Simulación y Optimización

Programación lineal
Parte I

Enrique E. Tarifa, Facultad de Ingeniería, UNJu

Programación matemática

Programación matemática

$$\underset{x_j}{\text{Max}}\, FO\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right) \quad j = 1, 2, \dots, n$$

s. a:

$$h_i\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$g_k\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right) \leq 0 \quad k = 1, 2, \dots, o$$

$$GL = n - m$$

Clasificación de modelos

- Programación Lineal (LP, *Linear Programming*)
- Programación No Lineal (NLP, *Nonlinear Programning*)
- Programación Lineal Entera (ILP, *Integer Linear Programming*)
- Programación No Lineal Entera (INLP, *Integer Nonlinear Programming*)
- Programación Lineal Entera Mixta (MILP, *Mixed Integer Linear Programming*)
- Programación No Lineal Entera Mixta (MINLP, *Mixed Integer Nonlinear Programming*)

$$FO(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$$

Programación Lineal

Programación lineal

$$\max_{x_j} \quad c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_j x_j + \ldots + c_n x_n \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

s. a:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1j} x_j + \ldots + a_{1n} x_n \leq b_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2j} x_j + \ldots + a_{2n} x_n \leq b_2$$
$$\ldots$$
$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{ij} x_j + \ldots + a_{in} x_{in} \leq b_i$$
$$\ldots$$
$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mj} x_j + \ldots + a_{mn} x_{mn} \leq b_m$$
$$x_j \geq 0 \quad j = 1 \ldots n, b_i \geq 0 \quad i = 1 \ldots m$$

$$GL = n$$

Programación lineal

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_n \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Programación lineal

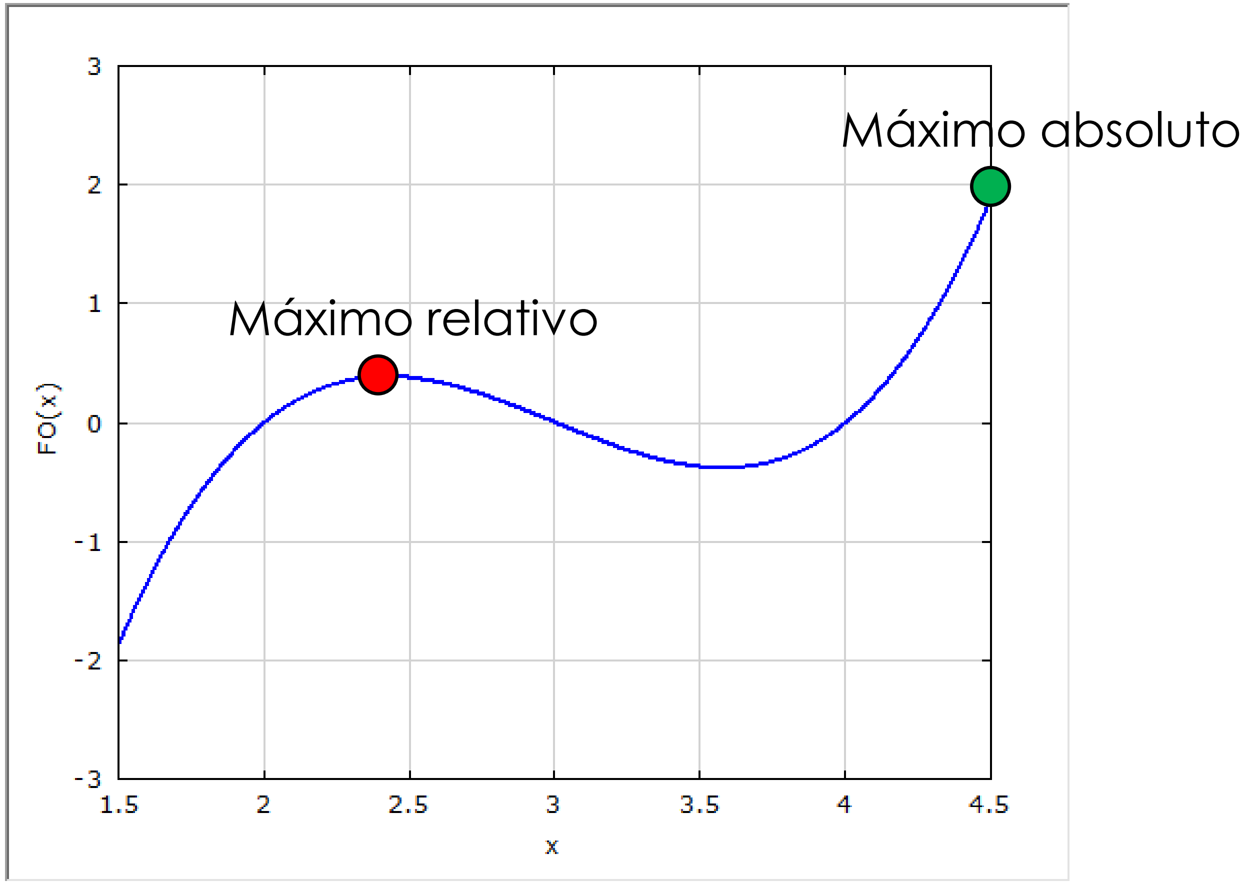
$$\operatorname*{Max}_{x}\; c^{\mathrm{T}} x$$

s. a:

