Simulación y Optimización

Tópicos avanzados

Enrique E. Tarifa, Facultad de Ingeniería, UNJu

Programación entera

Clasificación de modelos

- Programación Lineal (LP, *Linear Programming*)
- Programación No Lineal (NLP, *Nonlinear Programning*)
- Programación Lineal Entera (ILP, *Integer Linear Programming*)
- Programación No Lineal Entera (INLP, *Integer Nonlinear Programming*)
- Programación Lineal Entera Mixta (MILP, *Mixed Integer Linear Programming*)
- Programación No Lineal Entera Mixta (MINLP, *Mixed Integer Nonlinear Programming*)

$$FO(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$$

Programación entera

$$\underset{x_1, x_2}{\text{Max}}\; x_1 + 2x_2$$

s. a:

$$-x_1 + x_2 \leq 3.5$$

$$x_1 + x_2 \leq 16.5$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{N}$$

- Solución relajada:
  - $x_1 = 6.5$ y $x_2 = 10$
  - *FO* = 26.5
- Solución redondeada:
  - No factible: $x_1 = 7$ y $x_2 = 10$

Programación entera

$$\max_{x_1, x_2} x_1 + 2x_2$$

s. a:

$$-x_1 + x_2 \leq 3.5$$

$$x_1 + x_2 \leq 16.5$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{N}$$

- Solución relajada:
  - $x_1 = 6.5$ y $x_2 = 10$
  - *FO* = 26.5
- Solución redondeada:
  - No factible: $x_1 = 7$ y $x_2 = 10$

Programación entera

$$\underset{x_1, x_2}{\text{Max}}\ x_1 + 2x_2$$

s. a:

$$-x_1 + x_2 \leq 3.5$$

$$x_1 + x_2 \leq 16.5$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{N}$$

- Solución relajada:
  - $x_1 = 6.5$ y $x_2 = 10$
  - *FO* = 26.5
- Solución redondeada:
  - No factible: $x_1 = 6$ y $x_2 = 10$

Programación entera

$$\underset{x_1, x_2}{\text{Max}}\; x_1 + 2x_2$$

s. a:

$$-x_1 + x_2 \leq 3.5$$

$$x_1 + x_2 \leq 16.5$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{N}$$

- Solución relajada:
  - $x_1 = 6.5$ y $x_2 = 10$
  - $FO = 26.5$
- Solución redondeada:
  - Solución no óptima
- Solución entera:
  - $x_1 = 7$, $x_2 = 9$, $FO = 25$

Programación entera.lg4

Modelo en LINGO

Lingo Model - Programación entera

```
! Programación entera;
[FO] Max = x1 + 2*x2;
[R1] -x1 + x2 <= 3.5;
[R2] x1 + x2 <= 16.5;
@Gin(x1);
@Gin(x2);
```

Resultados en LINGO

Variable	Value	Reduced Cost
X1	7.000000	-1.000000
X2	9.000000	-2.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
FO	25.00000	1.000000
R1	1.500000	0.000000
R2	0.5000000	0.000000

Reactores y extractores

Reactores y extractores

Una planta tiene un sector de reacción seguido por uno de separación. En el primero, se colocarán reactores en serie; mientras que, en el segundo, se colocarán extractores por solvente en serie. El aporte a los beneficios de la empresa que hace cada reactor es de 1 $/min, mientras que el aporte de cada extractor es de 5 $/min. Hay espacio para instalar un máximo de 3 reactores y un máximo de 2 extractores. La legislación local fija un límite de 21 litros/min de efluentes. Cada reactor produce 1 litro/min de efluentes, y cada extractor produce 10 litros/min de efluentes. Se requiere determinar la cantidad óptima de reactores y extractores a instalar.

Reactores y extractores

- Variables de decisión:
  - x_1: Cantidad de reactores.
  - x_2: Cantidad de extractores.

Reactores y extractores

- Función objetivo:
  - Beneficios ($/min): $x_1 + 5x_2$
- Restricciones:
  - Efluentes (l/min): $x_1 + 10x_2 \leq 21$
  - Espacio reactores: $x_1 \leq 3$
  - Espacio extractores: $x_2 \leq 2$

Reactores y extractores

$$\underset{x_1, x_2}{\text{Max}}\ x_1 + 5x_2$$

$$\text{s. a}:$$

$$x_1 + 10x_2 \leq 21$$

$$x_1 \leq 3$$

$$x_2 \leq 2$$

$$x_1 \in \mathbb{N}$$

$$x_2 \in \mathbb{N}$$

- Solución relajada:
  - $x_1 = 3$, $x_2 = 1.8$, *FO* = 12 $/min
- Solución redondeada:
  - $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, no factible
  - $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, *FO* = 8 $/min
- Solución entera:
  - $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, *FO* = 11 $/min

Reactores y extractores.lg4

Modelo en LINGO

Lingo Model - Reactores y extractores

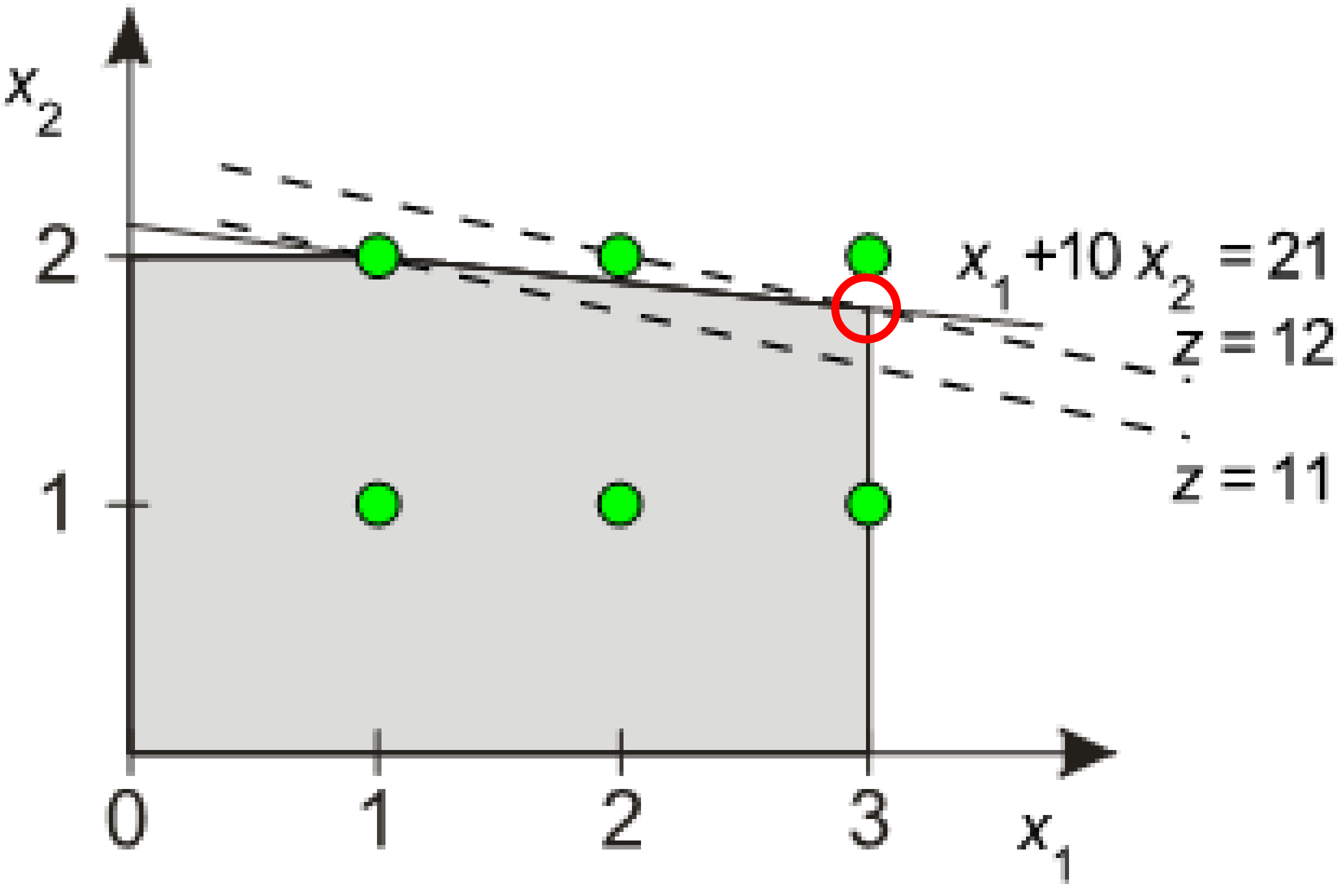
```
! Reactores y extractores;
[FO] Max = x1+5*x2;
[RL] x1+10*x2 <= 21;
[RR] x1 <= 3;
[RE] x2 <= 2;
@Gin(x1);
@Gin(x2);
```

Resultados en LINGO

Variable	Value	Reduced Cost
X1	1.000000	-1.000000
X2	2.000000	-5.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
FO	11.00000	1.000000
RL	0.000000	0.000000
RR	2.000000	0.000000
RE	0.000000	0.000000

Reactores y extractores



Costo fijo

Función objetivo

- Criterio económico:
  - Valor del dinero en el tiempo: VAN y TIR.
  - Beneficios = Ingresos-Costos
  - Ingresos constantes → Costos

Fábrica de pinturas

Fábrica de pinturas

Una fábrica produce pintura amarilla (A) y pintura celeste (C). Existen dos líneas de producción, una para cada color. La capacidad de la línea A es 60 m^3 por día; mientras que la capacidad de la línea C es 50 m^3 por día. Un metro cúbico de A requiere 1 h-hombre de labor; mientras que un metro cúbico de C requiere 2 h-hombre. Se disponen de 120 h-hombre como máximo por día que pueden ser asignadas indistintamente a la producción de ambos colores. La contribución a los beneficios de la empresa es \$20 y \$30 por metro cúbico de A y C, respectivamente. Se debe determinar el plan de producción diaria óptimo.

Fábrica de pinturas

- Parámetros:
  - n = 2
  - m = 3
  - b = 20 30 (\$/m^3)
  - s = 60 (lm^3 /d)

    50 (m^3 /d)

    120 (h-hombre/d)
- Variables de decisión:
  - x = A C (m^3 /d)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A & C \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ LA \\ LC \\ MO \end{array}$$

Fábrica de pinturas

- Función objetivo:
  - Beneficios ($/d): $20A + 30C$
- Restricciones:
  - Capacidad de la línea A (m^3 /d): $A \leq 60$
  - Capacidad de la línea C (m^3 /d): $C \leq 50$
  - Mano de obra (h-hombre/d): $A + 2C = 120$

Fábrica de pinturas

$$\max_{A,C} 20A + 30C$$

$$\text{s. a:}$$

$$A \leq 60$$

$$C \leq 50$$

$$A + 2C \leq 120$$

$$A \geq 0, C \geq 0$$

Pinturas.lg4

Modelo en LINGO

Lingo Model - Pinturas

```
! Fábrica de pinturas;
[FO] MAX = 20*A+30*C;

[LA] A <= 60;
[LC] C <= 50;
[MO] A+2*C <= 120;
```

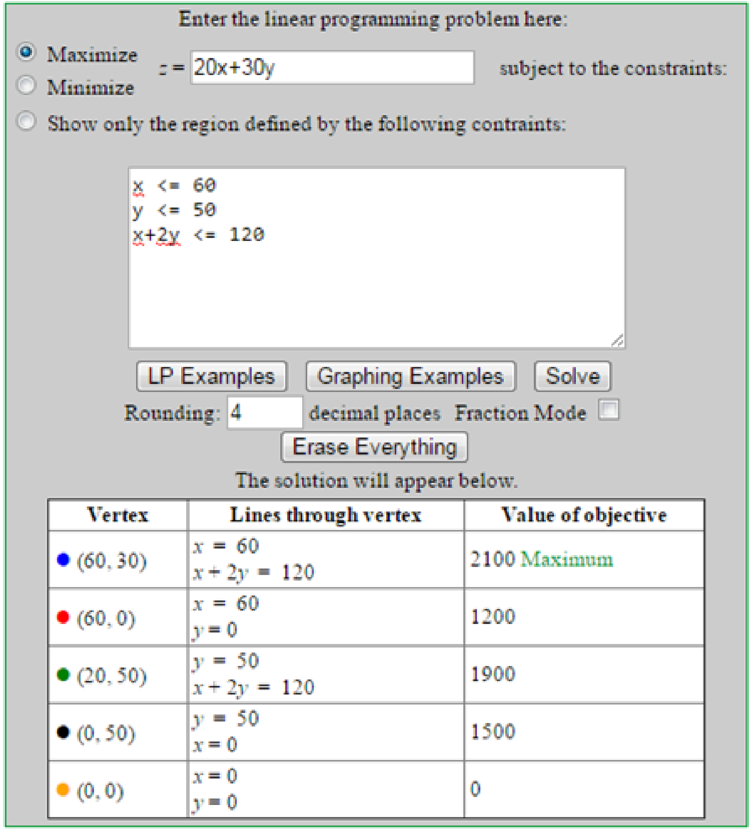
Resultados en LINGO

Variable	Value	Reduced Cost
A	60.00000	0.000000
C	30.00000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
FO	2100.000	1.000000
LA	0.000000	5.000000
LC	20.00000	0.000000
MO	0.000000	15.00000

Se activaron LA y MO. Hacen valer la igualdad. Se acabaron esos recursos.

