rojo. La *Mars Climate Orbiter*, que tenía un coste de 125 millones de dólares y formaba parte de un programa espacial con un presupuesto de más de 300 millones de dólares, tenía como objetivo estudiar el clima y las condiciones atmosféricas del planeta Marte, así como servir de apoyo para la transmisión de datos de la *Mars Polar Lander*, ambas parte de la misión espacial *Mars Surveyor'98*.

Grados de libertad

Datos

Modelo

- Ninguno
 - Incógnitas: a, b, c, d, e, f, x, y
 - $GL = 8 - 2 = 6 > 0$, indeterminado
- a, b, c, d, e, f :
 - Incógnitas: x, y
 - $GL = 2 - 2 = 0$, determinado

$$ax + by = c$$
$$dx + ey = f$$

Grados de libertad

Datos

- a, b, c, d, e, f, x :
 - Incógnitas: y
 - $GL = 1-2 = -1$, sobredeterminado
- a, b, c, f, x, y :
 - Incógnitas: d, e
 - $GL = 2-2 = 0$, ¿?

Modelo

$$ax + by = c$$

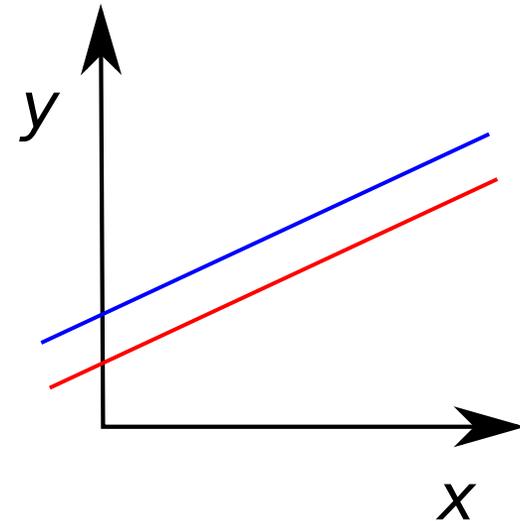
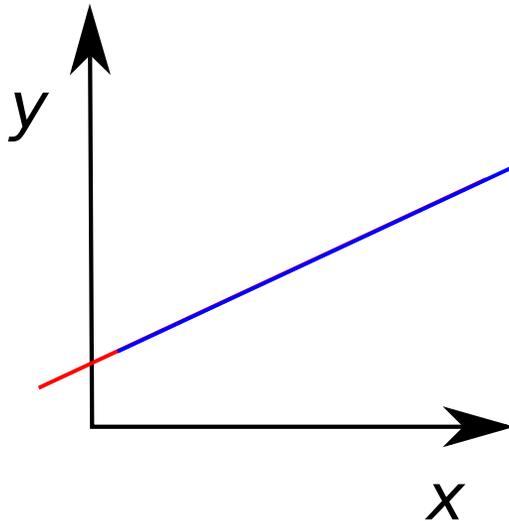
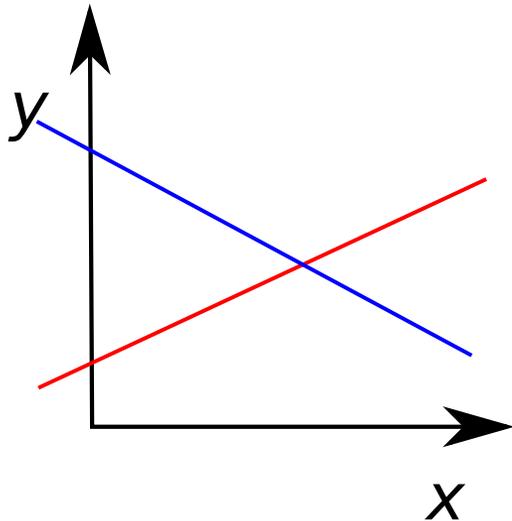
$$dx + ey = f$$

Sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} ax+by &= c \\ dx+ey &= f \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} y &= -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b} \\ y &= -\frac{d}{e}x + \frac{f}{e} \end{aligned}$$



Sistema de ecuaciones lineales

Etapas del modelado

7. Resolución del modelo: programación o utilitarios
8. Verificación:
 1. Sintaxis ($t = T$, $\log(x) = \ln(x)$)
 2. Orden de precedencia
9. Validación
10. Perfeccionamiento



$$10 \frac{x+2}{y-3} + 20$$

~~$$10x + 2 / y - 3 + 20$$~~

$$10(x+2) / (y-3) + 20$$

$$100 + 2 * 50 = \dot{?} 5100 \text{ o } 200?$$

Modelo de espacio de estados

¿Qué es un modelo de espacio de estados?

Un **modelo de espacio de estados** es una representación matemática de un **sistema dinámico** que describe su comportamiento mediante un conjunto de **ecuaciones diferenciales (o diferencias)** de primer orden, expresadas en forma matricial.

Es una herramienta muy utilizada en **ingeniería de control, procesos químicos, robótica, economía, y otros campos** donde se modelan sistemas dinámicos multivariables.

✓ ¿En qué consiste?

Un sistema dinámico en espacio de estados se representa con dos ecuaciones principales:

- ◆ Ecuación de estado (dinámica interna del sistema):

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

- ◆ Ecuación de salida (lo que se mide):

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

 ¿Qué representan las variables?

Símbolo	Significado
$\mathbf{x}(t)$	Vector de variables de estado (describe el estado interno del sistema)
$\dot{\mathbf{x}}(t)$	Derivada del estado (cómo cambia con el tiempo)
$\mathbf{u}(t)$	Vector de entradas al sistema (lo que se controla o perturba)
$\mathbf{y}(t)$	Vector de salidas (lo que se observa o mide)
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$	Matrices que definen la dinámica y relación entre variables

Modelo de espacio de estados

- Estado: $X \in \mathbb{R}^n$
- Sistema con parámetros concentrados:

ODEs

Ordinary Differential Equations

$$\cancel{\frac{dX}{dt}} = F(X, U, D) = 0$$

AEs

Algebraic Equations

$$Y = H(X, U, D)$$



Condición inicial

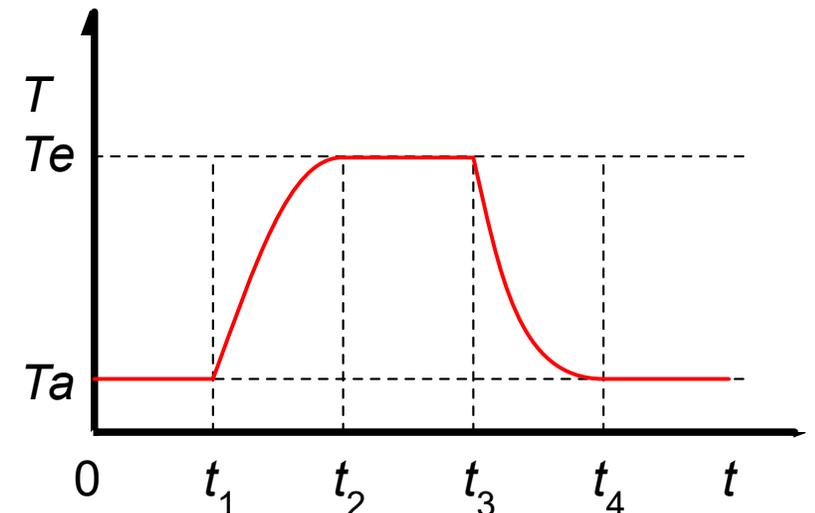
$$X(0) = X_0$$

$X(t)$

$Y(t)$

DAEs

Differential Algebraic Equations



Modelo de espacio de estados

- Sistema con parámetros distribuidos:

$$\frac{\partial X}{\partial t} = F(X, U, D, \nabla \bullet X, \nabla^2 X, \dots)$$

$$Y = H(X, U, D)$$

$$X(0, x, y, z) = X_0(x, y, z)$$

PDEs

Partial Differential
Equations

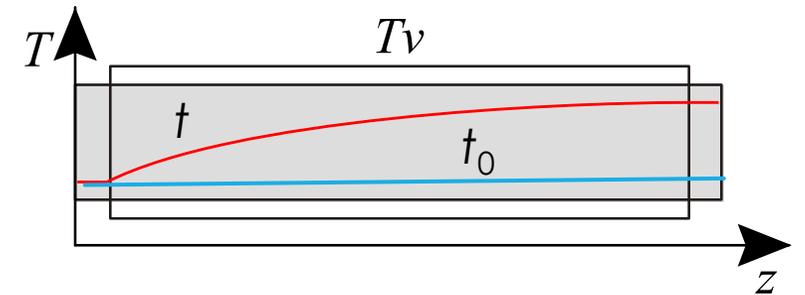


$$X(t, x, y, z)$$

$$Y(t, x, y, z)$$

PDAEs

Partial Differential
Algebraic Equations



$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right)^T$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Origen de las ecuaciones

- Ecuaciones diferenciales:
 - Balances dinámicos (materia, componentes, energía, cantidad de movimiento)
 - Variables de estado
- Ecuaciones algebraicas:
 - Balances pseudoestacionarios
 - Ecuaciones constitutivas

Ley de enfriamiento de Newton

Ley de enfriamiento de Newton

$$\begin{cases} \frac{dT}{dt} = -r(T - T_a) \\ T(0) = T_0 \end{cases}$$

$$T = (T_0 - T_a)e^{-rt} + T_a$$



Prompt para solución analítica

Encuentra la solución analítica de la siguiente ecuación diferencial:
 $dT/dt = -r*(T-T_a)$. Esa ecuación define la derivada de T con respecto a t. Considera que para $t = 0$, T es igual a T_0 .