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0 \quad b \geq 0$$

Modelo no lineal



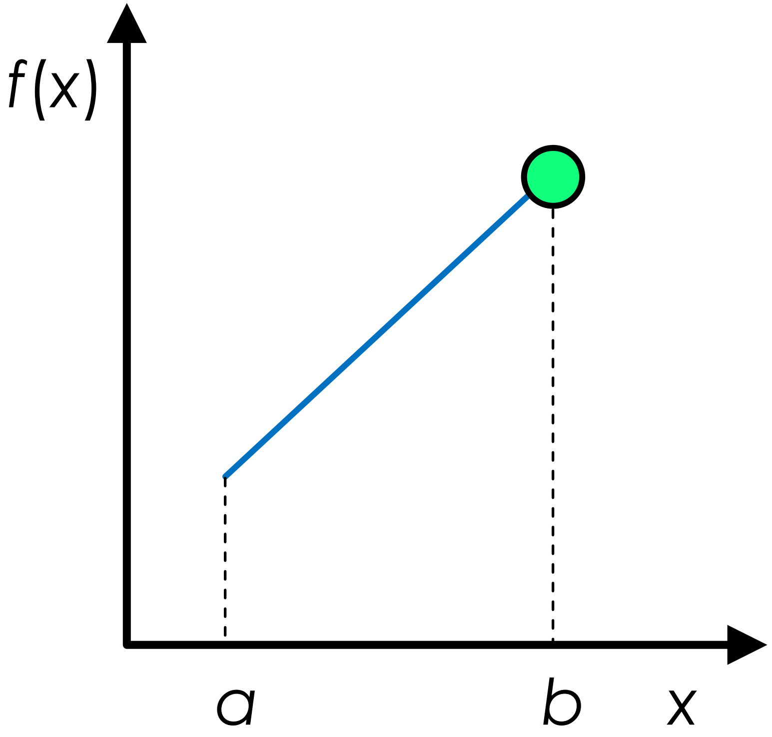
Programación lineal

$$\underset{x}{\text{Max}}\ f(x)$$

s. a:

$$x \geq a$$

$$x \leq b$$



- El óptimo es global.
- Es único.
- Está en un extremo.

Fábrica de vidrio

Artículos de vidrio

Una empresa produce dos tipos de vidrio de alta calidad. Cada producto es producido en sendas plantas. En una tercera, se realiza el *packaging* de ambos. Se desea determinar la proporción correcta a producir.

Artículos de vidrio

Planta	Producto 1 (kW·min/m²)	Producto 2 (kW·min/m²)	Capacidad (kW)
1	1	no se fabrica	4
2	no se fabrica	2	12
3	3	2	18

	Producto 1	Producto 2
Ganancia ($/m²)	3	5

Artículos de vidrio

- x_1: Velocidad de producción del artículo 1 (m^2/min)
- x_2: Velocidad de producción del artículo 2 (m^2/min)
- Función objetivo:
  - Ganancia ($/min): $3x_1 + 5x_2$
- Restricciones:
  - Potencia consumida por la planta 1 (kW): $x_1 \leq 4$
  - Potencia consumida por la planta 2 (kW): $2x_2 \leq 12$
  - Potencia consumida por la planta 3 (kW): $3x_1 + 2x_2 \leq 18$

Artículos de vidrio

$$\max_{x_1, x_2} 3x_1 + 5x_2$$

s. a:

$$x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Solución gráfica

Método gráfico

Región factible y curvas de nivel

$z = 3x_1 + 5x_2$

s. a:

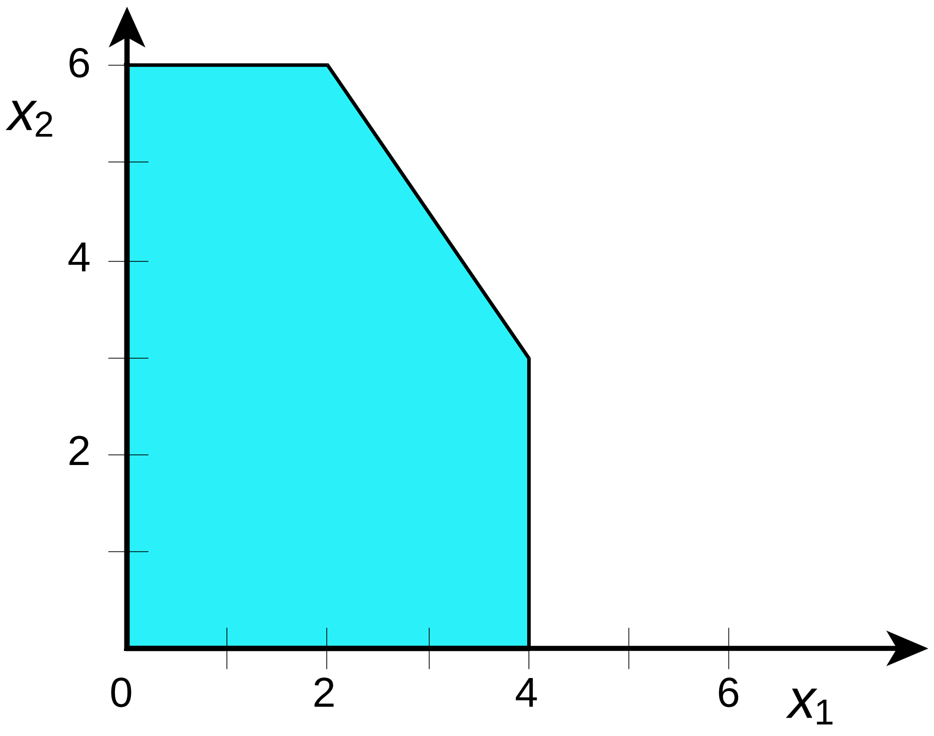
$x_1 \leq 4$

$2x_2 \leq 12$

$3x_1 + 2x_2 \leq 18$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$



Región factible y curvas de nivel

$z = 3x_1 + 5x_2$

s. a:

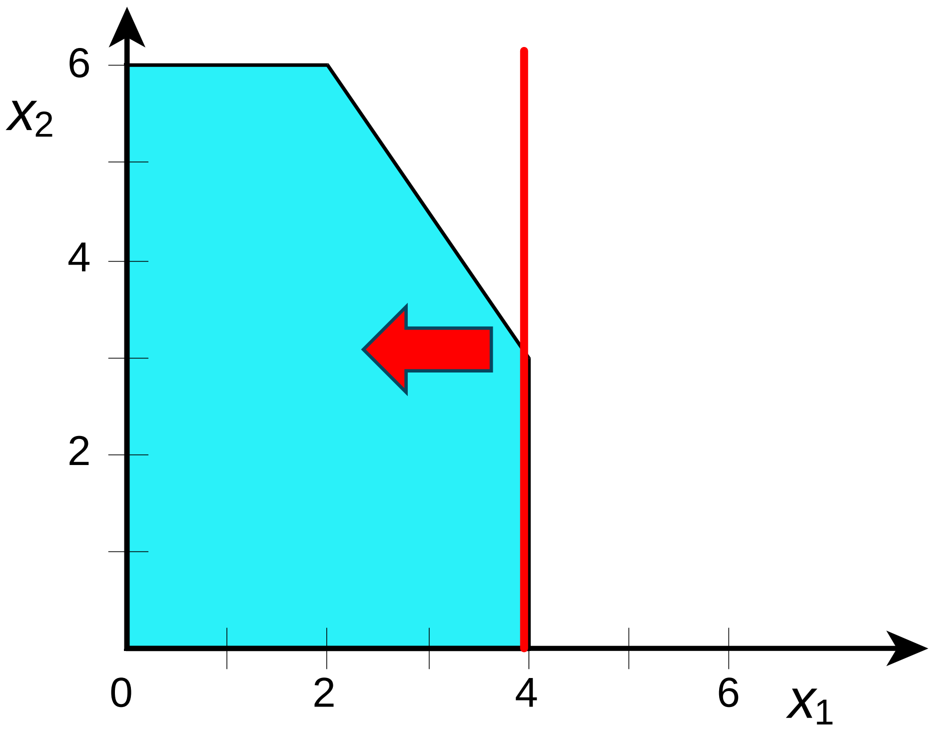
$x_1 \leq 4$

$2x_2 \leq 12$

$3x_1 + 2x_2 \leq 18$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$



Región factible y curvas de nivel

$z = 3x_1 + 5x_2$

s. a:

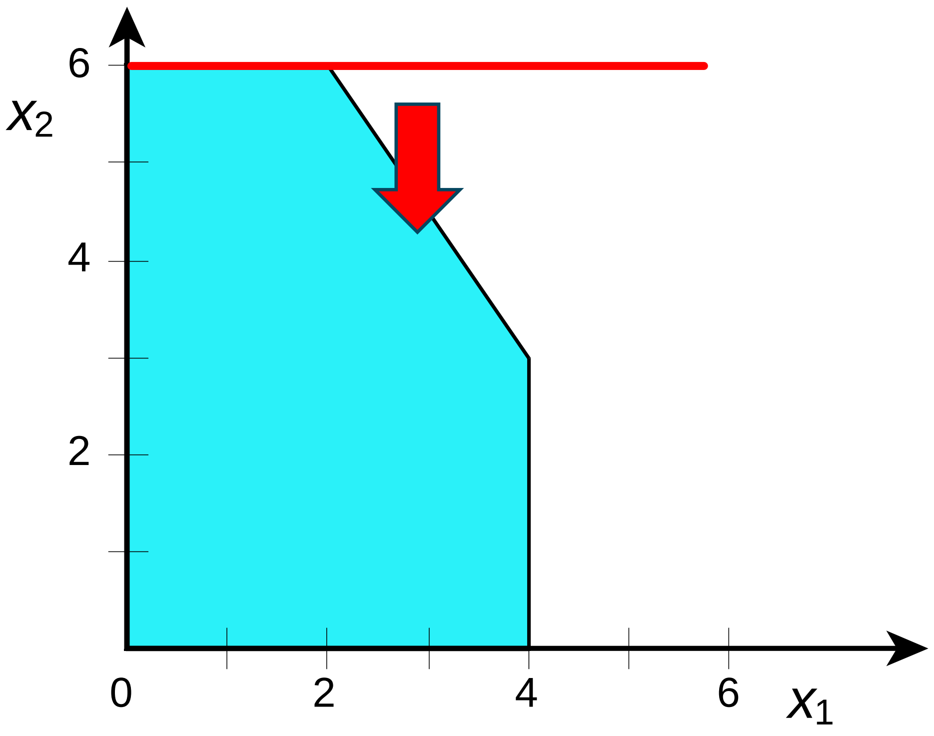
$x_1 \leq 4$

$2x_2 \leq 12$

$3x_1 + 2x_2 \leq 18$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$



Región factible y curvas de nivel

$z = 3x_1 + 5x_2$

s. a:

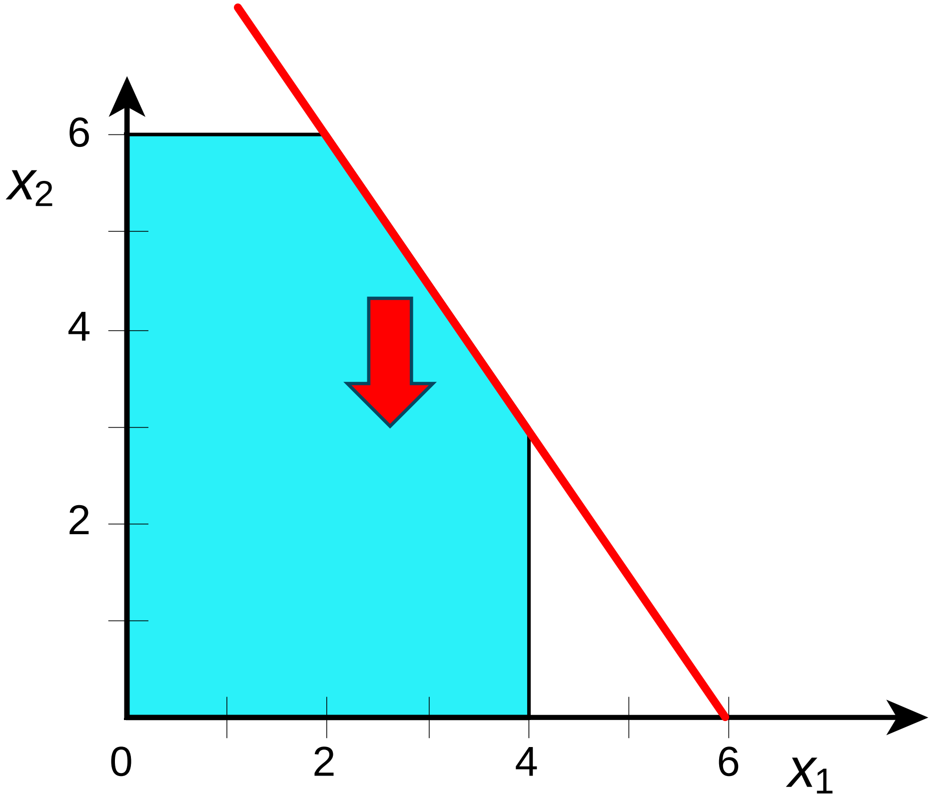
$x_1 \leq 4$

$2x_2 \leq 12$

$3x_1 + 2x_2 \leq 18$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$



Región factible y curvas de nivel

$$z = 3x_1 + 5x_2$$

s. a:

$$x_1 \le 4$$

$$2x_2 \le 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \le 18$$

$$x_1 \ge 0$$

$$x_2 \ge 0$$

$$x_2 = \frac{1}{5}z - \frac{3}{5}x_1$$

s. a:

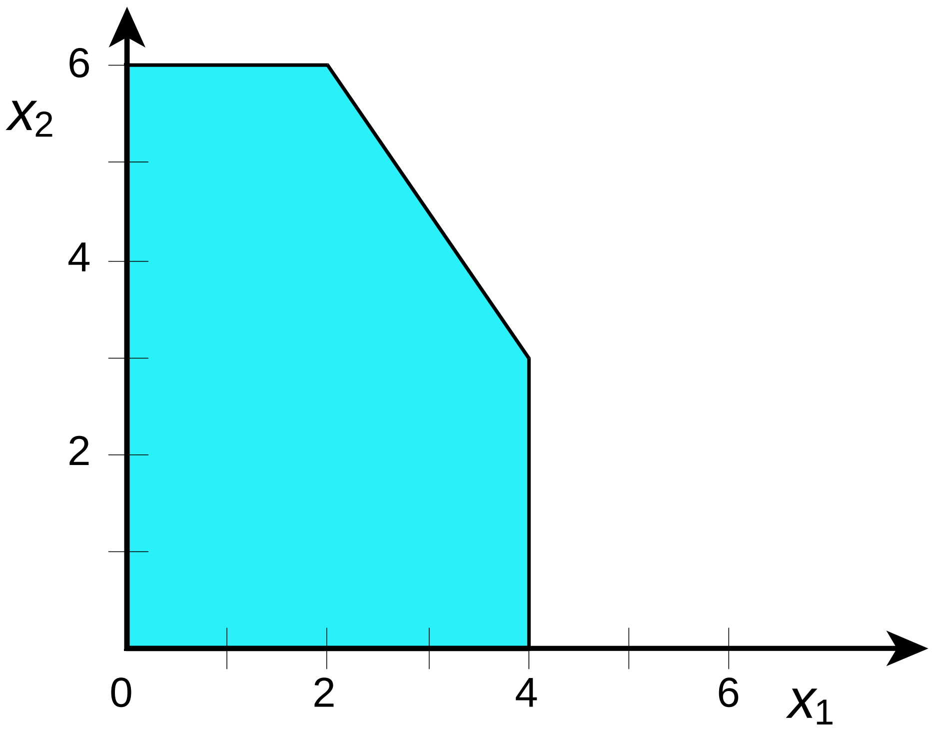
$$x_1 \le 4$$

$$x_2 \le 6$$

$$x_2 \le 9 - \frac{3}{2}x_1$$

$$x_1 \ge 0$$

$$x_2 \ge 0$$



Región factible y curvas de nivel

$$z = 3x_1 + 5x_2$$

s. a:

$$x_1 \le 4$$

$$2x_2 \le 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \le 18$$

$$x_1 \ge 0$$

$$x_2 \ge 0$$

$$x_2 = \frac{1}{5}z - \frac{3}{5}x_1$$

s. a:

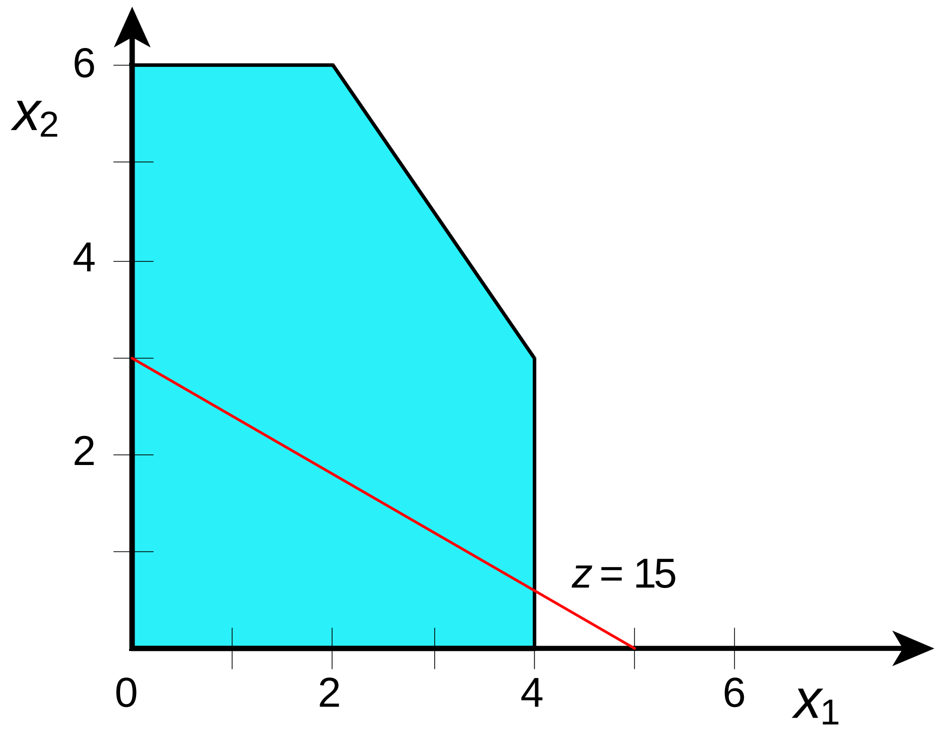
$$x_1 \le 4$$

$$x_2 \le 6$$

$$x_2 \le 9 - \frac{3}{2}x_1$$

$$x_1 \ge 0$$

$$x_2 \ge 0$$



Región factible y curvas de nivel

$$z = 3x_1 + 5x_2$$

s. a:

$$x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$x_2 = \frac{1}{5}z - \frac{3}{5}x_1$$

s. a:

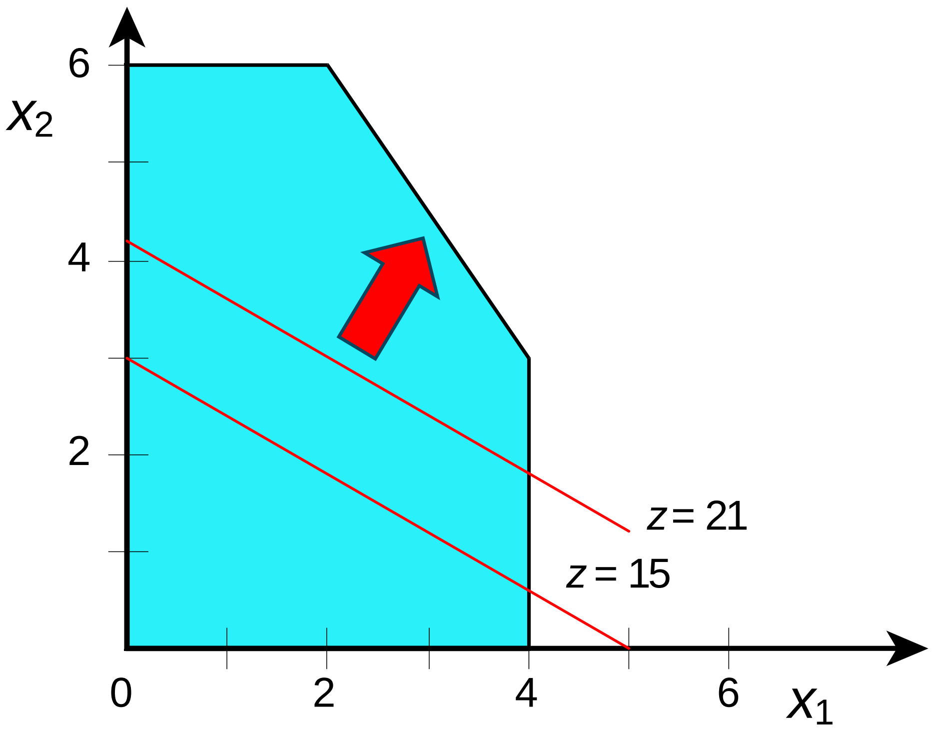
$$x_1 \leq 4$$

$$x_2 \leq 6$$

$$x_2 \leq 9 - \frac{3}{2}x_1$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$



Región factible y curvas de nivel

$$z = 3x_1 + 5x_2$$

s. a:

$$x_1 \le 4$$

$$2x_2 \le 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \le 18$$

$$x_1 \ge 0$$

$$x_2 \ge 0$$

$$x_2 = \frac{1}{5}z - \frac{3}{5}x_1$$

s. a:

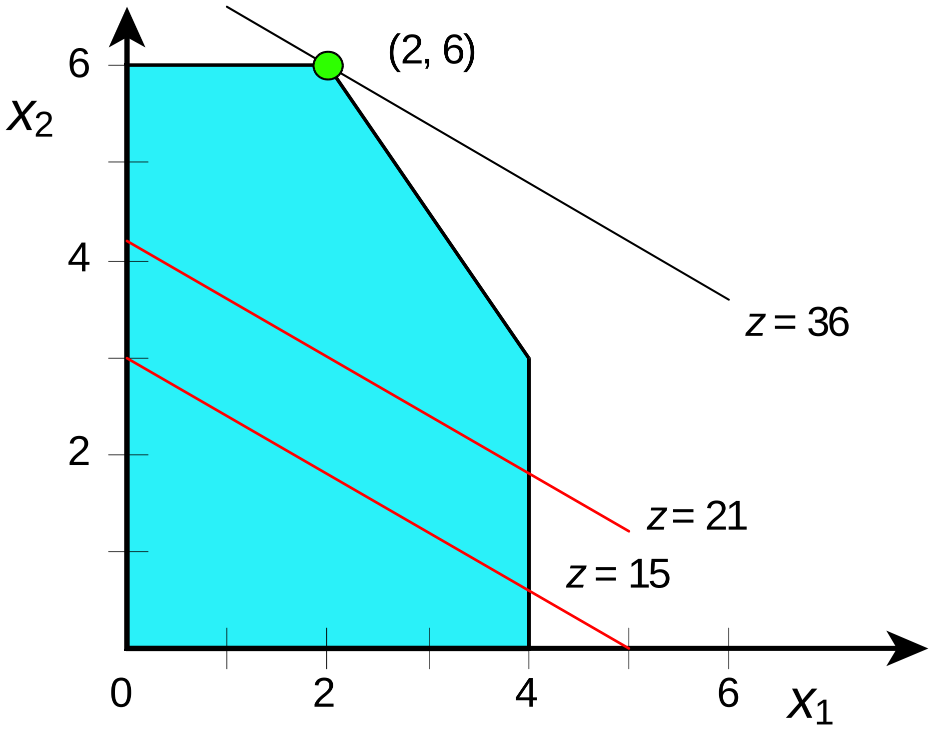
$$x_1 \le 4$$

$$x_2 \le 6$$

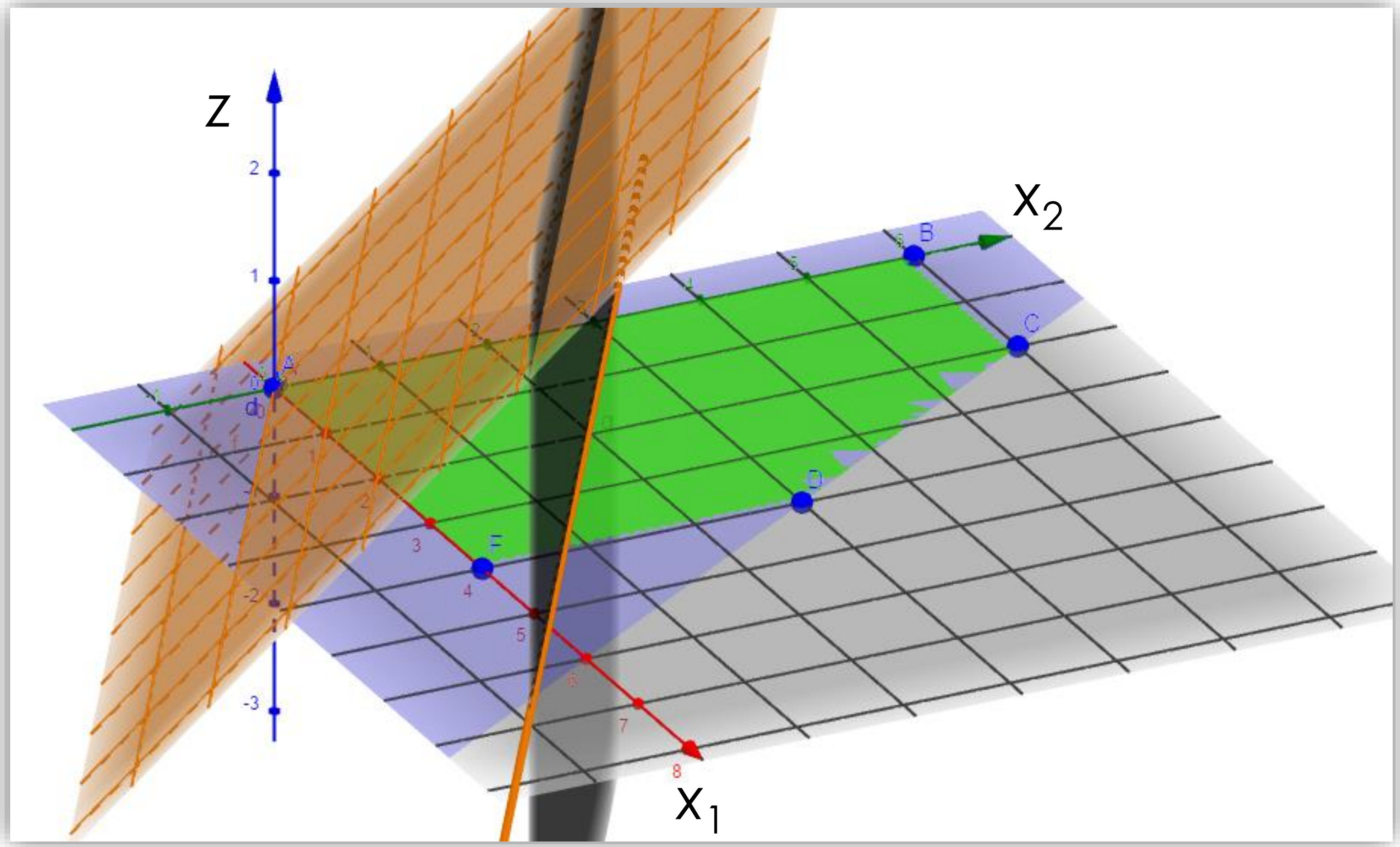
$$x_2 \le 9 - \frac{3}{2}x_1$$

$$x_1 \ge 0$$

$$x_2 \ge 0$$



Artículos de vidrio



Artículos de vidrio

$$\max_{x_1, x_2} 3x_1 + 5x_2$$

s. a:

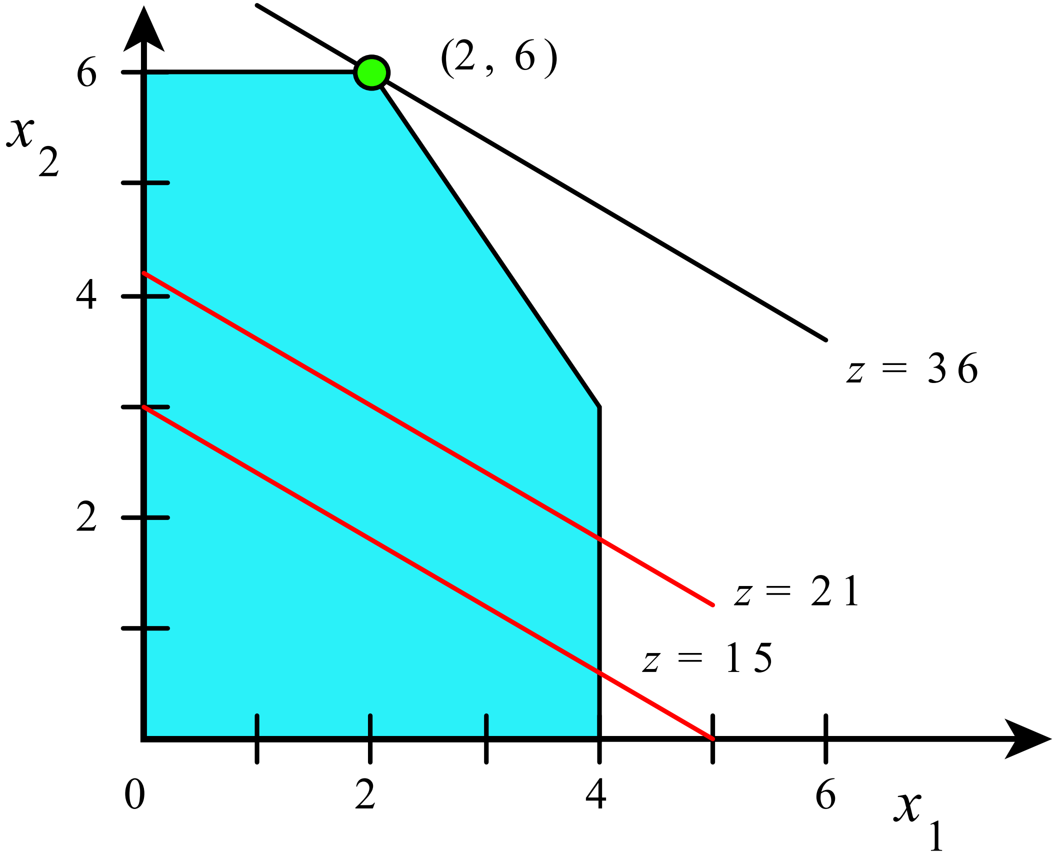
$x_1 \leq 4$

$2x_2 \leq 12$

$3x_1 + 2x_2 \leq 18$

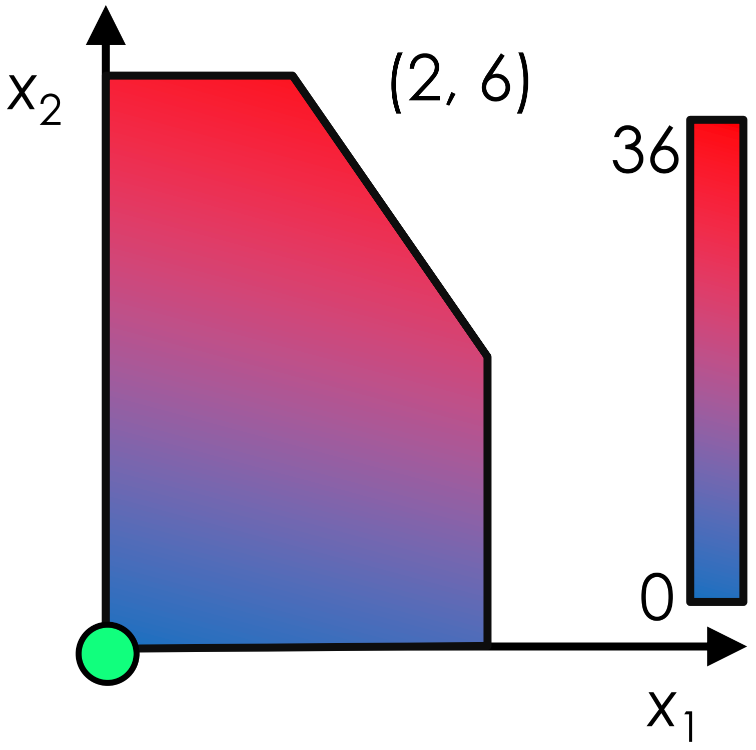
$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$



El método simplex

Simplex (Dantzig, 1947)



Vidrio.lg4

Modelo en LINGO

Lingo Model - Vidrio

```
! Artículos de vidrio;
[FO] MAX = 3*x1+5*x2;

! Restricciones;
[R1] x1 <= 4;
[R2] 2*x2 <= 12;
[R3] 3*x1+2*x2 <= 18;
```

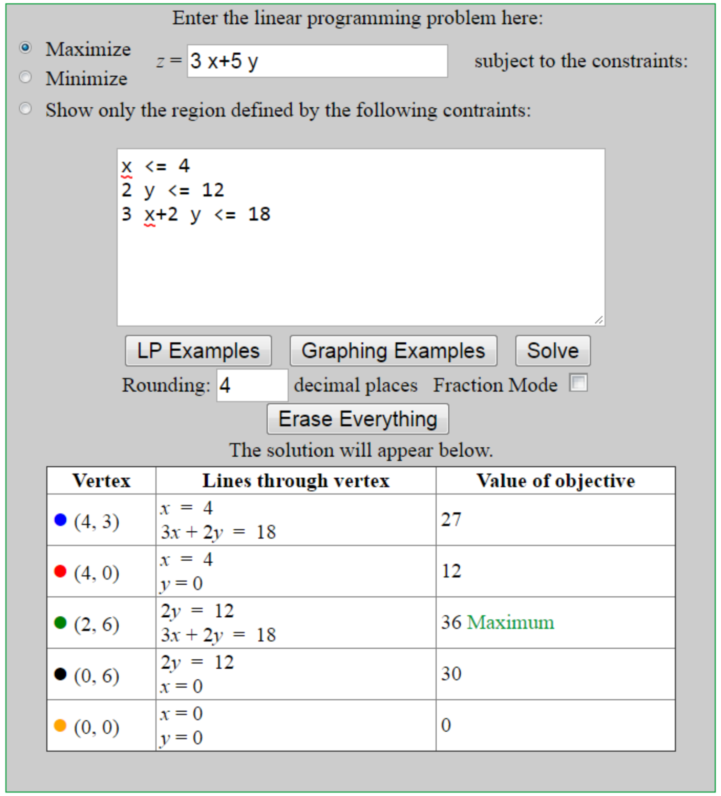
Resultados en LINGO

Variable	Value	Reduced Cost
X1	2.000000	0.000000
X2	6.000000	0.000000

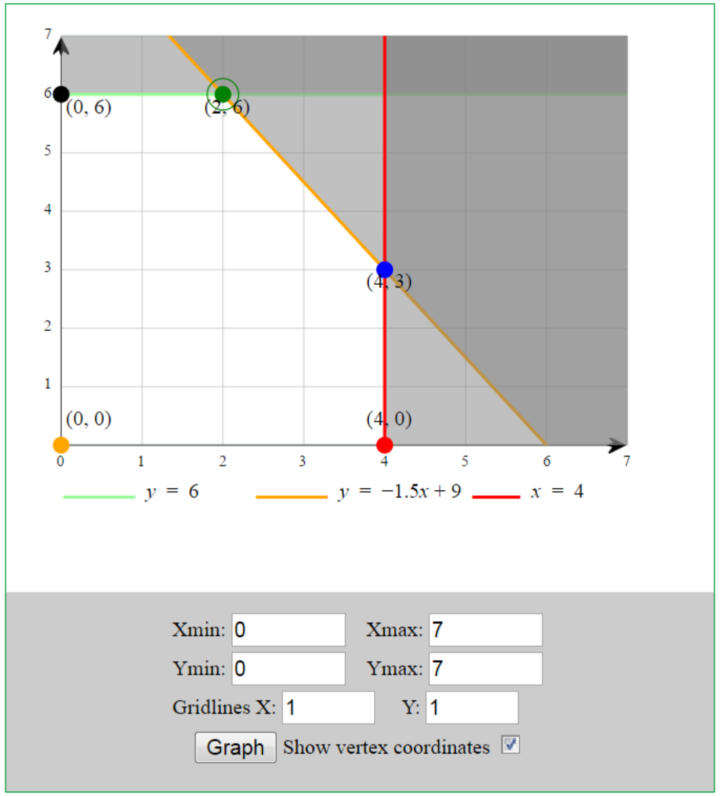
Row	Slack or Surplus	Dual Price
FO	36.00000	1.000000
R1	2.000000	0.000000
R2	0.000000	1.500000
R3	0.000000	1.000000

Se activaron R2 y R3. Hacen valer la igualdad. Determinan el óptimo.