Fábrica de pinturas


Enter the linear programming problem here:

Maximize
Minimize
z = 20x+30y subject to the constraints:

Show only the region defined by the following contraints:

```
x <= 60
y <= 50
x+2y <= 120
```

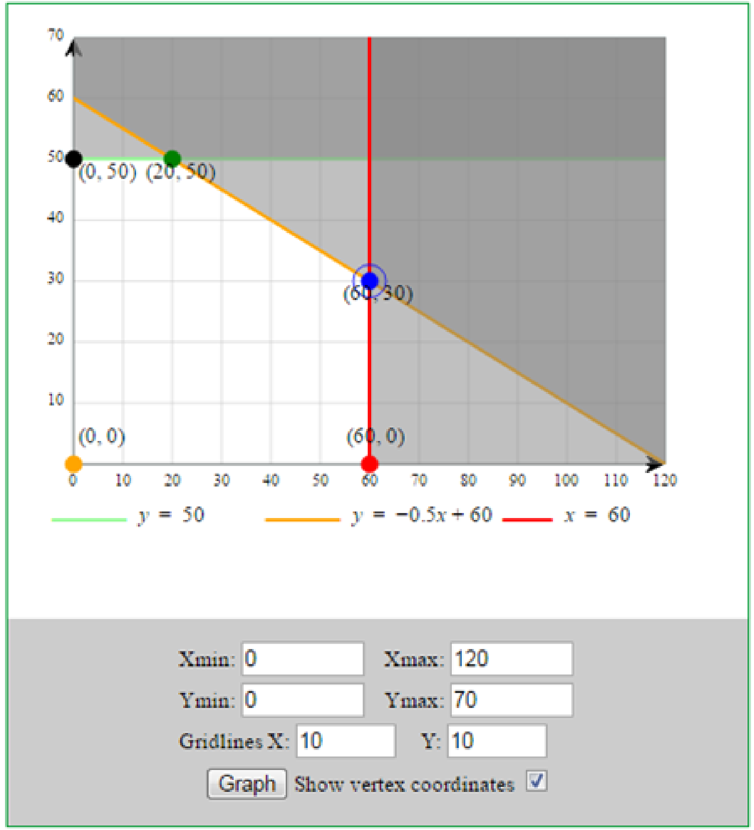
LP Examples Graphing Examples Solve

Rounding: 4 decimal places Fraction Mode

Erase Everything

The solution will appear below.

Vertex	Lines through vertex	Value of objective
● (60, 30)	$x = 60$ $x + 2y = 120$	2100 Maximum
● (60, 0)	$x = 60$ $y = 0$	1200
● (20, 50)	$y = 50$ $x + 2y = 120$	1900
● (0, 50)	$y = 50$ $x = 0$	1500
● (0, 0)	$x = 0$ $y = 0$	0



Simplex

Costo fijo

Se analiza nuevamente la fábrica de pinturas presentada anteriormente; pero, esta vez, se considera el costo de la puesta en marcha. Dicho costo, dividido por la cantidad de días de operación, para la línea A es igual a 400 \$/d, mientras que para la línea C es 1000 \$/d. Se desea determinar el nuevo esquema de producción óptimo.

Costo fijo

$$\underset{A,C,y_A,y_C}{\text{Max}} \left(20A - 400\,y_A\right) + \left(30C - 1000\,y_C\right)$$

$$y_A = \begin{cases} 0 & A = 0 \\ 1 & A > 0 \end{cases}$$

$$y_C = \begin{cases} 0 & C = 0 \\ 1 & C > 0 \end{cases}$$

Costo fijo

$$\underset{A,C,y_A,y_C}{\text{Max}} \left(20A - 400\,y_A\right) + \left(30C - 1000\,y_C\right)$$

s. a:

$$A \le 60$$

$$C \le 50$$

$$A + 2C \le 120$$

$$A \le 60\,y_A$$

$$C \le 50\,y_C$$

$$y_A, y_C \in \text{Binario}$$

$$A \ge 0, C \ge 0$$

$$y_A = \begin{cases} 0 & A = 0 \\ 1 & A > 0 \end{cases}$$

$$y_C = \begin{cases} 0 & C = 0 \\ 1 & C > 0 \end{cases}$$

Pinturas con costo fijo.lg4

Costo fijo

$$\underset{A,C,y_A,y_C}{\text{Max}} \left(20A - 400y_A\right) + \left(30C - 1000y_C\right)$$

s. a:

$$A \le 60$$

$$C \le 50$$

$$A + 2C \le 120$$

$$A \le 60y_A \qquad \text{Si } A > 0 \rightarrow y_A = 1$$

$$C \le 50y_C \qquad \text{Si } C > 0 \rightarrow y_C = 1$$

$$y_A, y_C \in \text{Binario}$$

$$A \ge 0, C \ge 0$$

$$y_A = \begin{cases} 0 & A = 0 \\ 1 & A > 0 \end{cases}$$

$$y_C = \begin{cases} 0 & C = 0 \\ 1 & C > 0 \end{cases}$$

Pinturas con costo fijo.lg4

Costo fijo

$$\underset{A,C,y_A,y_C}{\text{Max}} \left(20A - 400\,y_A\right) + \left(30C - 1000\,y_C\right)$$

$$y_A = 0 \qquad\qquad y_C = 0$$

s. a:

$$A \le 60$$

$$C \le 50$$

$$A + 2C \le 120$$

$$A \le 60\,y_A \qquad \text{Si } A = 0 \rightarrow y_A = 0 \vee 1$$

$$C \le 50\,y_C \qquad \text{Si } C = 0 \rightarrow y_C = 0 \vee 1$$

$$y_A, y_C \in \text{Binario}$$

$$A \ge 0, C \ge 0$$

$$y_A = \begin{cases} 0 & A = 0 \\ 1 & A > 0 \end{cases}$$

$$y_C = \begin{cases} 0 & C = 0 \\ 1 & C > 0 \end{cases}$$

Pinturas con costo fijo.lg4

Modelo en LINGO

Lingo Model - Pinturas con costo fijo

```
! Fábrica de pinturas con costo fijo;
[FO] MAX = (20*A-400*yA)+(30*C-1000*yC);

[LA] A <= 60;
[LC] C <= 50;
[MO] A+2*C <= 120;

! Restricciones adicionales;
[B1] A <= 60*yA;
[B2] C <= 50*yC;
@Bin(yA);
@Bin(yC);
```

Resultados en LINGO

Variable	Value	Reduced Cost
A	60.00000	0.000000
YA	1.000000	400.0000
C	0.000000	0.000000
YC	0.000000	-500.0000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
FO	800.0000	1.000000
LA	0.000000	20.00000
LC	50.00000	0.000000
MO	60.00000	0.000000
B1	0.000000	0.000000
B2	0.000000	30.00000

Dejó de fabricar C.

Determinación de las M

Uso de las M

$$\underset{A,C,y_{\mathrm{A}},y_{\mathrm{C}}}{\mathrm{Max}} \left(20A-400y_{\mathrm{A}}\right)+\left(30C-1000y_{\mathrm{C}}\right)$$

s. a:

$$A \le 60$$

$$C \le 50$$

$$A+2C \le 120$$

$$A \le M_{\mathrm{A}}\, y_{\mathrm{A}}$$

$$C \le M_{\mathrm{C}}\, y_{\mathrm{C}}$$

$$y_{\mathrm{A}}, y_{\mathrm{C}} \in \mathrm{Binario}$$

$$A \ge 0, C \ge 0$$

Determinación de M_A

$$\underset{A,C}{\text{Max}}\ A$$

s. a:

$$A \le 60$$

$$C \le 50$$

$$A + 2C \le 120$$

$$A \ge 0, C \ge 0$$

$$\Rightarrow \quad M_A = 60$$

Determinación de M_C

$$\max_{A,C} C$$

s. a:

$$A \leq 60$$

$$C \leq 50$$

$$A + 2C \leq 120$$

$$A \geq 0, C \geq 0$$

$M_C = 50$

Costo fijo

$$\underset{A,C,y_A,y_C}{\text{Max}} \left(20A - 400y_A\right) + \left(30C - 1000y_C\right)$$

s. a:

$$A \le 60$$

$$C \le 50$$

$$A + 2C \le 120$$

$$A \le 60y_A$$

$$C \le 50y_C$$

$$y_A, y_C \in \text{Binario}$$

$$A \ge 0, C \ge 0$$

$$y_A = \begin{cases} 0 & A = 0 \\ 1 & A > 0 \end{cases}$$

$$y_C = \begin{cases} 0 & C = 0 \\ 1 & C > 0 \end{cases}$$

Pinturas con costo fijo.lg4

Análisis de sensibilidad

Etapas de la optimización

1. Especificación del problema
2. Formulación del modelo
3. Resolución del modelo
4. Verificación de las condiciones de optimalidad
5. Análisis de sensibilidad

Utilidad del análisis de sensibilidad

- Una vez obtenido el óptimo:
  - ¿Qué tan sensible es a variaciones de los parámetros?
  - ¿Qué se puede hacer para obtener un mejor óptimo?
  - ¿Dónde se sebe concentrar una nueva inversión?
  - ¿Cómo se pueden ahorrar recursos?

Fábrica de vidrio

Artículos de vidrio

Una empresa produce dos tipos de vidrio de alta calidad. Cada producto es producido en sendas plantas. En una tercera, se realiza el *packaging* de ambos. Se desea determinar la proporción correcta a producir.

Artículos de vidrio

Planta	Producto 1 (kW·min/m²)	Producto 2 (kW·min/m²)	Capacidad (kW)
1	1	no se fabrica	4
2	no se fabrica	2	12
3	3	2	18

	Producto 1	Producto 2
Beneficios ($/m²)	3	5

Artículos de vidrio

- x_1: Velocidad de producción del artículo 1 (m^2/min)
- x_2: Velocidad de producción del artículo 2 (m^2/min)
- Función objetivo:
  - Beneficios ($/min): $3x_1 + 5x_2$
- Restricciones:
  - Potencia consumida por la planta 1 (kW): $x_1 \leq 4$
  - Potencia consumida por la planta 2 (kW): $2x_2 \leq 12$
  - Potencia consumida por la planta 3 (kW): $3x_1 + 2x_2 \leq 18$

Artículos de vidrio

$$\underset{x_1, x_2}{\text{Max}}\ 3x_1 + 5x_2$$

s. a:

$$x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Solución gráfica

Método gráfico

Región factible y curvas de nivel

$z = 3x_1 + 5x_2$

s. a:

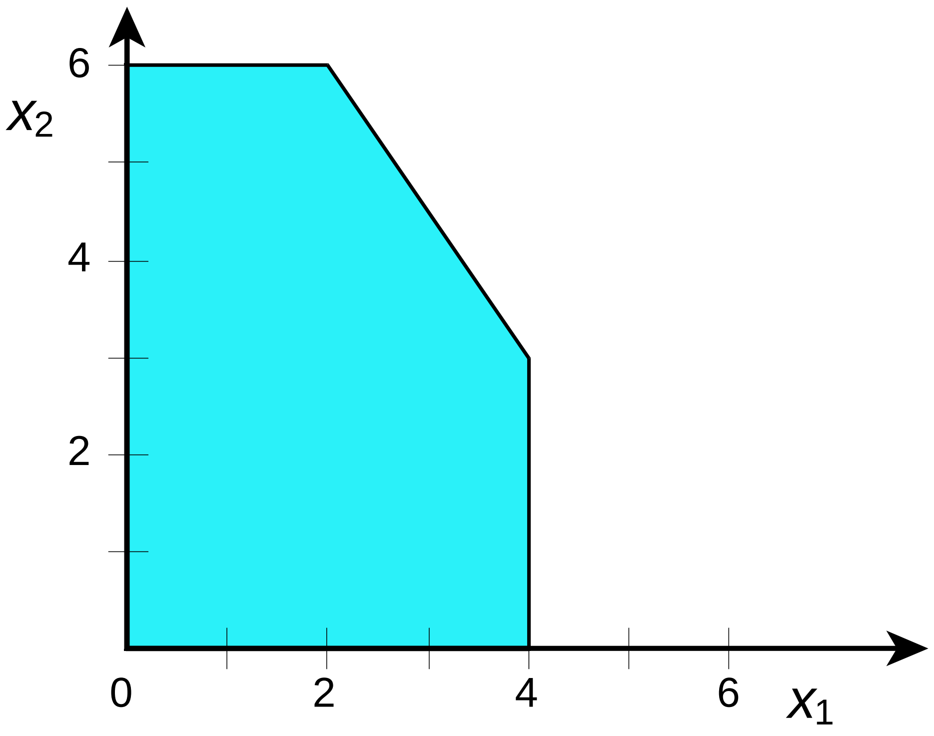
$x_1 \leq 4$

$2x_2 \leq 12$

$3x_1 + 2x_2 \leq 18$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$



Región factible y curvas de nivel

$z = 3x_1 + 5x_2$

s. a:

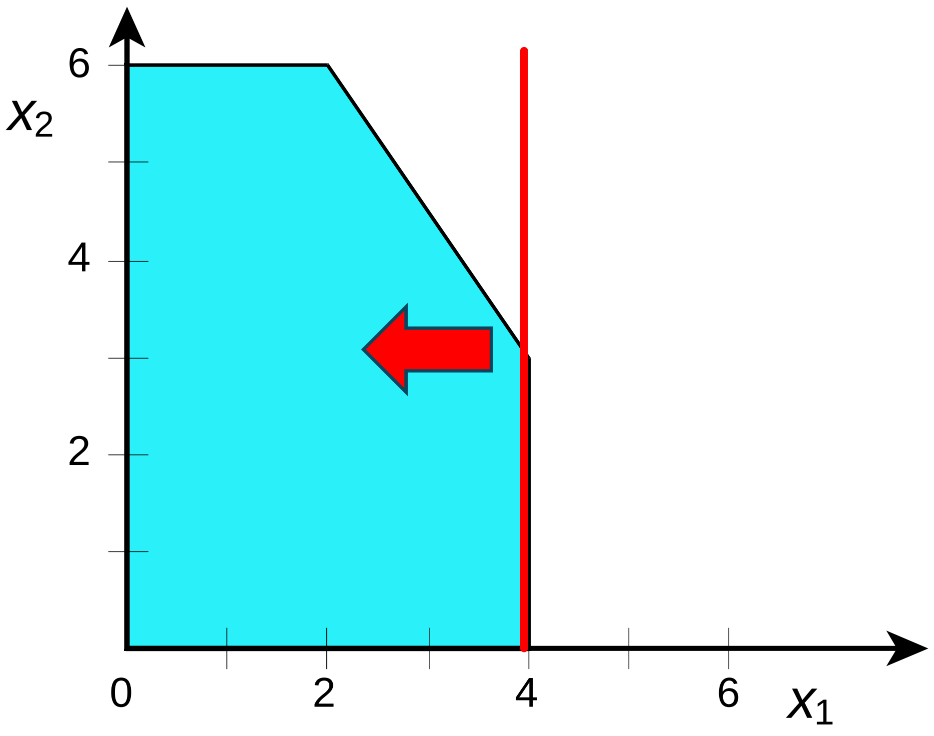
$x_1 \leq 4$

$2x_2 \leq 12$

$3x_1 + 2x_2 \leq 18$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$



Región factible y curvas de nivel

$z = 3x_1 + 5x_2$

s. a:

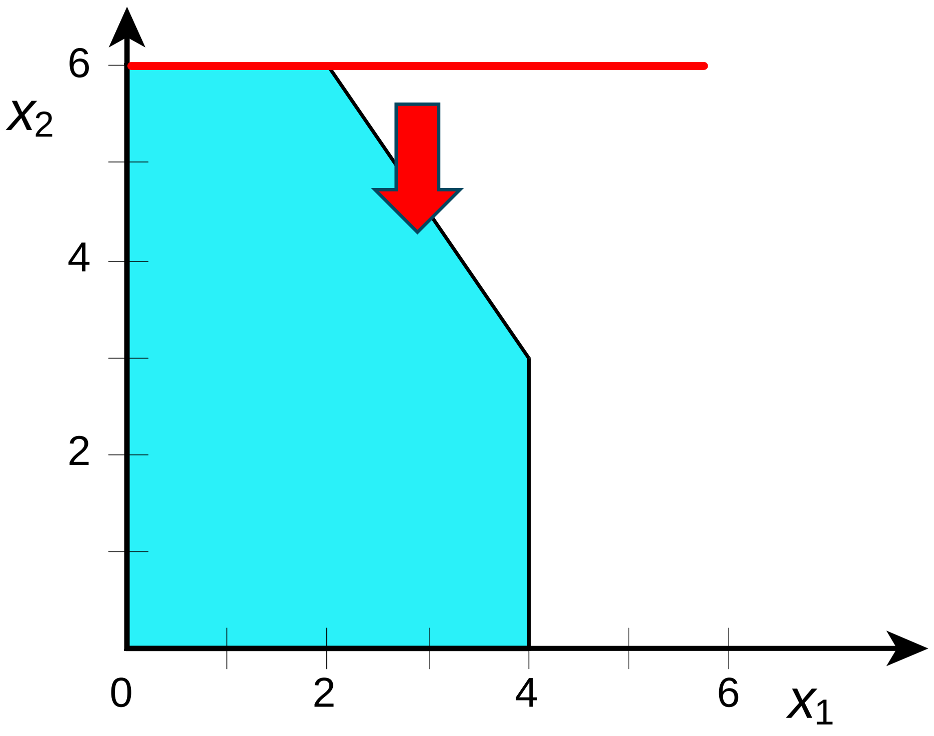
$x_1 \leq 4$

$2x_2 \leq 12$

$3x_1 + 2x_2 \leq 18$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$



Región factible y curvas de nivel

$z = 3x_1 + 5x_2$

s. a:

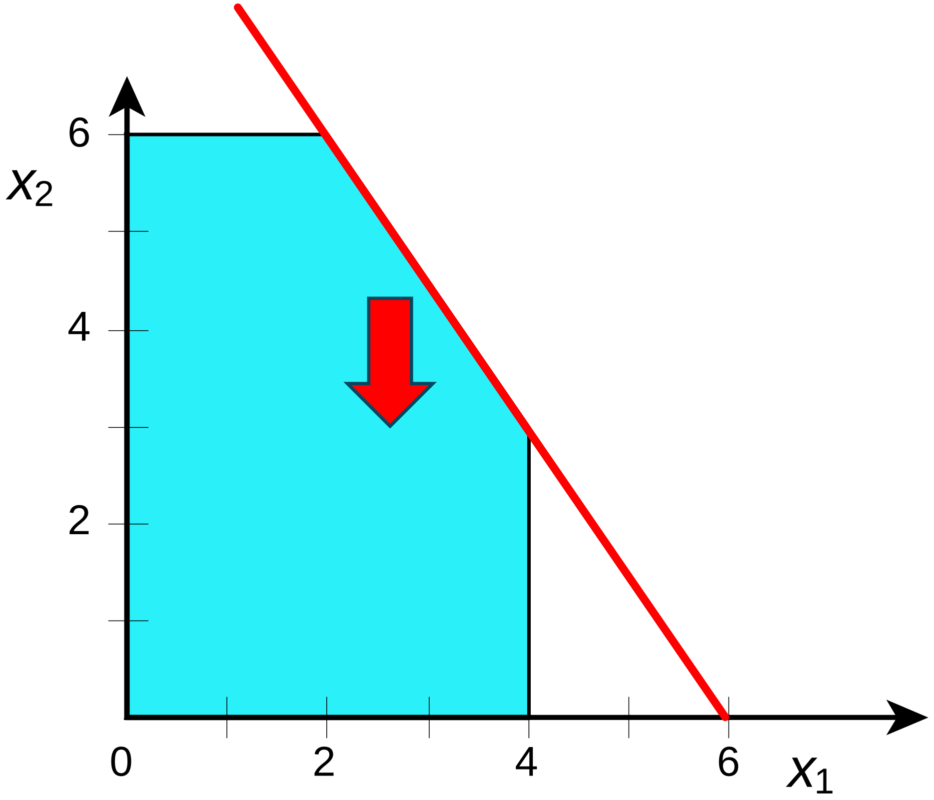
$x_1 \leq 4$

$2x_2 \leq 12$

$3x_1 + 2x_2 \leq 18$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$



Región factible y curvas de nivel

$$z = 3x_1 + 5x_2$$

s. a:

$$x_1 \le 4$$

$$2x_2 \le 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \le 18$$

$$x_1 \ge 0$$

$$x_2 \ge 0$$

$$x_2 = \frac{1}{5}z - \frac{3}{5}x_1$$

s. a:

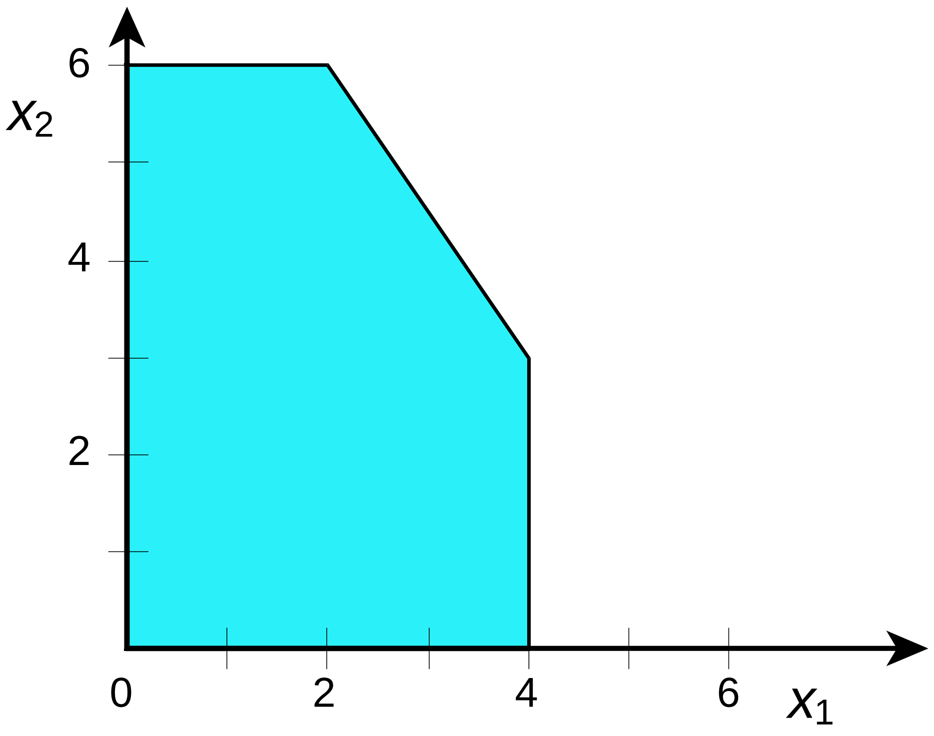
$$x_1 \le 4$$

$$x_2 \le 6$$

$$x_2 \le 9 - \frac{3}{2}x_1$$

$$x_1 \ge 0$$

$$x_2 \ge 0$$



Región factible y curvas de nivel

$$z = 3x_1 + 5x_2$$

s. a:

$$x_1 \le 4$$

$$2x_2 \le 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \le 18$$

$$x_1 \ge 0$$

$$x_2 \ge 0$$

$$x_2 = \frac{1}{5}z - \frac{3}{5}x_1$$

s. a:

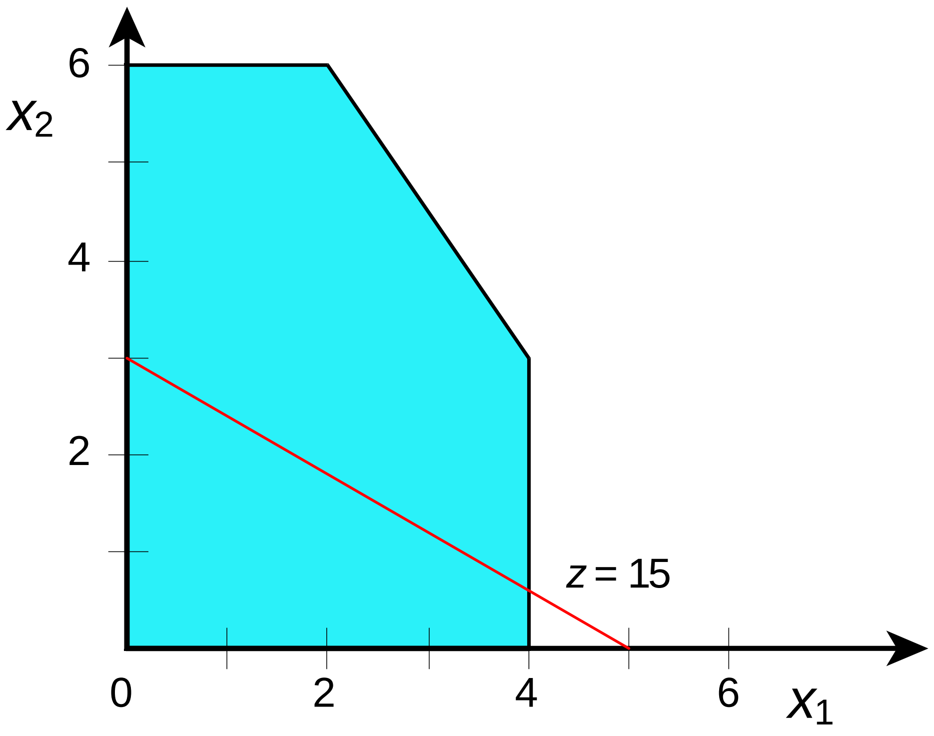
$$x_1 \le 4$$

$$x_2 \le 6$$

$$x_2 \le 9 - \frac{3}{2}x_1$$

$$x_1 \ge 0$$

$$x_2 \ge 0$$



Región factible y curvas de nivel

$$z = 3x_1 + 5x_2$$

s. a:

$$x_1 \le 4$$

$$2x_2 \le 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \le 18$$

$$x_1 \ge 0$$

$$x_2 \ge 0$$

$$x_2 = \frac{1}{5}z - \frac{3}{5}x_1$$

s. a:

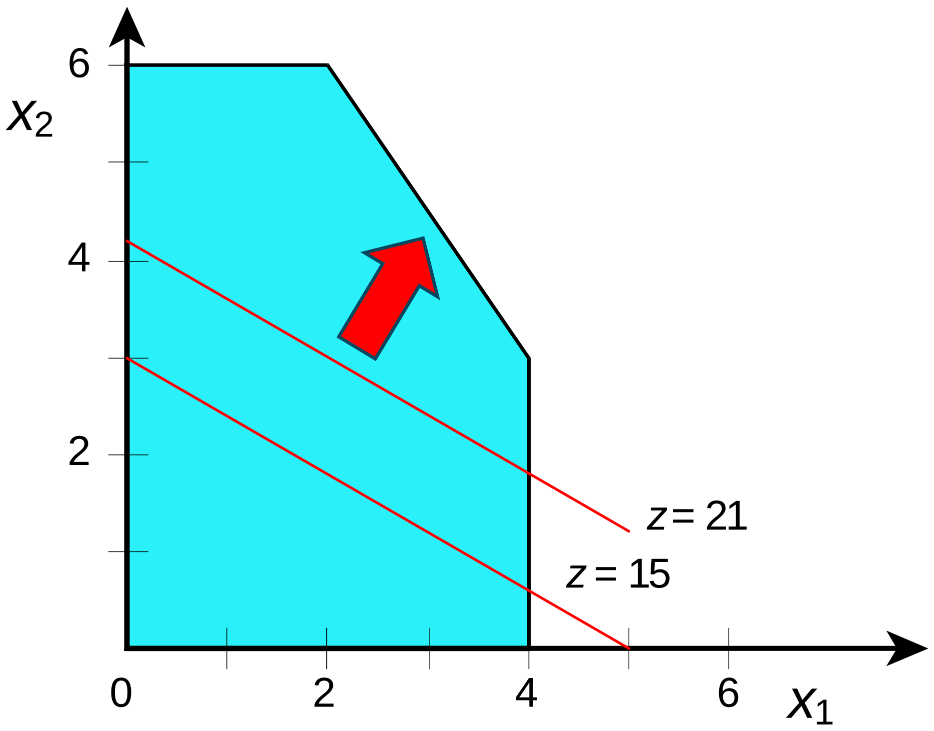
$$x_1 \le 4$$

$$x_2 \le 6$$

$$x_2 \le 9 - \frac{3}{2}x_1$$

$$x_1 \ge 0$$

$$x_2 \ge 0$$



Región factible y curvas de nivel

$z = 3x_1 + 5x_2$

s. a:

$x_1 \leq 4$

$2x_2 \leq 12$

$3x_1 + 2x_2 \leq 18$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$

$x_2 = \frac{1}{5}z - \frac{3}{5}x_1$

s. a:

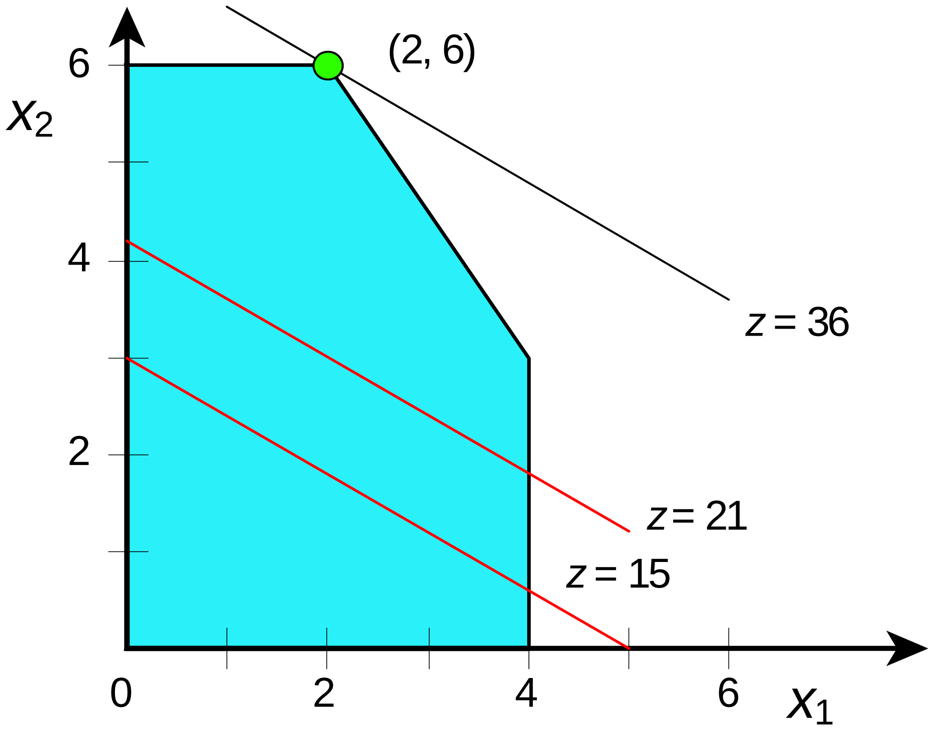
$x_1 \leq 4$

$x_2 \leq 6$

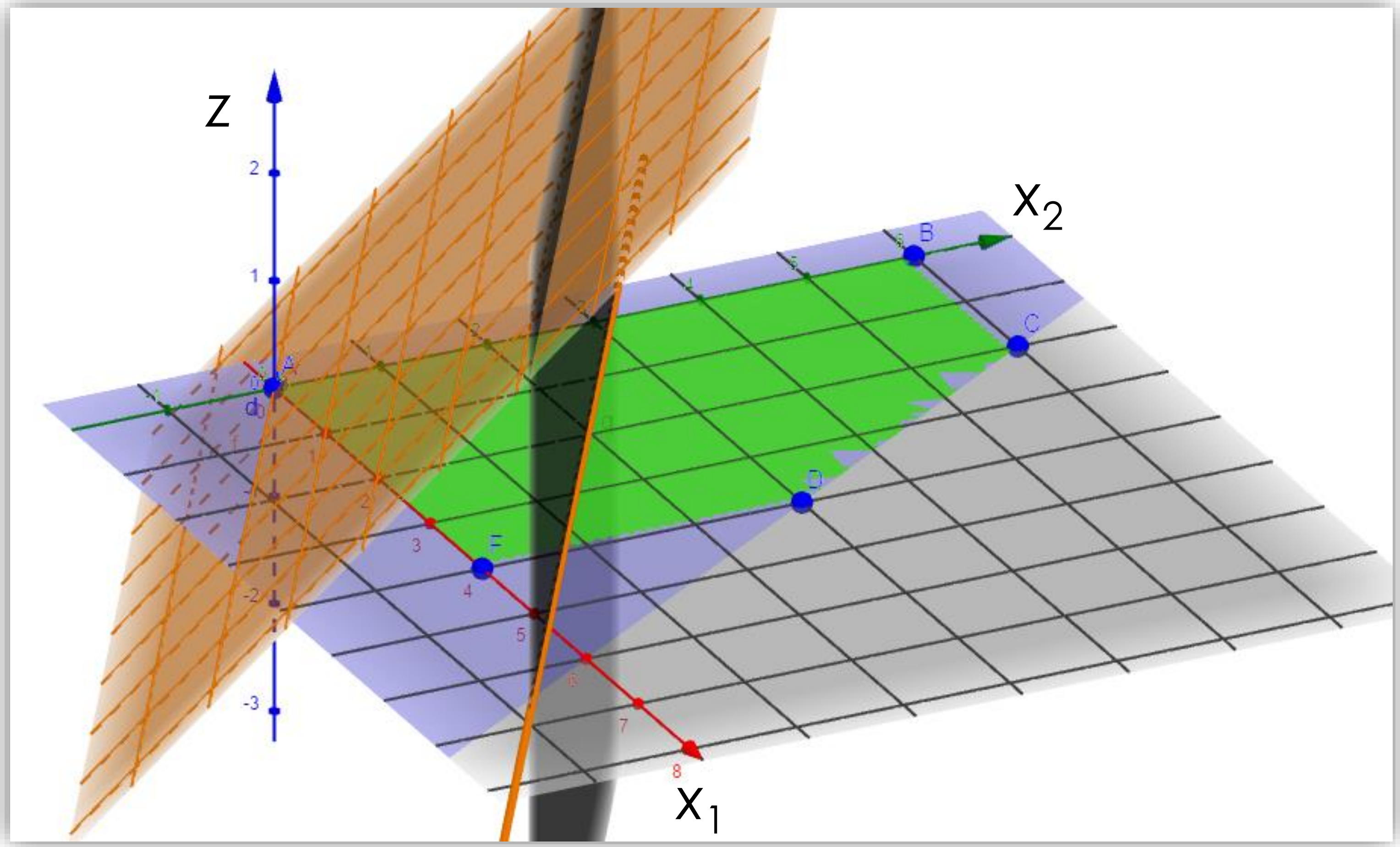
$x_2 \leq 9 - \frac{3}{2}x_1$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$



Artículos de vidrio



Artículos de vidrio

$$\underset{x_1, x_2}{\text{Max}}\; 3x_1 + 5x_2$$

s. a:

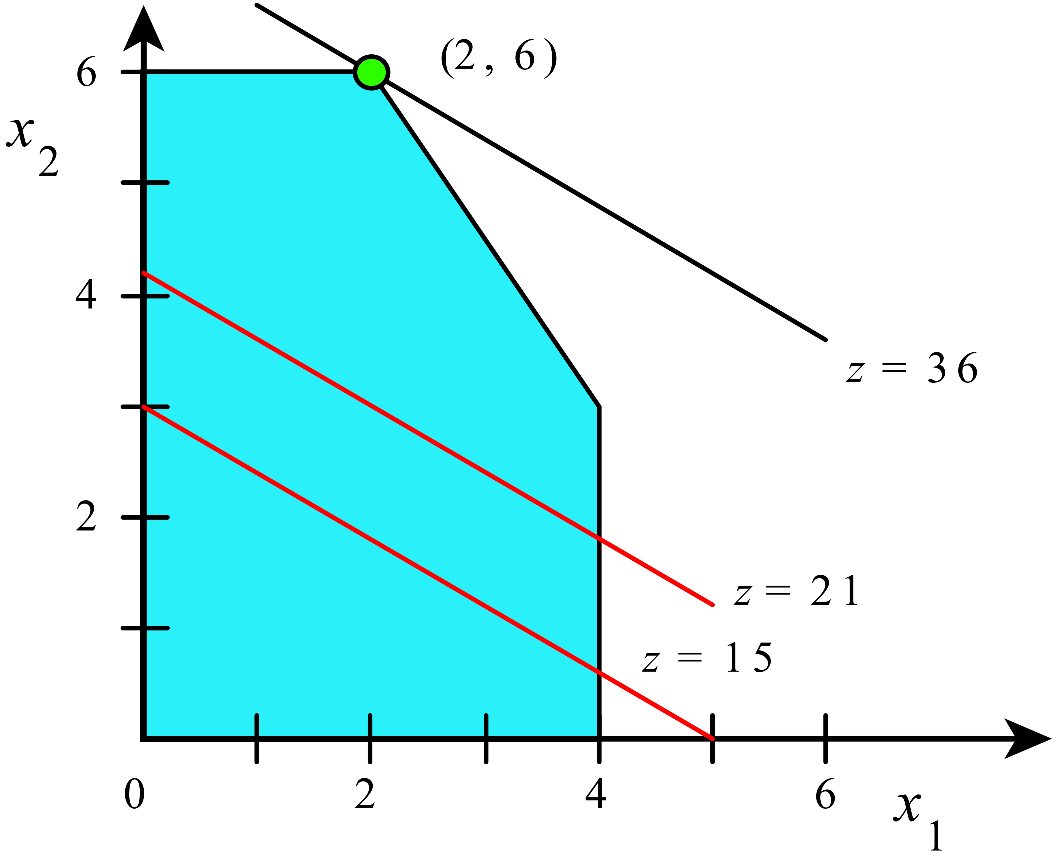
$$x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$



Fábrica de pinturas

Fábrica de pinturas

Una fábrica produce pintura amarilla (A) y pintura celeste (C). Existen dos líneas de producción, una para cada color. La capacidad de la línea A es 60 m^3 por día; mientras que la capacidad de la línea C es 50 m^3 por día. Un metro cúbico de A requiere 1 h-hombre de labor; mientras que un metro cúbico de C requiere 2 h-hombre. Se disponen de 120 h-hombre como máximo por día que pueden ser asignadas indistintamente a la producción de ambos colores. La contribución a los beneficios de la empresa es $20 y $30 por metro cúbico de A y C, respectivamente. Se debe determinar el plan de producción diaria óptimo.

Fábrica de pinturas

- Parámetros:
  - $n = 2$
  - $m = 3$
  - b = 20 30 (\$/m^3)
  - s = 60 (lm^3 /d)

    50 (m^3 /d)

    120 (h-hombre/d)
- Variables de decisión:
  - x = A C (m^3 /d)

$$
\begin{array}{ccc}
 & \begin{array}{cc} A & C \end{array} & \\
A = & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} LA \\ LC \\ MO \end{array}
\end{array}
$$

Fábrica de pinturas

- Función objetivo:
  - Beneficios ($/d): $20A + 30C$
- Restricciones:
  - Capacidad de la línea A (m^3 /d): $A \leq 60$
  - Capacidad de la línea C (m^3 /d): $C \leq 50$
  - Mano de obra (h-hombre/d): $A + 2C = 120$

Fábrica de pinturas

$$\underset{A,C}{\text{Max}}\ 20A + 30C$$

$$\text{s. a}:$$

$$A \leq 60$$

$$C \leq 50$$

$$A + 2C \leq 120$$

$$A \geq 0, C \geq 0$$

Pinturas.lg4

Modelo en LINGO

Lingo Model - Pinturas

```
! Fábrica de pinturas;
[FO] MAX = 20*A+30*C;

[LA] A <= 60;
[LC] C <= 50;
[MO] A+2*C <= 120;
```

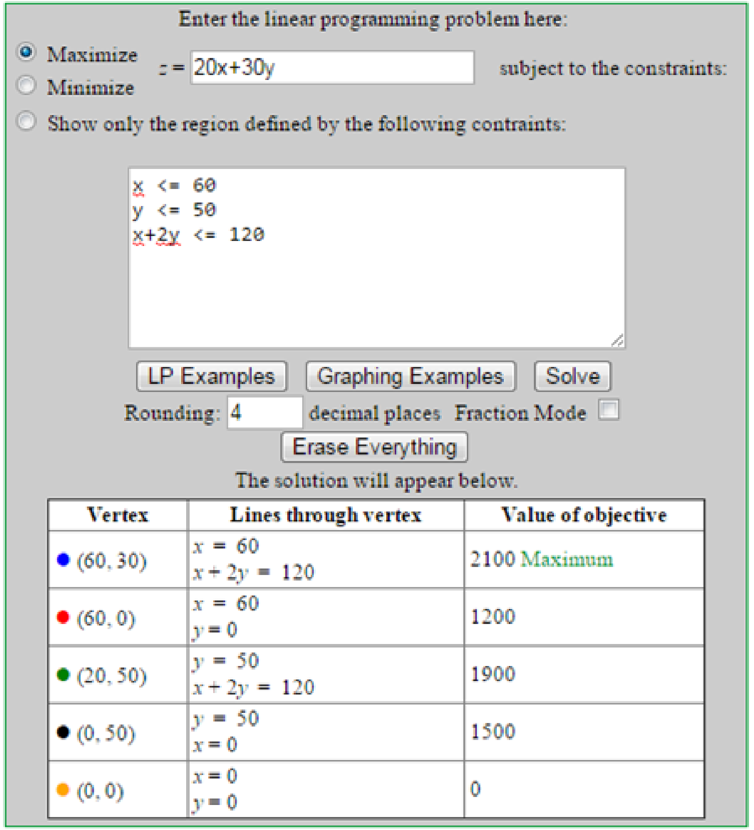
Resultados en LINGO

Variable	Value	Reduced Cost
A	60.00000	0.000000
C	30.00000	0.000000

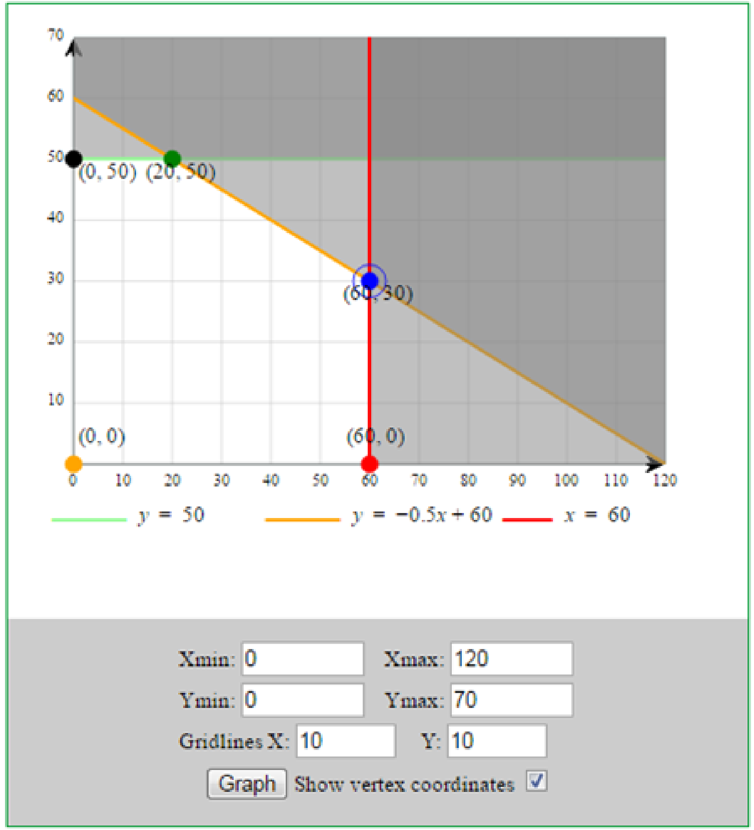
Row	Slack or Surplus	Dual Price
FO	2100.000	1.000000
LA	0.000000	5.000000
LC	20.00000	0.000000
MO	0.000000	15.00000

Se activaron LA y MO. Hacen valer la igualdad. Se acabaron esos recursos.

Fábrica de pinturas



Vertex	Lines through vertex	Value of objective
(60, 30)	$x = 60$ $x + 2y = 120$	2100 Maximum
(60, 0)	$x = 60$ $y = 0$	1200
(20, 50)	$y = 50$ $x + 2y = 120$	1900
(0, 50)	$y = 50$ $x = 0$	1500
(0, 0)	$x = 0$ $y = 0$	0



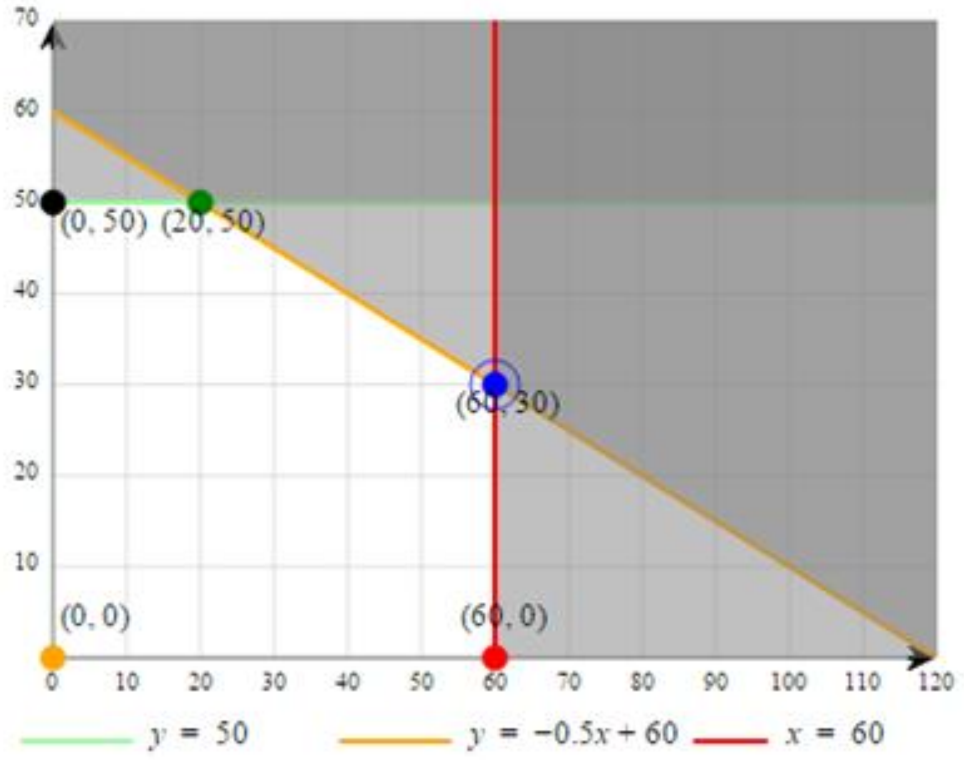
Simplex

Holgura y exceso

$g(x) \leq 0$	$-3 \leq 0$	$3 \leq 0$
$g(x) + Slack = 0$	$-3 + 3 = 0$	$3 + (-3) = 0$
$g(x) \geq 0$	$3 \geq 0$	$-3 \geq 0$
$g(x) - Surplus = 0$	$3 - 3 = 0$	$-3 - (-3) = 0$

Holgura y exceso

- En la región factible:
  - $Slack \geq 0$
  - $Surplus \geq 0$
- Restricción activa:
  - $Slack = 0$
  - $Surplus = 0$