Encuentra la solución analítica de la siguiente ecuación diferencial:
 $dT/dt = -r(T - T_a)$. Esa ecuación define la derivada de T con respecto a t . Considera que para $t = 0$, T es igual a T_0 .

La ecuación diferencial que planteás es una **ecuación diferencial ordinaria de primer orden y separable**, que responde a la **ley de enfriamiento de Newton**:

$$\frac{dT}{dt} = -r(T - T_a)$$

donde:

- $T(t)$ es la temperatura del cuerpo en el tiempo t ,
- T_a es la temperatura ambiente (constante),
- r es una constante positiva,
- $T(0) = T_0$ es la condición inicial.

✓ **Solución final:**

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a) e^{-rt}$$

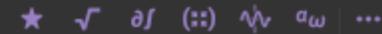


Resuelve $\frac{d}{dt} T = -r(T-a)$ con $T(0) = b$



LENGUAJE NATURAL

ENTRADA MATEMÁTICA



Interpretación de la entrada

resuelve

$$\frac{\partial T(t)}{\partial t} = -r(T(t) - a)$$

$$T(0) = b$$

Resultado

Forma aproximada

Solución paso a paso

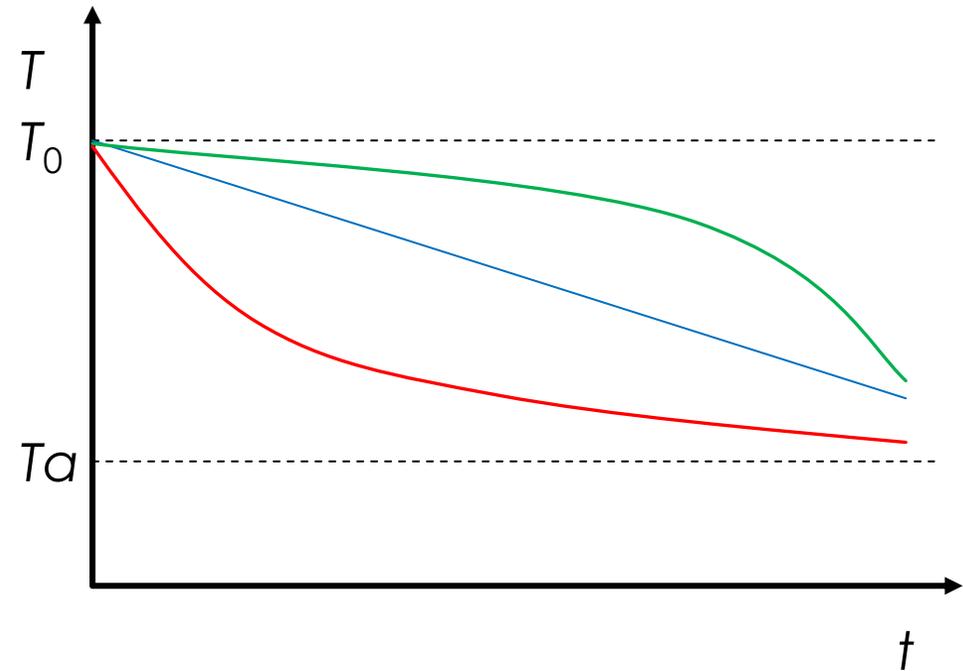
$$T(t) = e^{-rt} (a(e^{rt} - 1) + b)$$

$$T = (b - a)e^{-rt} + a$$

$$T = (T_0 - Ta)e^{-rt} + Ta$$

Solución analítica

- $\frac{dT}{dt} = -r(T - Ta)$
- $T = (T_0 - Ta)e^{-rt} + Ta$
- $\lim_{t \rightarrow 0} T = T_0$
- $\lim_{t \rightarrow \infty} T = Ta$



Datos experimentales

$$T_0 = 82.30 \text{ } ^\circ\text{C} \text{ y } T_a = 17.00 \text{ } ^\circ\text{C}$$

<i>t</i> (min)	<i>T</i> (°C)	<i>t</i> (min)	<i>T</i> (°C)	<i>t</i> (min)	<i>T</i> (°C)
0.00	82.30	16.00	58.10	32.00	46.10
2.00	78.50	18.00	56.10	34.00	45.00
4.00	74.30	20.00	54.30	36.00	43.90
6.00	70.70	22.00	52.80	38.00	43.00
8.00	67.60	24.00	51.20	40.00	41.90
10.00	65.00	26.00	49.90	42.00	41.00
12.00	62.50	28.00	48.60	44.00	40.10
14.00	60.10	30.00	47.20	46.00	39.50

Determinación de r

$$T = (T_0 - Ta)e^{-rt} + Ta$$

$$T - Ta = (T_0 - Ta)e^{-rt}$$

$$\frac{T - Ta}{T_0 - Ta} = e^{-rt}$$

$$\ln\left(\frac{T_0 - Ta}{T - Ta}\right) = rt$$

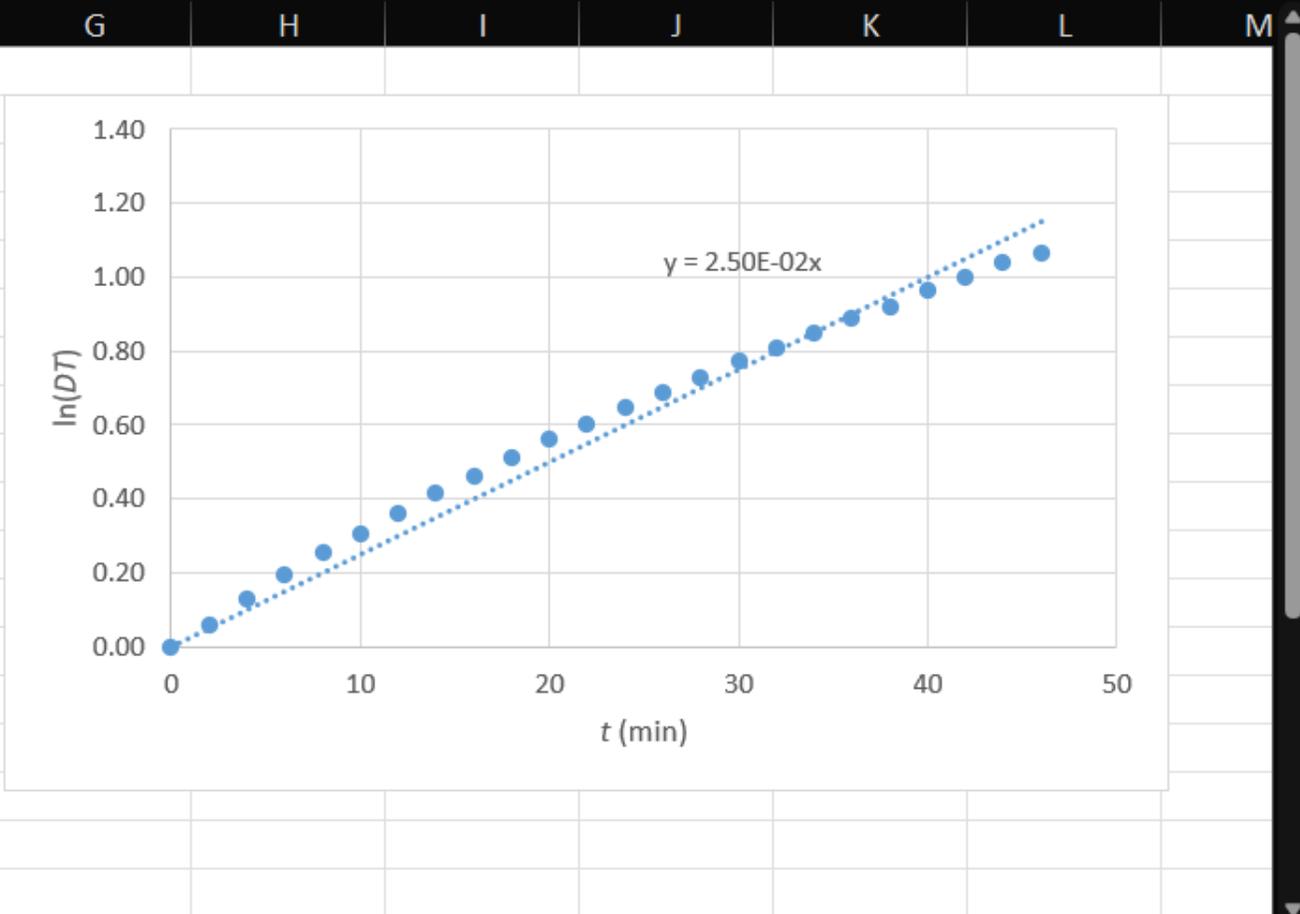
$$y = ax + b$$

Archivo Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Revisar Vista Programador Ayuda Comentarios Compartir