Fábrica de pinturas

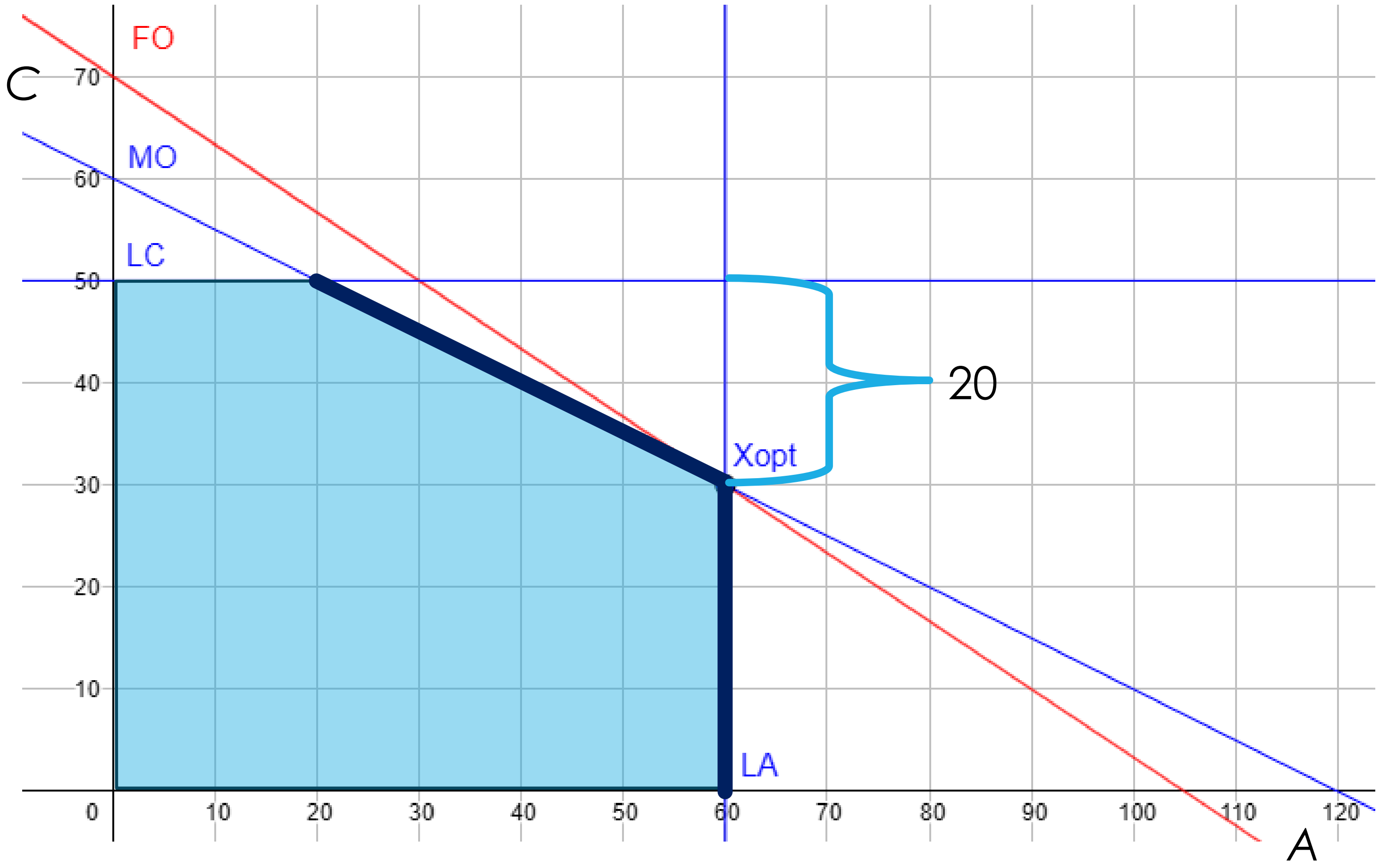
```
[FO] MAX = 20*A+30*C;

[LA] A <= 60;
[LC] C <= 50;
[MO] A+2*C <= 120;
```

Variable	Value	Reduced Cost
A	60.00000	0.000000
C	30.00000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
FO	2100.000	1.000000
LA	0.000000	5.000000
LC	20.00000	0.000000
MO	0.000000	15.00000

Fábrica de pinturas

Row	Slack or Surplus
FO	2100.000
LA	0.000000
LC	20.00000
MO	0.000000



Precio dual

Precio dual

- El precio dual de una restricción es la cantidad en que la función objetivo mejorará cuando se incremente una unidad a la constante del lado derecho de la restricción que tiene un precio dual positivo.
- El precio dual de una restricción se llama también precio sombra debido a que indica cuánto se debería estar dispuestos a pagar como máximo por una unidad extra del recurso en consideración.

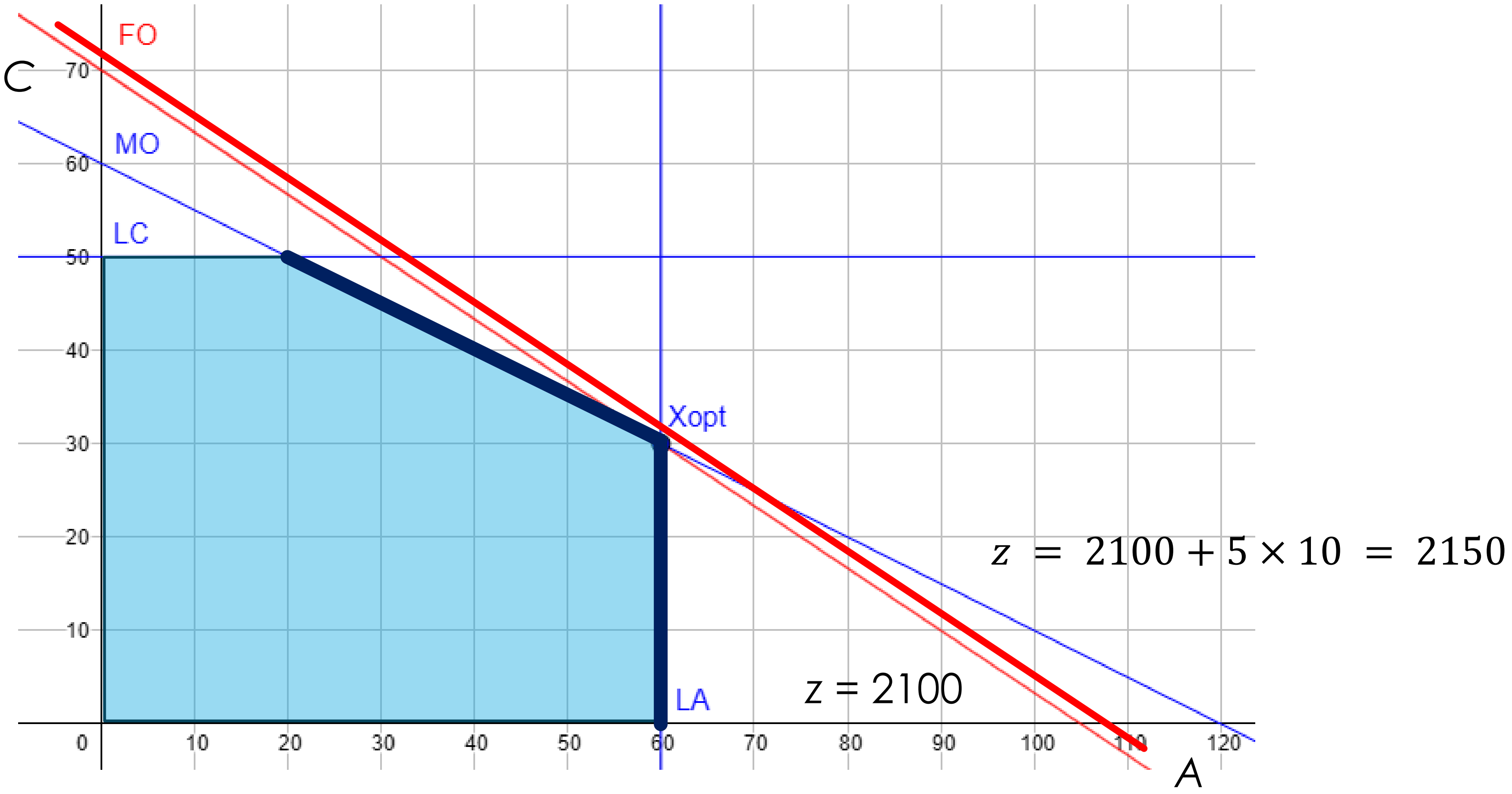
Fábrica de pinturas

```
[FO] MAX = 20*A+30*C;

[LA] A <= 60;
[LC] C <= 50;
[MO] A+2*C <= 120;
```

Variable	Value	Reduced Cost
A	60.00000	0.000000
C	30.00000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
FO	2100.000	1.000000
LA	0.000000	5.000000
LC	20.00000	0.000000
MO	0.000000	15.00000

Precio dual



FO
C
70
MO
60
LC
50
40
Xopt
30
20
10
LA
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
120
A
$z = 2100$
$z = 2100 + 5 \times 10 = 2150$

Modelo en LINGO

Lingo Model - Pinturas

```
! Fábrica de pinturas;
[FO] MAX = 20*A+30*C;

[LA] A <= 70;
[LC] C <= 50;
[MO] A+2*C <= 120;
```

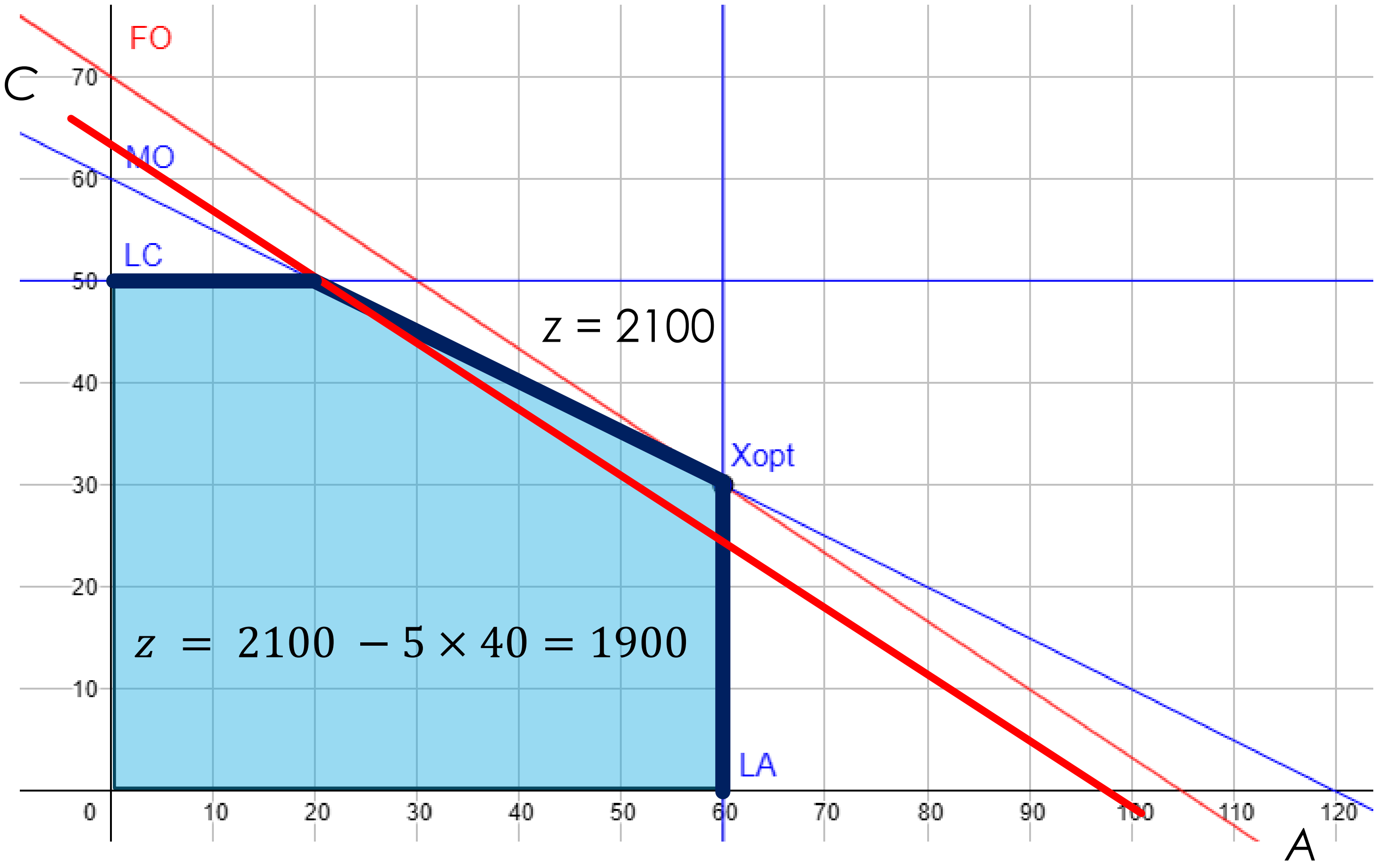
Resultados en LINGO

Variable	Value	Reduced Cost
A	70.00000	0.000000
C	25.00000	0.000000

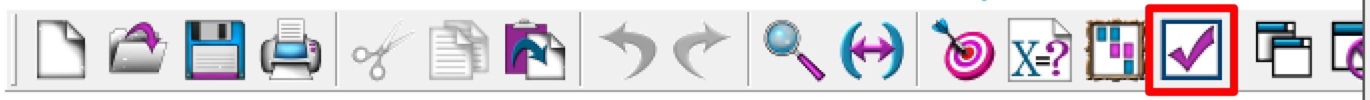
Row	Slack or Surplus	Dual Price
FO	2150.000	1.000000
LA	0.000000	5.000000
LC	25.00000	0.000000
MO	0.000000	15.00000