Portapapeles
Calibri 11
N K S
Alineación
Número
Estilos
Celdas
Edición
Complementos
Analizar datos

C2 : $=LN((F\$2-F\$3)/(B2-F\$3))$

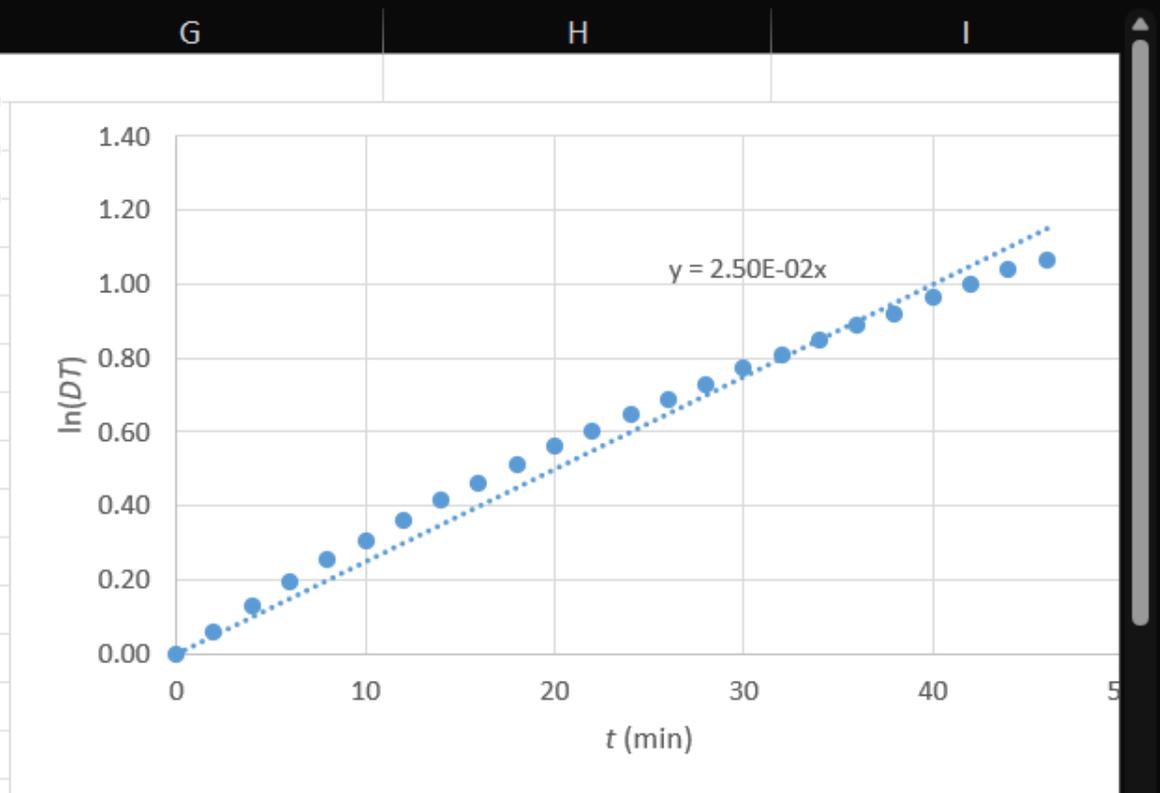
	A	B	C	D	E	F
1	t (min)	T (°C)	ln(DT)		Parámetros	Valores
2	0	82.30	0.00		T0 (°C)	82.30
3	2	78.50	0.06		Ta (°C)	17.00
4	4	74.30	0.13			
5	6	70.70	0.20			
6	8	67.60	0.26		$T = (T_0 - Ta)e^{-rt} + Ta$	
7	10	65.00	0.31		$T - Ta = (T_0 - Ta)e^{-rt}$	
8	12	62.50	0.36			
9	14	60.10	0.42		$\frac{T - Ta}{T_0 - Ta} = e^{-rt}$	
10	16	58.10	0.46		$\ln\left(\frac{T_0 - Ta}{T - Ta}\right) = rt$	
11	18	56.10	0.51			
12	20	54.30	0.56			
13	22	52.80	0.60			
14	24	51.20	0.65		$y = ax + b$	
15	26	49.90	0.69			
16	28	48.60	0.73			
17	30	47.20	0.77			
18	32	46.10	0.81			



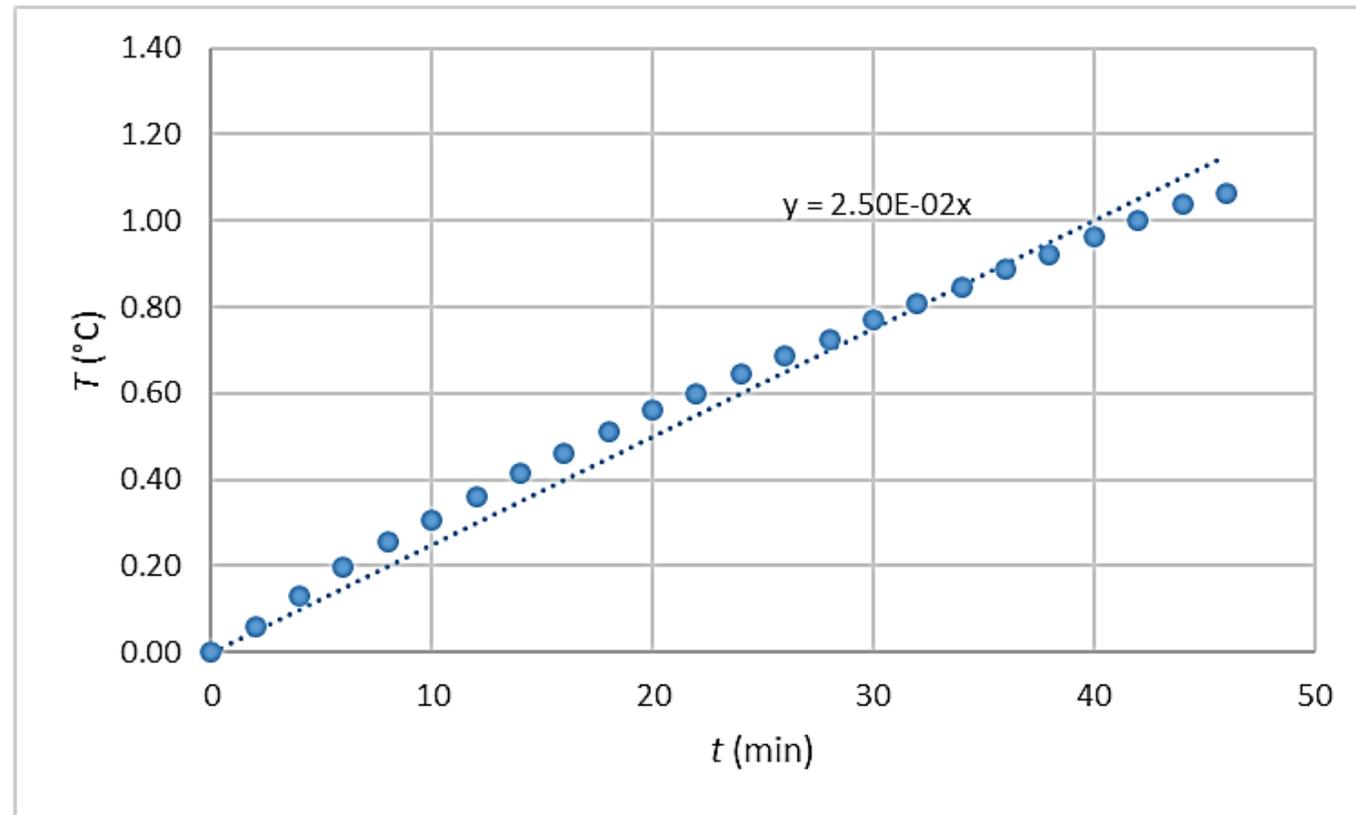
Portapapeles
Calibri 11
N K S
Alineación
Número
Estilos
Celdas
Edición
Complementos
Analizar datos

C2 =LN((F\$2-F\$3)/(B2-F\$3))

	A	B	C	D	E	F
1	t (min)	T (°C)	ln(DT)		Parámetros	Valores
2	0	82.3	=LN((F\$2-F\$3)/(B2-F\$3))		T0 (°C)	82.3
3	2	78.5	=LN((F\$2-F\$3)/(B3-F\$3))		Ta (°C)	17
4	4	74.3	=LN((F\$2-F\$3)/(B4-F\$3))			
5	6	70.7	=LN((F\$2-F\$3)/(B5-F\$3))			
6	8	67.6	=LN((F\$2-F\$3)/(B6-F\$3))		$T = (T_0 - Ta)e^{-rt} + Ta$	
7	10	65	=LN((F\$2-F\$3)/(B7-F\$3))		$T - Ta = (T_0 - Ta)e^{-rt}$	
8	12	62.5	=LN((F\$2-F\$3)/(B8-F\$3))		$\frac{T - Ta}{T_0 - Ta} = e^{-rt}$	
9	14	60.1	=LN((F\$2-F\$3)/(B9-F\$3))		$\ln\left(\frac{T_0 - Ta}{T - Ta}\right) = rt$	
10	16	58.1	=LN((F\$2-F\$3)/(B10-F\$3))		$y = ax + b$	
11	18	56.1	=LN((F\$2-F\$3)/(B11-F\$3))			
12	20	54.3	=LN((F\$2-F\$3)/(B12-F\$3))			
13	22	52.8	=LN((F\$2-F\$3)/(B13-F\$3))			
14	24	51.2	=LN((F\$2-F\$3)/(B14-F\$3))			
15	26	49.9	=LN((F\$2-F\$3)/(B15-F\$3))			
16	28	48.6	=LN((F\$2-F\$3)/(B16-F\$3))			
17	30	47.2	=LN((F\$2-F\$3)/(B17-F\$3))			
18	32	46.1	=LN((F\$2-F\$3)/(B18-F\$3))			



Determinación de r



$$r = 0.025 \text{ min}^{-1}$$

Prompt para determinar r

Actúa como experto en Ingeniería Química. Con los datos de temperatura T (°C) en función del tiempo t (min) que están en la tabla que envió, determina por regresión el valor de la constante r (min^{-1}) de la función $T = (T_0 - T_a) \cdot \exp(-r \cdot t) + T_a$, donde $T_0 = 82.30$ °C y $T_a = 17.00$ °C.

t (min)	T (°C)	t (min)	T (°C)	t (min)	T (°C)
0.00	82.30	16.00	58.10	32.00	46.10
2.00	78.50	18.00	56.10	34.00	45.00
4.00	74.30	20.00	54.30	36.00	43.90
6.00	70.70	22.00	52.80	38.00	43.00
8.00	67.60	24.00	51.20	40.00	41.90
10.00	65.00	26.00	49.90	42.00	41.00
12.00	62.50	28.00	48.60	44.00	40.10
14.00	60.10	30.00	47.20	46.00	39.50

Actúa como experto en Ingeniería Química. Con los datos de temperatura T (°C) en función del tiempo t (min) que están en la tabla que envió, determina por regresión el valor de la constante r (min^{-1}) de la función $T = (T_0 - T_a) \cdot \exp(-r \cdot t) + T_a$, donde $T_0 = 82.30$ °C y $T_a = 17.00$ °C.

El valor estimado de la constante de enfriamiento r mediante regresión no lineal es:

$$r = 0,0259 \text{ min}^{-1}$$

Este valor se obtuvo ajustando los datos experimentales a la ecuación del enfriamiento exponencial de Newton:

$$T(t) = (T_0 - T_a) \cdot e^{-rt} + T_a$$

donde $T_0 = 82,30$ °C y $T_a = 17,00$ °C. Si querés, puedo graficar el ajuste o calcular el error cuadrático medio del modelo. [v-]

Modelo de espacio de estados

$$V \rho C_p \frac{dT}{dt} = -Q$$

$$Q = UA(T - T_a)$$

$$C_p = 1 \text{ cal}/(\text{g} \cdot ^\circ\text{C}), \rho = 1 \text{ kg}/\text{dm}^3$$

$$D = 8 \text{ cm}, L = 7 \text{ cm}$$

Base aislante



Parámetros en SI

$$V \rho C_p \frac{dT}{dt} = -Q$$

$$Q = UA(T - T_a)$$

$$C_p = 4.187 \times 10^3 \text{ J}/(\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}), \rho = 1000 \text{ kg}/\text{m}^3$$

$$D = 0.08 \text{ m}, L = 0.07 \text{ m}$$

$$\Rightarrow A = 2.262 \times 10^{-2} \text{ m}^2 \text{ y } V = 3.519 \times 10^{-4} \text{ m}^3$$



Determinación de U

$$V \rho C_p \frac{dT}{dt} = -Q \quad \begin{cases} \frac{dT}{dt} = -r(T - T_a) \\ T(0) = T_0 \end{cases}$$

$$Q = U A (T - T_a)$$

$$\Rightarrow r = \frac{U A}{V \rho C_p}$$

$$r = 4.167 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$$

$$\Rightarrow U = \frac{r V \rho C_p}{A} = 27.14 \text{ J}/(\text{s} \cdot \text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$$



No depende ni
de A ni de V .

Resolución del modelo

Archivo Inicio Insertar Disposición de página **Fórmulas** Datos Revisar Vista Programador Ayuda

Comentarios Compartir

fx Autosuma Lógicas Búsqueda y referencia
 Usado recientemente Texto Matemáticas y trigonométricas
 Financieras Fecha y hora Más funciones

Biblioteca de funciones

Administrador de nombres Asignar nombre
 Utilizar en la fórmula
 Crear desde la selección

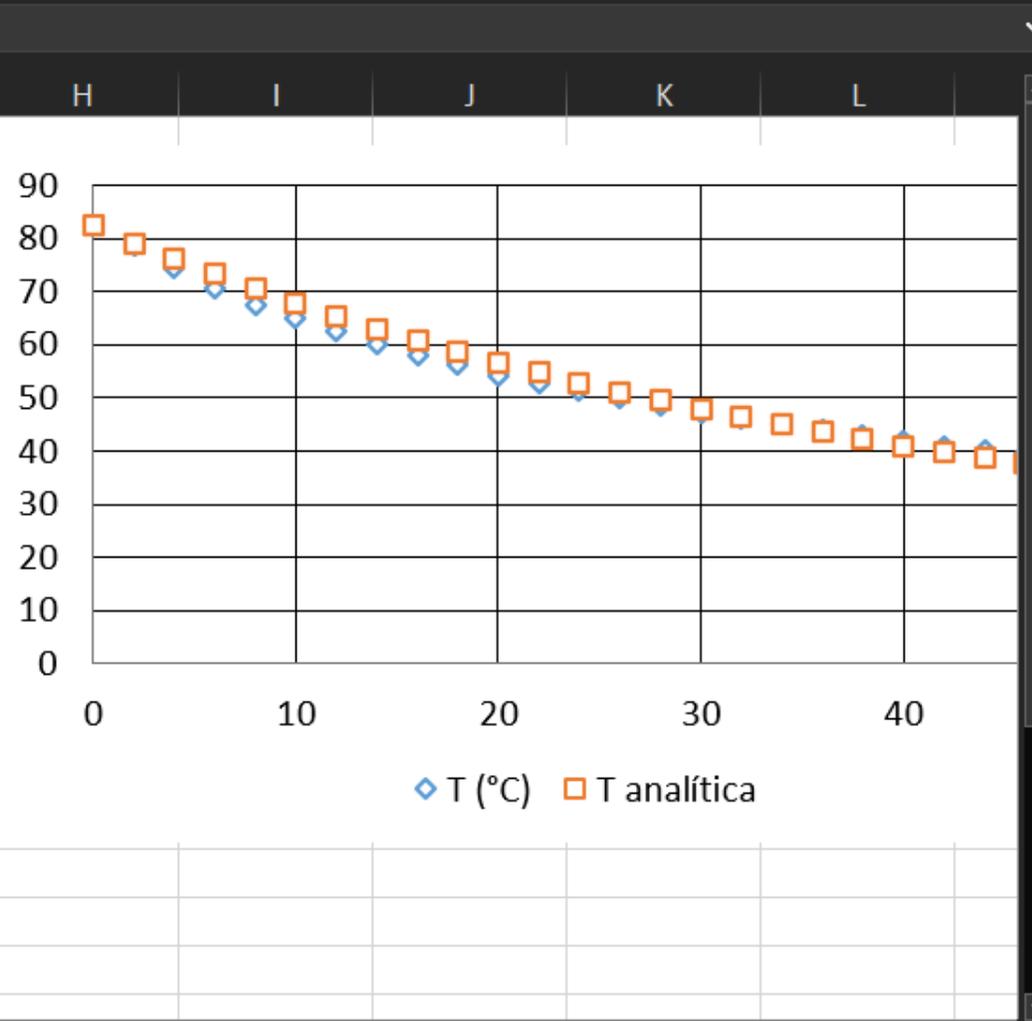
Nombres definidos

Rastrear precedentes Rastrear dependientes
 Comprobación de errores
 Quitar flechas Evaluar fórmula