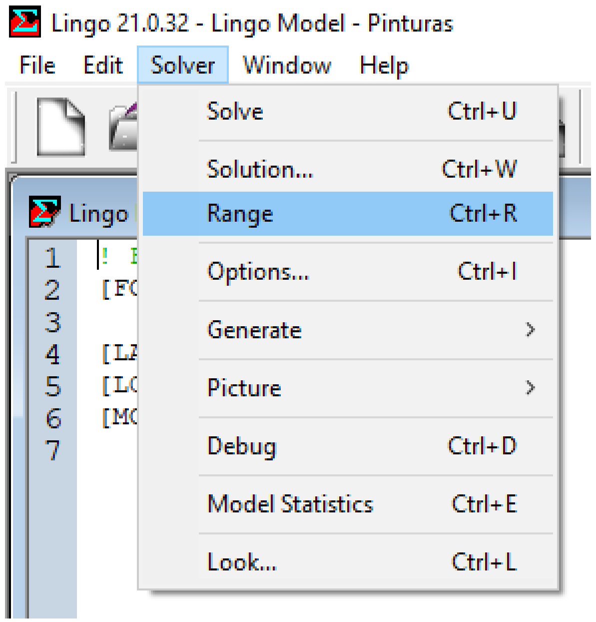
Máximo incremento de LA

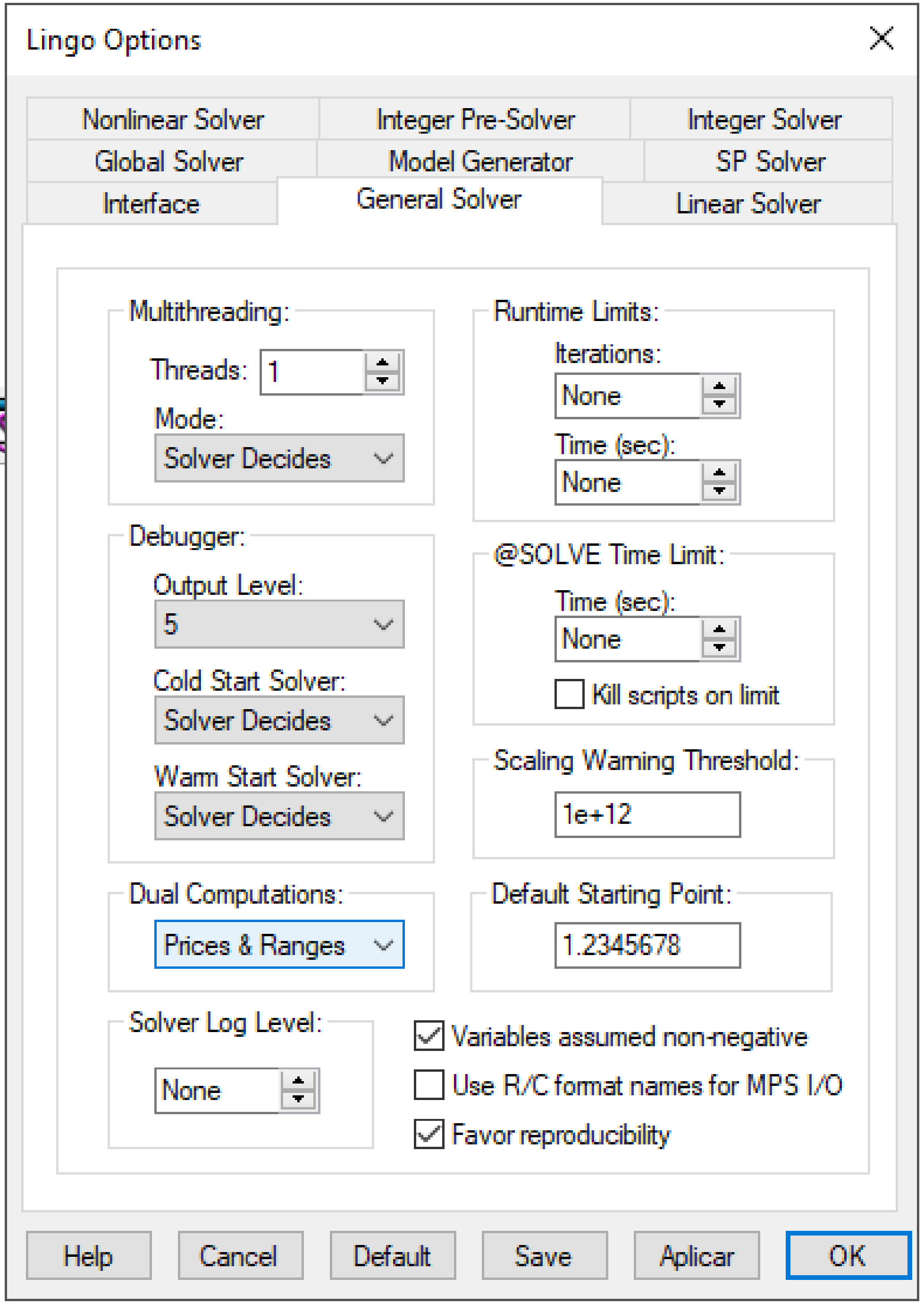
Máximo decremento de LA



Informe *Range*







Informe *Range*

Ranges in which the basis is unchanged:

Objective Coefficient Ranges:

Variable	Current Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
A	20.00000	INFINITY	5.000000
C	30.00000	10.00000	30.00000

Righthand Side Ranges:

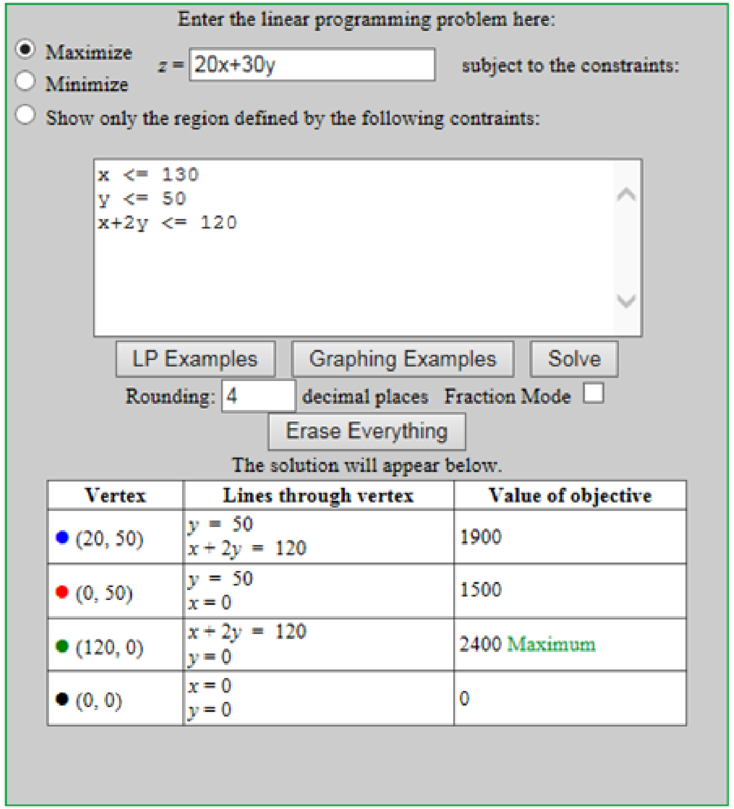
Row	Current RHS	Allowable Increase	Allowable Decrease
LA	60.00000	60.00000	40.00000
LC	50.00000	INFINITY	20.00000
MO	120.0000	40.00000	60.00000

Costo reducido

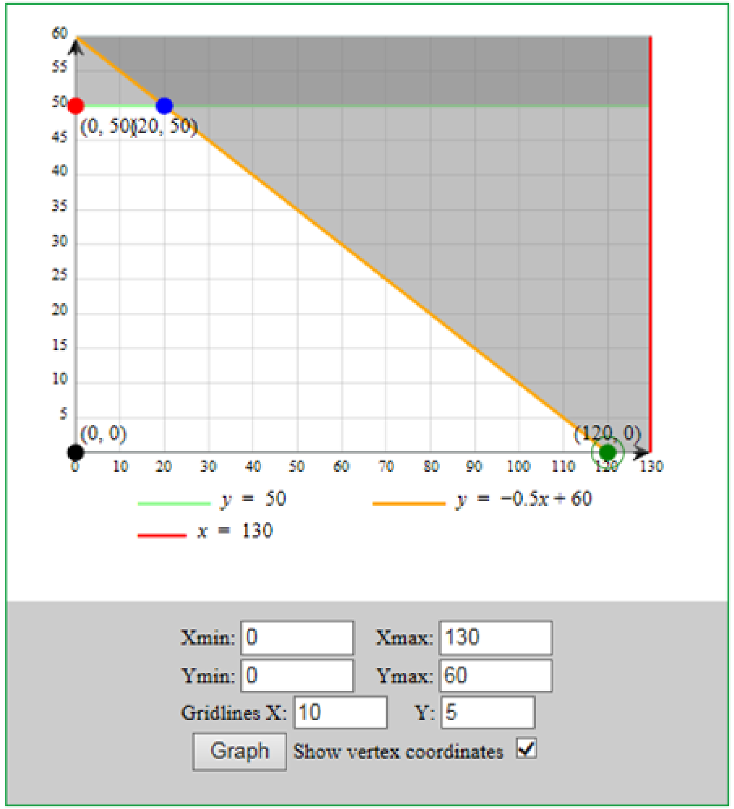
Fábrica de pinturas

Como en este ejemplo ambas variables de decisión adoptaron valores no nulos, para analizar la sensibilidad de la solución con respecto a las variables, se modifica ligeramente el problema, elevando la capacidad de la línea A a 130 m^3/d.