Auditoría de fórmulas

Ventana Inspección Opciones para el cálculo
 Cálculo

	A	B	C	D	E	F	G
1	t (min)	T (°C)	T analítica	Error %		Parámetros	Valores
2	0	82.30	82.30	0%		T ₀ (°C)	82.30
3	2	78.50	79.12	-1%		r (min ⁻¹)	0.025
4	4	74.30	76.09	-2%		T _a (°C)	17.00
5	6	70.70	73.20	-3%		Δt (min)	2
6	8	67.60	70.46	-4%			
7	10	65.00	67.86	-4%		$T = (T_0 - T_a)e^{-rt} + T_a$	
8	12	62.50	65.38	-4%			
9	14	60.10	63.02	-5%			
10	16	58.10	60.77	-4%			
11	18	56.10	58.64	-4%			
12	20	54.30	56.61	-4%			
13	22	52.80	54.67	-3%			
14	24	51.20	52.84	-3%			
15	26	49.90	51.09	-2%			
16	28	48.60	49.43	-2%			
17	30	47.20	47.85	-1%			
18	32	46.10	46.34	-1%			
19	34	45.00	44.91	0%			



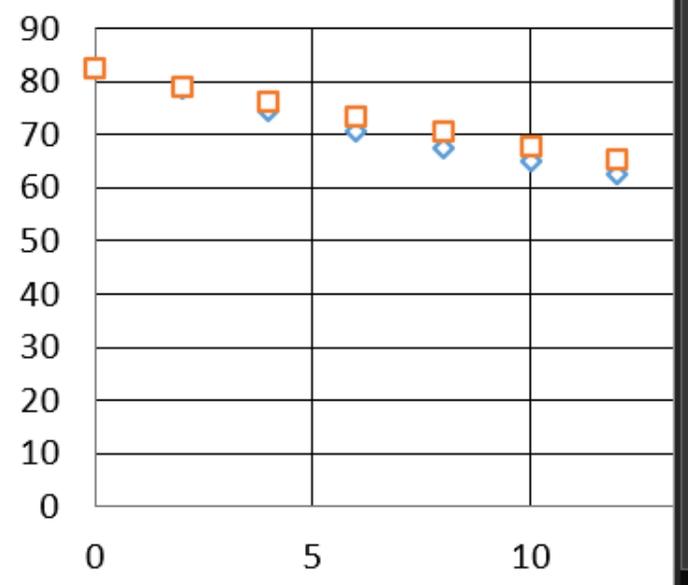
Archivo Inicio Insertar Disposición de página **Fórmulas** Datos Revisar Vista Programador Ayuda

fx Autosuma Lógicas Búsqueda y referencia Asignar nombre Rastrear precedentes Mostrar fórmulas
Usado recientemente Texto Matemáticas y trigonométricas Utilizar en la fórmula Rastrear dependientes Comprobación de errores
Financieras Fecha y hora Más funciones Crear desde la selección Quitar flechas Evaluar fórmula
 Biblioteca de funciones Administrador de nombres Nombres definidos Auditoría de fórmulas Ventana Inspección Opciones para el cálculo Cálculo

C2 =(G\$2-G\$4)*EXP(-G\$3*A2)+G\$4

	A	B	C	D	E	F	G
1	t (min)	T (°C)	T analítica	Error %		Parámetros	Valores
2	0	82.3	$=(G\$2-G\$4)*EXP(-G\$3*A2)+G\4	$=(B2-C2)/C2$		T0 (°C)	82.3
3	2	78.5	$=(G\$2-G\$4)*EXP(-G\$3*A3)+G\4	$=(B3-C3)/C3$		r (min ⁻¹)	0.025
4	4	74.3	$=(G\$2-G\$4)*EXP(-G\$3*A4)+G\4	$=(B4-C4)/C4$		Ta (°C)	17
5	6	70.7	$=(G\$2-G\$4)*EXP(-G\$3*A5)+G\4	$=(B5-C5)/C5$		Δt (min)	2
6	8	67.6	$=(G\$2-G\$4)*EXP(-G\$3*A6)+G\4	$=(B6-C6)/C6$			
7	10	65	$=(G\$2-G\$4)*EXP(-G\$3*A7)+G\4	$=(B7-C7)/C7$			
8	12	62.5	$=(G\$2-G\$4)*EXP(-G\$3*A8)+G\4	$=(B8-C8)/C8$			
9	14	60.1	$=(G\$2-G\$4)*EXP(-G\$3*A9)+G\4	$=(B9-C9)/C9$			
10	16	58.1	$=(G\$2-G\$4)*EXP(-G\$3*A10)+G\4	$=(B10-C10)/C10$			
11	18	56.1	$=(G\$2-G\$4)*EXP(-G\$3*A11)+G\4	$=(B11-C11)/C11$			
12	20	54.3	$=(G\$2-G\$4)*EXP(-G\$3*A12)+G\4	$=(B12-C12)/C12$			
13	22	52.8	$=(G\$2-G\$4)*EXP(-G\$3*A13)+G\4	$=(B13-C13)/C13$			
14	24	51.2	$=(G\$2-G\$4)*EXP(-G\$3*A14)+G\4	$=(B14-C14)/C14$			
15	26	49.9	$=(G\$2-G\$4)*EXP(-G\$3*A15)+G\4	$=(B15-C15)/C15$			
16	28	48.6	$=(G\$2-G\$4)*EXP(-G\$3*A16)+G\4	$=(B16-C16)/C16$			
17	30	47.2	$=(G\$2-G\$4)*EXP(-G\$3*A17)+G\4	$=(B17-C17)/C17$			
18	32	46.1	$=(G\$2-G\$4)*EXP(-G\$3*A18)+G\4	$=(B18-C18)/C18$			
19	34	45	$=(G\$2-G\$4)*EXP(-G\$3*A19)+G\4	$=(B19-C19)/C19$			

$$T = (T_0 - T_a)e^{-rt} + T_a$$



Método de Euler

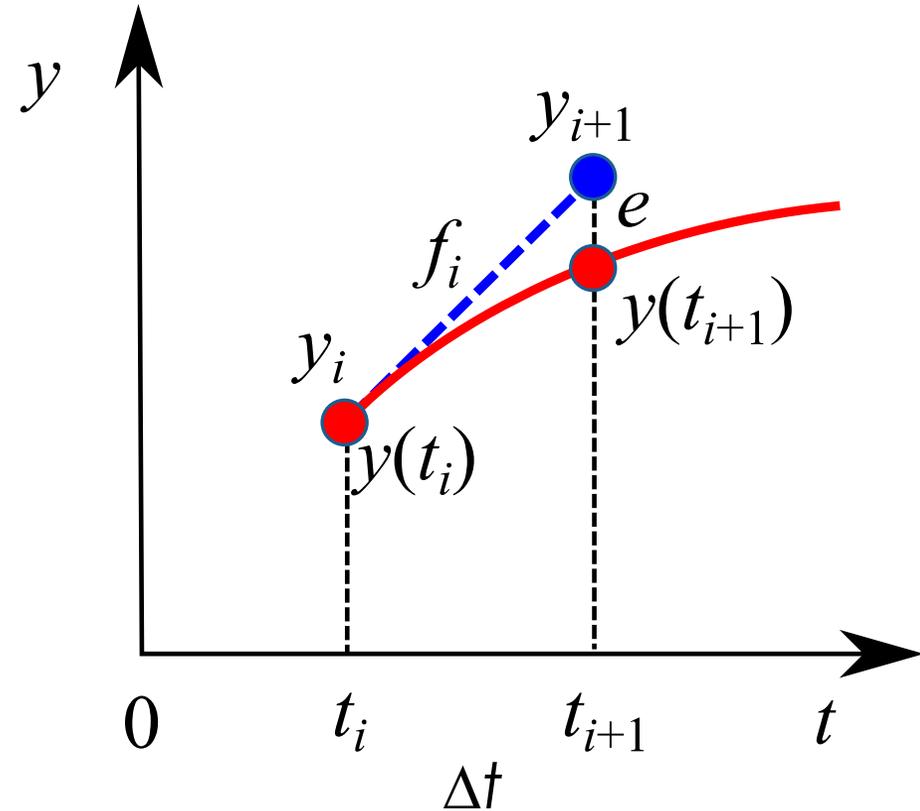
$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} \approx f(t, y) \Rightarrow \Delta y \approx f(t, y) \Delta t$$

$$t_i = i \Delta t$$

$$y_0 = y(0)$$

$$y_{i+1} = y_i + f(t_i, y_i) \Delta t$$



Método de Euler

$$t_i = i \Delta t$$

$$y_0 = y(0)$$

$$y_{i+1} = y_i + f(t_i, y_i) \Delta t$$

<i>i</i>	<i>t</i>	<i>y</i>
0	0	y_0

Método de Euler

$$t_i = i \Delta t$$

$$y_0 = y(0)$$

$$y_{i+1} = y_i + f(t_i, y_i) \Delta t$$

i	t	y
0	0	y_0
1	Δt	$y_1 = y_0 + f(t_0, y_0) \Delta t$

Método de Euler

$$t_i = i \Delta t$$

$$y_0 = y(0)$$

$$y_{i+1} = y_i + f(t_i, y_i) \Delta t$$

i	t	y
0	0	y_0
1	Δt	$y_1 = y_0 + f(t_0, y_0) \Delta t$
2	$2 \Delta t$	$y_2 = y_1 + f(t_1, y_1) \Delta t$

Método de Euler

$$t_i = i \Delta t$$

$$y_0 = y(0)$$

$$y_{i+1} = y_i + f(t_i, y_i) \Delta t$$

i	t	y
0	0	y_0
1	Δt	$y_1 = y_0 + f(t_0, y_0) \Delta t$
2	$2 \Delta t$	$y_2 = y_1 + f(t_1, y_1) \Delta t$
3	$3 \Delta t$	$y_3 = y_2 + f(t_2, y_2) \Delta t$

Método de Euler

$$t_i = i \Delta t$$

$$y_0 = y(0)$$

$$y_{i+1} = y_i + f(t_i, y_i) \Delta t$$

i	t	y
0	0	y_0
1	Δt	$y_1 = y_0 + f(t_0, y_0) \Delta t$
2	$2 \Delta t$	$y_2 = y_1 + f(t_1, y_1) \Delta t$
3	$3 \Delta t$	$y_3 = y_2 + f(t_2, y_2) \Delta t$
...
$i+1$	$(i+1) \Delta t$	$y_{i+1} = y_i + f(t_i, y_i) \Delta t$

Algoritmo general

Programa Simular;

Inicio

// Lectura de datos.

[U,D,P,X₀,Δt,tf] ← LeerDatos;

// Inicialización

t ← 0;

X ← X₀;

// Resuelve el sistema AEs

Y ← ResoluciónDeAEs(t,X);

MostrarResultados(t,X,Y);

// Simulación

Repetir

// Resuelve el sistema ODEs

X ← IntegrarODEs(t,X,Δt);

t ← t+Δt;

// Resuelve el sistema AEs

Y ← ResoluciónDeAEs(t,X);

MostrarResultados(t,X,Y)

Hasta t = tf

Fin.

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

$$t_i = i \Delta t$$

$$y_0 = y(0)$$

$$y_{i+1} = y_i + f(t_i, y_i) \Delta t$$

Programa Taza;

Inicio

// Lectura de datos.

[U, Cp, ρ, V, A, Ta, T₀, Δt, tf] ← LeerDatos;

// Inicialización

t ← 0;

T ← T₀;

// Resuelve el sistema AEs

Q ← U*A*(T-Ta);

MostrarResultados(t, T, Q);

// Simulación

Repetir

// Resuelve el sistema ODEs

T ← T - Q / (V*ρ*Cp) * Δt;

t ← t + Δt;

// Resuelve el sistema AEs

Q ← U*A*(T-Ta);

MostrarResultados(t, T, Q)

Hasta t = tf

Fin.

$$V \rho C_p \frac{dT}{dt} = -Q$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{-Q}{V \rho C_p}$$

$$T_{i+1} = T_i - \frac{Q_i}{V \rho C_p} \Delta t$$

$$Q_i = U A (T_i - T_a)$$

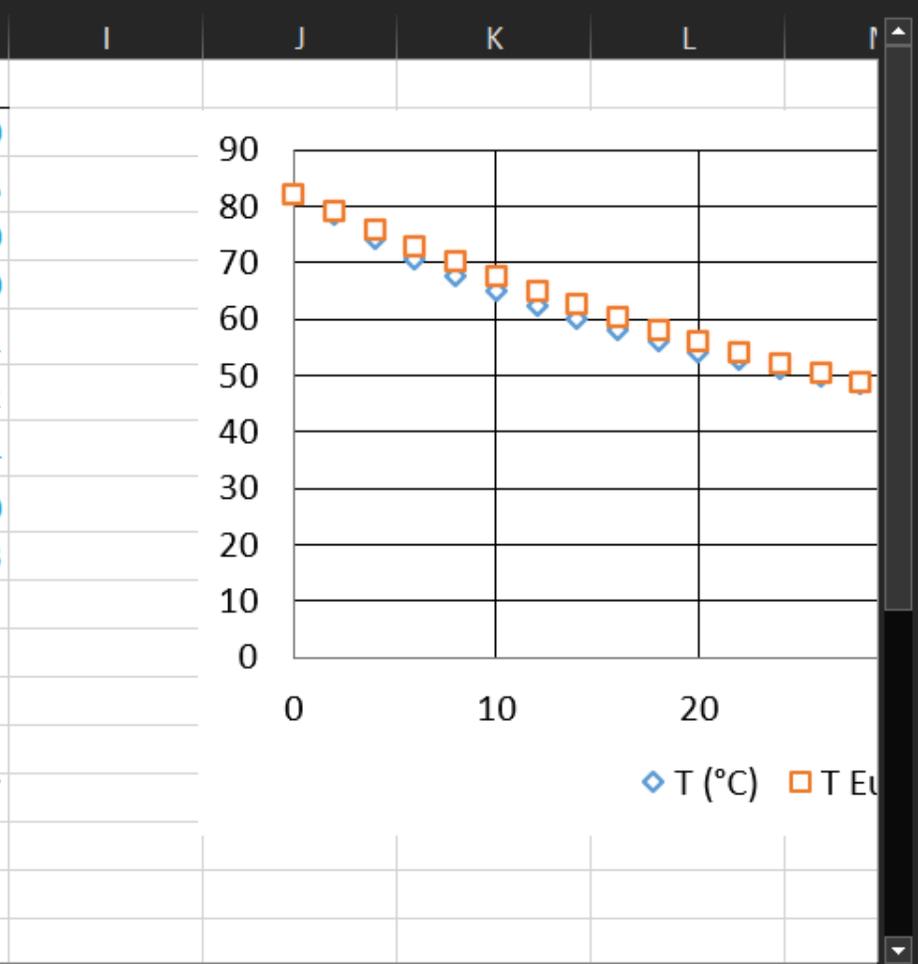
Archivo Inicio Insertar Disposición de página **Fórmulas** Datos Revisar Vista Programador Ayuda
Comentarios Compartir

fx Autosuma Lógicas Búsqueda y referencia Asignar nombre Rastrear precedentes Mostrar fórmulas
Usado recientemente Texto Matemáticas y trigonométricas Utilizar en la fórmula Rastrear dependientes Comprobación de errores
Financieras Fecha y hora Más funciones Crear desde la selección Quitar flechas Evaluar fórmula
Administrador de nombres Nombres definidos Auditoría de fórmulas Ventana Inspección Opciones para el cálculo

Biblioteca de funciones Cálculo

F2 fx

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	t (min)	T (°C)	T Euler	Q Euler	Error %		Parámetros	Valores
2	0	82.30	82.30	40.09	0%		T0 (°C)	82.30
3	2	78.50	79.04	38.08	-1%		r (min ⁻¹)	0.025
4	4	74.30	75.93	36.18	-2%		Ta (°C)	17.00
5	6	70.70	72.99	34.37	-3%		Δt (s)	120
6	8	67.60	70.19	32.65	-4%		U (J/(s·m ² ·°C))	2.71E+01
7	10	65.00	67.53	31.02	-4%		A (m ²)	2.26E-02
8	12	62.50	65.00	29.47	-4%		V (m ³)	3.52E-04
9	14	60.10	62.60	28.00	-4%		rho (kg/m ³)	1000
10	16	58.10	60.32	26.60	-4%		Cp (J/(kg·°C))	4.19E+03
11	18	56.10	58.16	25.27	-4%			
12	20	54.30	56.10	24.00	-3%		$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$	
13	22	52.80	54.14	22.80	-2%		$y_{i+1} = y_i + f(t_i, y_i) \Delta t$	
14	24	51.20	52.29	21.66	-2%			
15	26	49.90	50.52	20.58	-1%			
16	28	48.60	48.85	19.55	-1%			
17	30	47.20	47.25	18.57	0%		$\frac{dT}{dt} = \frac{Q}{mCp}$	
18	32	46.10	45.74	17.64	1%			