Fábrica de pinturas



Vertex	Lines through vertex	Value of objective
(20, 50)	$y = 50$ $x + 2y = 120$	1900
(0, 50)	$y = 50$ $x = 0$	1500
(120, 0)	$x + 2y = 120$ $y = 0$	2400 Maximum
(0, 0)	$x = 0$ $y = 0$	0



Pinturas con c nulo.lg4

Fábrica de pinturas

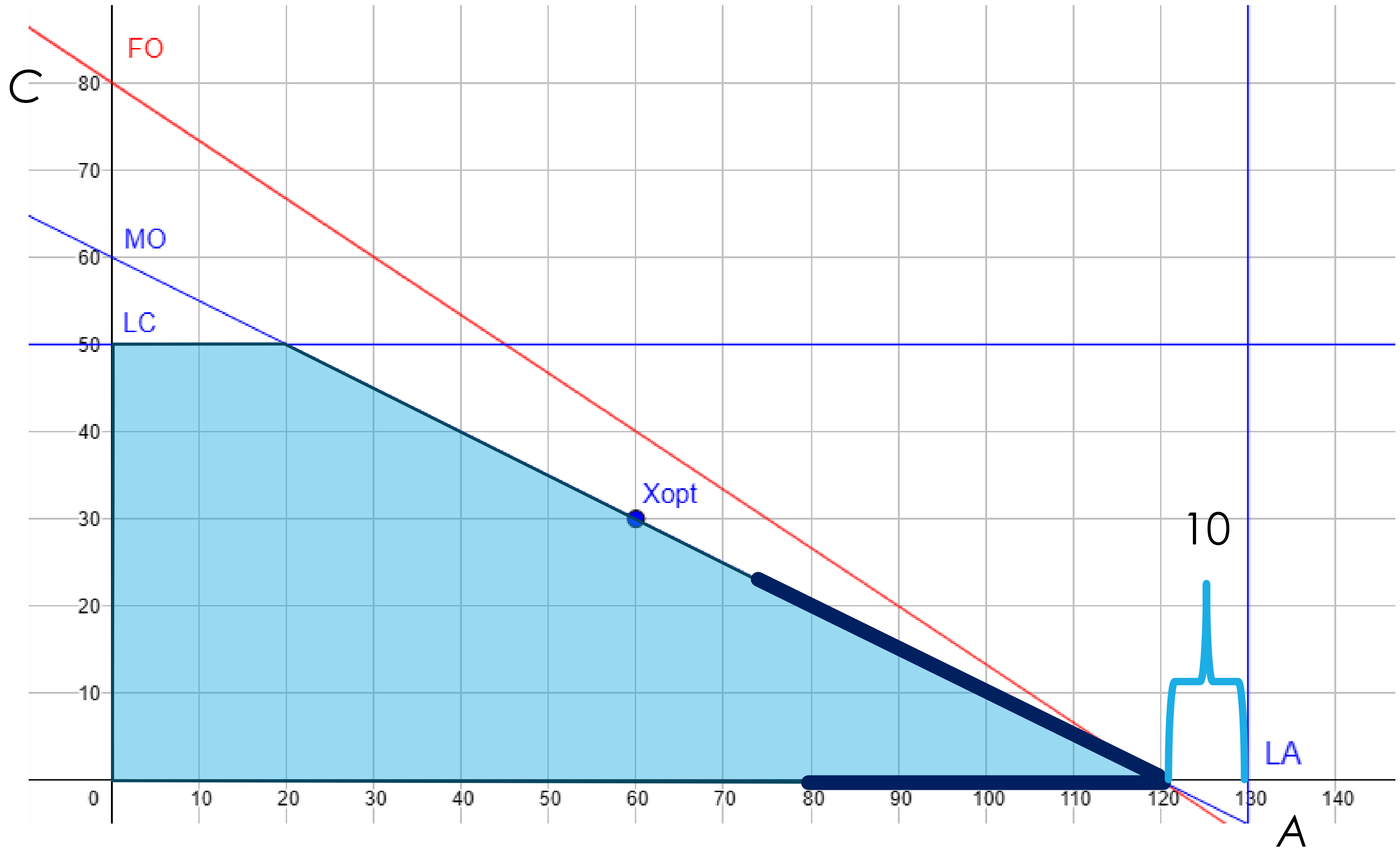
```
[FO] MAX = 20*A+30*C;

[LA] A <= 130;
[LC] C <= 50;
[MO] A+2*C <= 120;
```

Variable	Value	Reduced Cost
A	120.0000	0.000000
C	0.000000	10.00000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
FO	2400.000	1.000000
LA	10.00000	0.000000
LC	50.00000	0.000000
MO	0.000000	20.00000

Fábrica de pinturas

Row	Slack or Surplus
FO	2400.000
LA	10.00000
LC	50.00000
MO	0.000000



Costo reducido

- El costo reducido de una variable es la cantidad que debe sumarse o restarse del coeficiente de la variable en cuestión en la función objetivo para que convenga dar un valor positivo a dicha variable.
- El costo reducido, o costo marginal, de una variable es la penalidad que se tendría que pagar por incrementar una unidad de la variable que tiene un valor nulo en el punto óptimo.

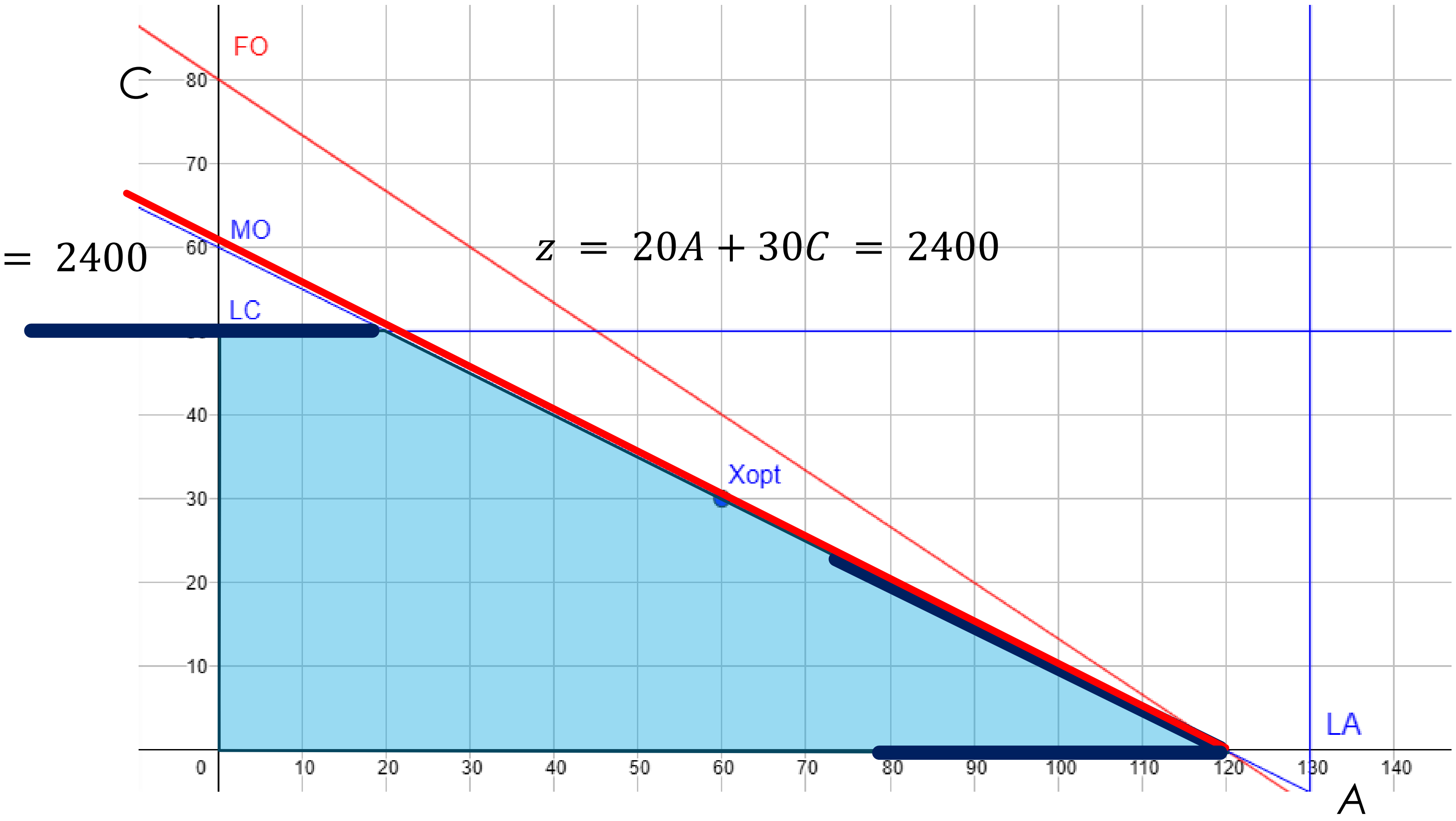
Fábrica de pinturas

```
[FO] MAX = 20*A+30*C;

[LA] A <= 130;
[LC] C <= 50;
[MO] A+2*C <= 120;
```

Variable	Value	Reduced Cost
A	120.0000	0.000000
C	0.000000	10.00000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
FO	2400.000	1.000000
LA	10.00000	0.000000
LC	50.00000	0.000000
MO	0.000000	20.00000

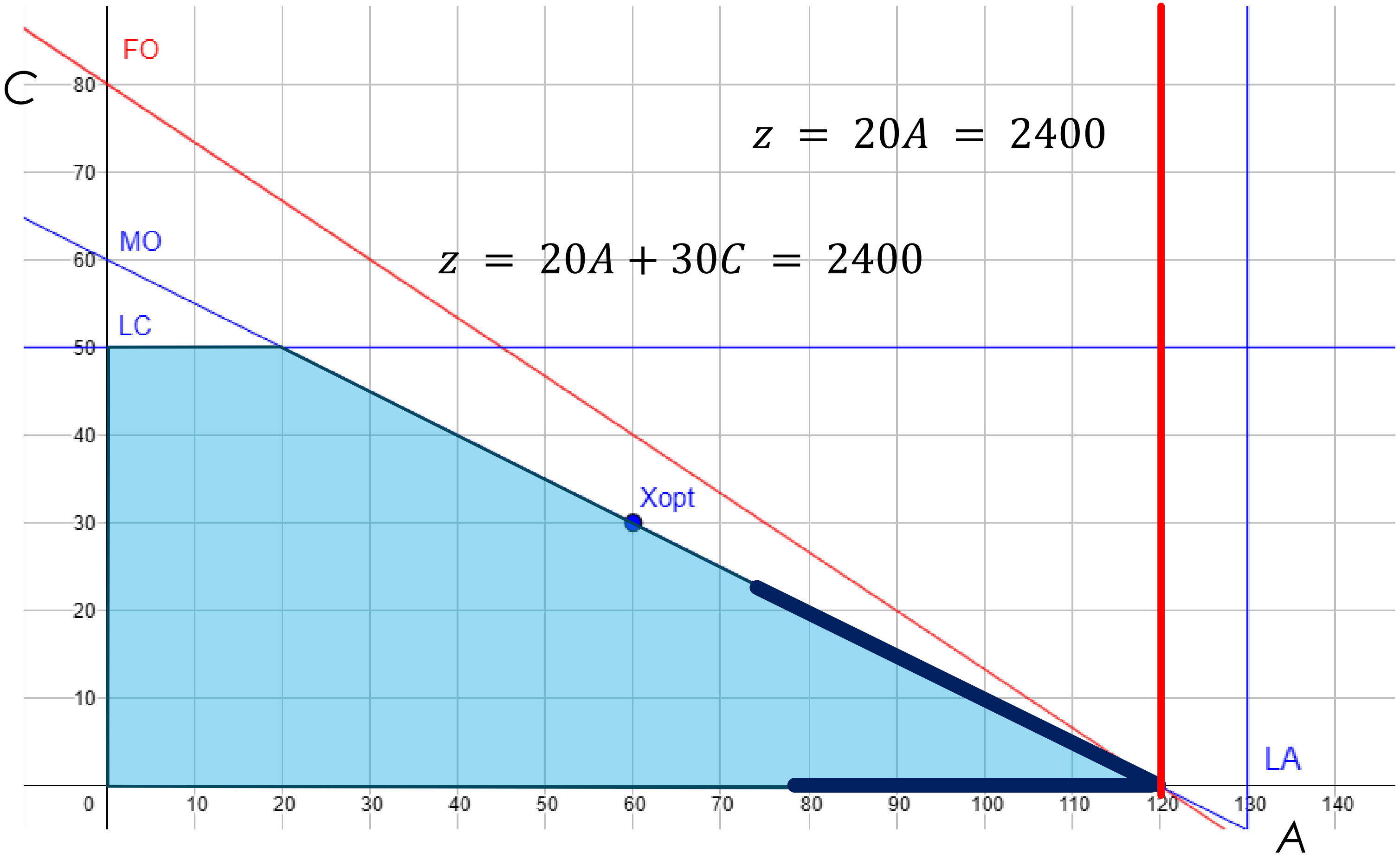
Máximo incremento



$z = 20A + 40C = 2400$

$z = 20A + 30C = 2400$

Máximo decremento



$$z = 20A = 2400$$

$$z = 20A + 30C = 2400$$

Informe *Range*

Ranges in which the basis is unchanged:

Objective Coefficient Ranges:

Variable	Current Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
A	20.00000	INFINITY	5.000000
C	30.00000	10.00000	INFINITY

Righthand Side Ranges:

Row	Current RHS	Allowable Increase	Allowable Decrease
LA	130.0000	INFINITY	10.00000
LC	50.00000	INFINITY	50.00000
MO	120.0000	10.00000	120.0000