Archivo Inicio Insertar Disposición de página **Fórmulas** Datos Revisar Vista Programador Ayuda

Insertar función Σ Autosuma Lógica Lógicas $\text{Búsqueda y referencia}$ Búsqueda y referencia $\text{Matemáticas y trigonométricas}$ Matemáticas y trigonométricas Fecha y hora Fecha y hora Más funciones Más funciones

Biblioteca de funciones

Nombres definidos: Administrador de nombres, Asignar nombre, Utilizar en la fórmula, Crear desde la selección

Auditoría de fórmulas: Rastrear precedentes, Rastrear dependientes, Quitar flechas, Mostrar fórmulas, Comprobación de errores, Evaluar fórmula

Ventana Inspección, Opciones para el cálculo, Cálculo

D2 $=H\$6*H\$7*(C2-H\$4)$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	t (min)	T (°C)	T Euler	Q Euler	Error %		Parámetros	Valores	
2	0	82.3	=H2	=H\$6*H\$7*(C2-H\$4)	=(B2-C2)/C2		T0 (°C)	82.3	
3	2	78.5	=C2-D2/(H\$8*H\$9*H\$10)*H\$5	=H\$6*H\$7*(C3-H\$4)	=(B3-C3)/C3		r (min ⁻¹)	0.025	
4	4	74.3	=C3-D3/(H\$8*H\$9*H\$10)*H\$5	=H\$6*H\$7*(C4-H\$4)	=(B4-C4)/C4		Ta (°C)	17	
5	6	70.7	=C4-D4/(H\$8*H\$9*H\$10)*H\$5	=H\$6*H\$7*(C5-H\$4)	=(B5-C5)/C5		Δt (s)	120	
6	8	67.6	=C5-D5/(H\$8*H\$9*H\$10)*H\$5	=H\$6*H\$7*(C6-H\$4)	=(B6-C6)/C6		U (J/(s·m ² ·°C))	27.14	
7	10	65	=C6-D6/(H\$8*H\$9*H\$10)*H\$5	=H\$6*H\$7*(C7-H\$4)	=(B7-C7)/C7		A (m ²)	0.02262	
8	12	62.5	=C7-D7/(H\$8*H\$9*H\$10)*H\$5	=H\$6*H\$7*(C8-H\$4)	=(B8-C8)/C8		V (m ³)	0.0003519	
9	14	60.1	=C8-D8/(H\$8*H\$9*H\$10)*H\$5	=H\$6*H\$7*(C9-H\$4)	=(B9-C9)/C9		rho (kg/m ³)	1000	
10	16	58.1	=C9-D9/(H\$8*H\$9*H\$10)*H\$5	=H\$6*H\$7*(C10-H\$4)	=(B10-C10)/C10		Cp (J/(kg·°C))	4187	
11	18	56.1	=C10-D10/(H\$8*H\$9*H\$10)*H\$5	=H\$6*H\$7*(C11-H\$4)	=(B11-C11)/C11				
12	20	54.3	=C11-D11/(H\$8*H\$9*H\$10)*H\$5	=H\$6*H\$7*(C12-H\$4)	=(B12-C12)/C12		$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$		
13	22	52.8	=C12-D12/(H\$8*H\$9*H\$10)*H\$5	=H\$6*H\$7*(C13-H\$4)	=(B13-C13)/C13				
14	24	51.2	=C13-D13/(H\$8*H\$9*H\$10)*H\$5	=H\$6*H\$7*(C14-H\$4)	=(B14-C14)/C14		$y_{i+1} = y_i + f(t_i, y_i)\Delta t$		
15	26	49.9	=C14-D14/(H\$8*H\$9*H\$10)*H\$5	=H\$6*H\$7*(C15-H\$4)	=(B15-C15)/C15				
16	28	48.6	=C15-D15/(H\$8*H\$9*H\$10)*H\$5	=H\$6*H\$7*(C16-H\$4)	=(B16-C16)/C16				
17	30	47.2	=C16-D16/(H\$8*H\$9*H\$10)*H\$5	=H\$6*H\$7*(C17-H\$4)	=(B17-C17)/C17		$dT = \frac{Q}{\dots}$		
18	32	46.1	=C17-D17/(H\$8*H\$9*H\$10)*H\$5	=H\$6*H\$7*(C18-H\$4)	=(B18-C18)/C18				

Archivo Inicio Insertar Disposición de página **Fórmulas** Datos Revisar Vista Programador Ayuda

Comentarios Compartir

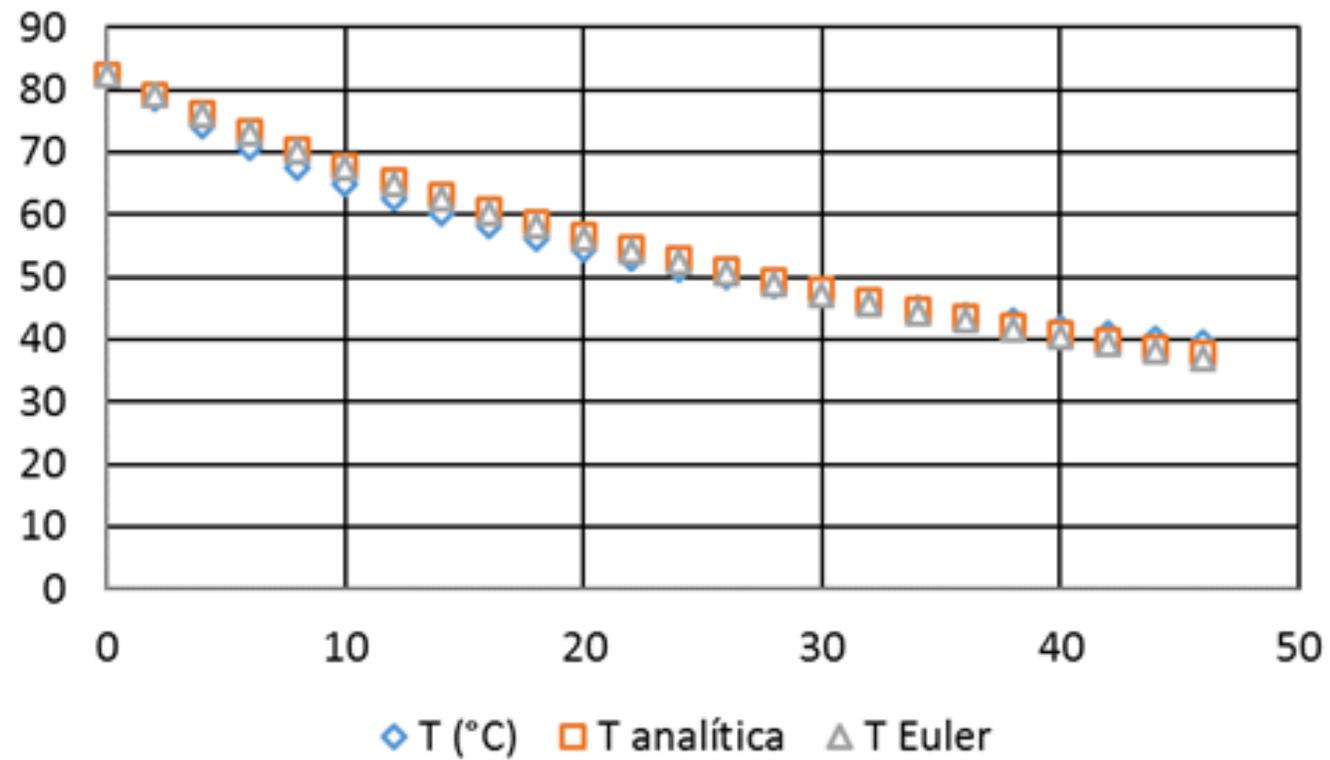
Autosuma Lógicas Búsqueda y referencia Asignar nombre Rastrear precedentes Mostrar fórmulas
 Usado recientemente Texto Matemáticas y trigonométricas Utilizar en la fórmula Rastrear dependientes Comprobación de errores
 Financieras Fecha y hora Más funciones Crear desde la selección Quitar flechas Evaluar fórmula

Biblioteca de funciones Nombres definidos Auditoría de fórmulas Ventana Inspección Opciones para el cálculo Cálculo

C3 =C2-D2/(H\$8*H\$9*H\$10)*H\$5

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	t (min)	T (°C)	T Euler	Q Euler	Error %		Parámetros	Valores	
2	0	82.3	=H2	=H\$6*H\$7*(C2-H\$4)	=(B2-C2)/C2		T0 (°C)	82.3	
3	2	78.5	=C2-D2/(H\$8*H\$9*H\$10)*H\$5	=H\$6*H\$7*(C3-H\$4)	=(B3-C3)/C3		r (min ⁻¹)	0.025	
4	4	74.3	=C3-D3/(H\$8*H\$9*H\$10)*H\$5	=H\$6*H\$7*(C4-H\$4)	=(B4-C4)/C4		Ta (°C)	17	
5	6	70.7	=C4-D4/(H\$8*H\$9*H\$10)*H\$5	=H\$6*H\$7*(C5-H\$4)	=(B5-C5)/C5		Δt (s)	120	
6	8	67.6	=C5-D5/(H\$8*H\$9*H\$10)*H\$5	=H\$6*H\$7*(C6-H\$4)	=(B6-C6)/C6		U (J/(s·m ² ·°C))	27.14	
7	10	65	=C6-D6/(H\$8*H\$9*H\$10)*H\$5	=H\$6*H\$7*(C7-H\$4)	=(B7-C7)/C7		A (m ²)	0.02262	
8	12	62.5	=C7-D7/(H\$8*H\$9*H\$10)*H\$5	=H\$6*H\$7*(C8-H\$4)	=(B8-C8)/C8		V (m ³)	0.0003519	
9	14	60.1	=C8-D8/(H\$8*H\$9*H\$10)*H\$5	=H\$6*H\$7*(C9-H\$4)	=(B9-C9)/C9		rho (kg/m ³)	1000	
10	16	58.1	=C9-D9/(H\$8*H\$9*H\$10)*H\$5	=H\$6*H\$7*(C10-H\$4)	=(B10-C10)/C10		Cp (J/(kg·°C))	4187	
11	18	56.1	=C10-D10/(H\$8*H\$9*H\$10)*H\$5	=H\$6*H\$7*(C11-H\$4)	=(B11-C11)/C11				
12	20	54.3	=C11-D11/(H\$8*H\$9*H\$10)*H\$5	=H\$6*H\$7*(C12-H\$4)	=(B12-C12)/C12		$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$		
13	22	52.8	=C12-D12/(H\$8*H\$9*H\$10)*H\$5	=H\$6*H\$7*(C13-H\$4)	=(B13-C13)/C13				
14	24	51.2	=C13-D13/(H\$8*H\$9*H\$10)*H\$5	=H\$6*H\$7*(C14-H\$4)	=(B14-C14)/C14		$y_{i+1} = y_i + f(t_i, y_i)\Delta t$		
15	26	49.9	=C14-D14/(H\$8*H\$9*H\$10)*H\$5	=H\$6*H\$7*(C15-H\$4)	=(B15-C15)/C15				
16	28	48.6	=C15-D15/(H\$8*H\$9*H\$10)*H\$5	=H\$6*H\$7*(C16-H\$4)	=(B16-C16)/C16				
17	30	47.2	=C16-D16/(H\$8*H\$9*H\$10)*H\$5	=H\$6*H\$7*(C17-H\$4)	=(B17-C17)/C17		$dT = \frac{Q}{\dots}$		
18	32	46.1	=C17-D17/(H\$8*H\$9*H\$10)*H\$5	=H\$6*H\$7*(C18-H\$4)	=(B18-C18)/C18				

Simulaciones



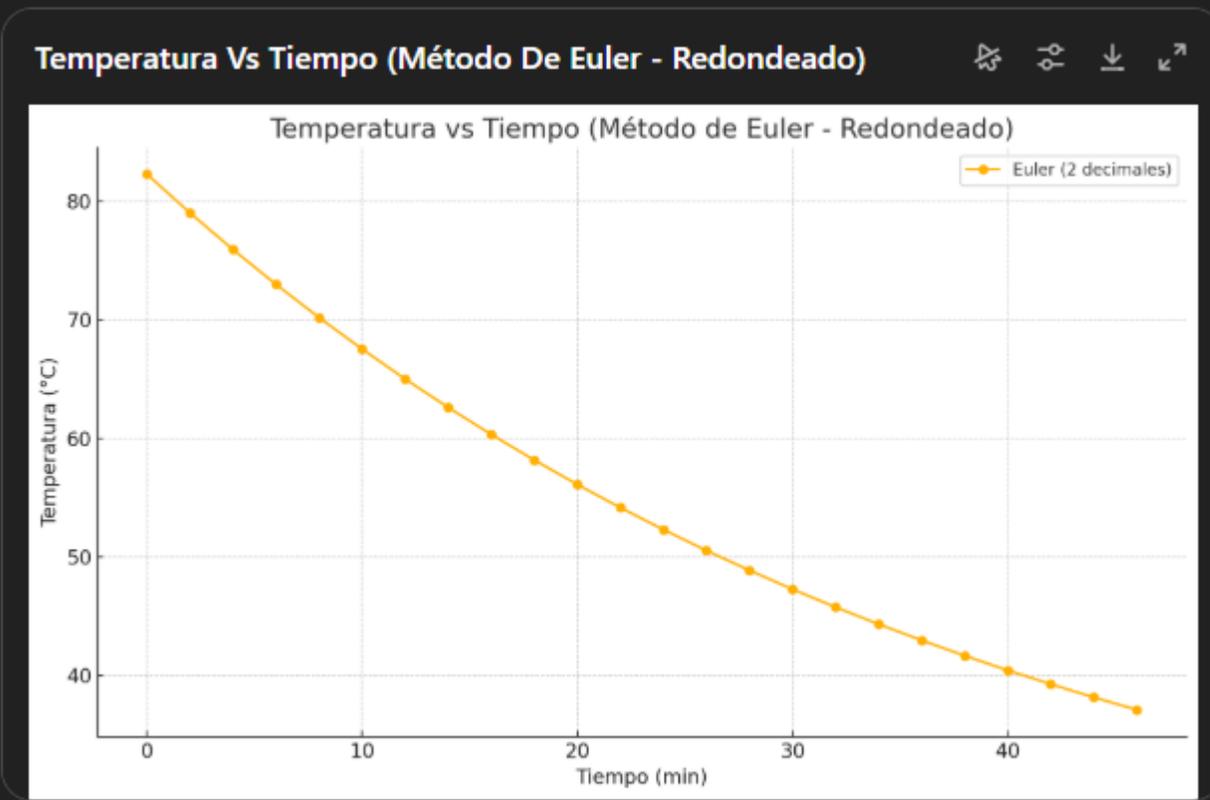
Ver Ley de enfriamiento de Newton. xlsx y SMath.

Prompt para el método de Euler

Actúa como experto en Ingeniería Química. Integra la siguiente ecuación diferencial empleando el método de Euler: $dT/dt = -r*(T - T_a)$, donde el valor inicial de la temperatura T ($^{\circ}\text{C}$) es $T_0 = 82.30$ $^{\circ}\text{C}$. Considera que $T_a = 17.00$ $^{\circ}\text{C}$ y que $r = 0.025$ min^{-1} . Integra la ecuación desde un tiempo inicial igual a 0 min hasta un tiempo final igual a 46 min. Adopta un paso de integración para el tiempo t (min) igual a 2 min. Informa una tabla con los puntos evaluados, donde figure la temperatura T ($^{\circ}\text{C}$), con dos decimales, en función del tiempo t (min). Grafica los datos de esa tabla empleando un gráfico de dispersión que una con segmentos rectos los puntos de la tabla.

Actúa como experto en Ingeniería Química. Integra la siguiente ecuación diferencial empleando el método de Euler: $dT/dt = -r(T - T_a)$, donde el valor inicial de la temperatura T ($^{\circ}\text{C}$) es $T_0 = 82.30$ $^{\circ}\text{C}$. Considera que $T_a = 17.00$ $^{\circ}\text{C}$ y que $r = 0.025$ min^{-1} . Integra la ecuación desde un tiempo inicial igual a 0 min hasta un tiempo final igual a 46 min. Adopta un paso de integración para el tiempo t (min) igual a 2 min. Informa una tabla con los puntos evaluados, donde figure la temperatura T ($^{\circ}\text{C}$), con dos decimales, en función del tiempo t (min). Grafica los datos de esa tabla empleando un gráfico de dispersión que una con segmentos rectos los puntos de la tabla.

	t (min)	T ($^{\circ}\text{C}$)	
19	36	42.94	
20	38	41.64	
21	40	40.41	
22	42	39.24	
23	44	38.13	
24	46	37.07	



Acabo de mostrarte la tabla con los resultados del método de Euler, donde cada temperatura fue redondeada a dos decimales. También podés ver en el gráfico cómo evoluciona la temperatura en función del tiempo, conectando los puntos evaluados con líneas rectas. Si necesitás comparar estos resultados con los datos experimentales o con una solución analítica, avisame y lo hacemos. [-]