Artículos de vidrio



Vertex	Lines through vertex	Value of objective
(4, 3)	$x = 4$ $3x + 2y = 18$	27
(4, 0)	$x = 4$ $y = 0$	12
(2, 6)	$2y = 12$ $3x + 2y = 18$	36 Maximum
(0, 6)	$2y = 12$ $x = 0$	30
(0, 0)	$x = 0$ $y = 0$	0

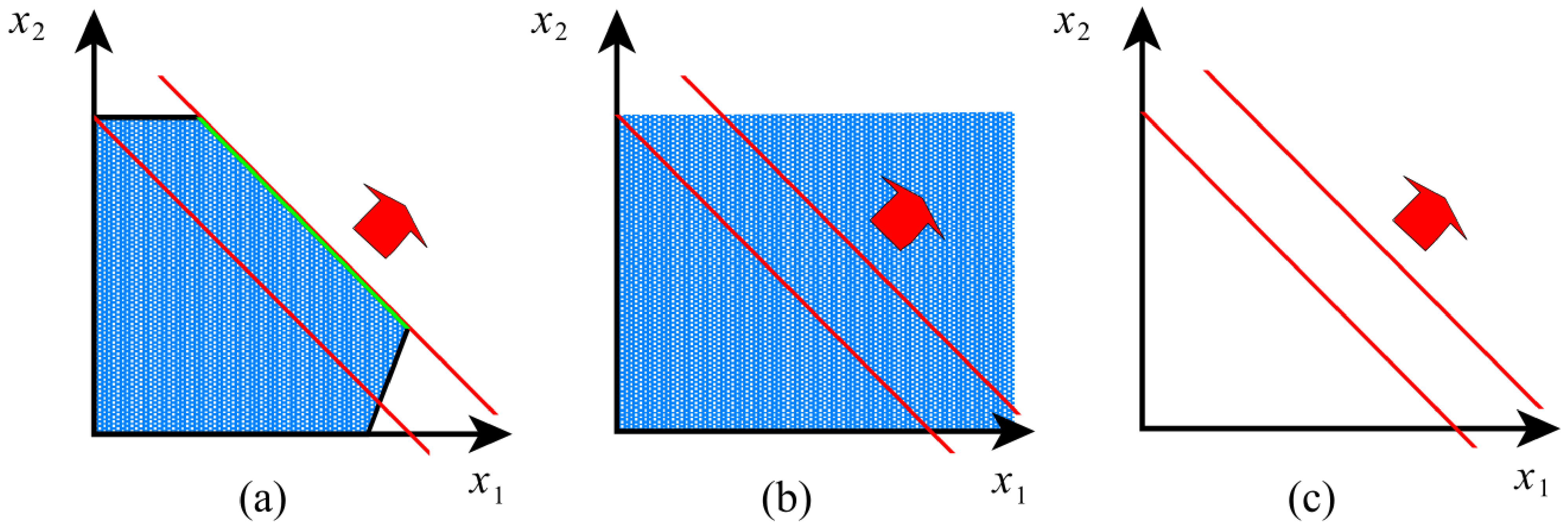


Simplex

Casos problemáticos

Casos problemáticos

- En el caso (a), la solución obtenida no es única. En el caso (b), la solución no está acotada. En el caso (c), la región factible es nula.



Solución no única

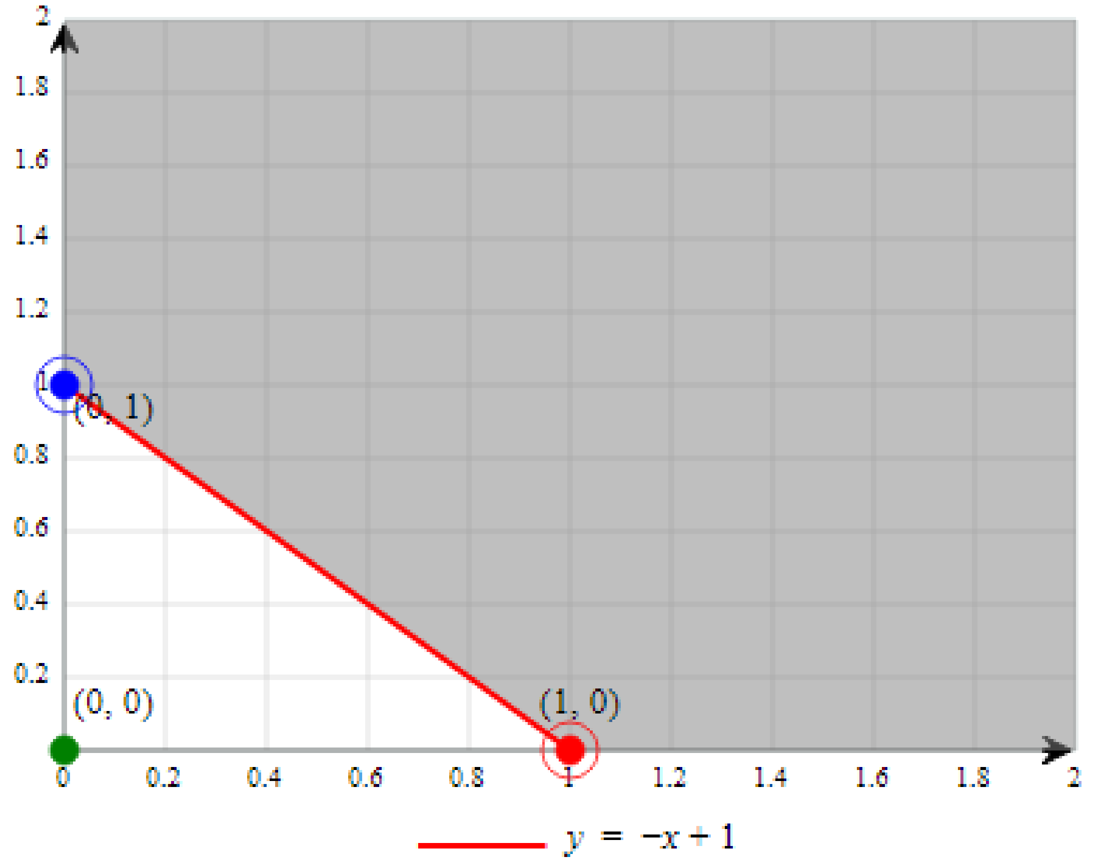
$$\underset{x_1, x_2}{\text{Max}}\ x_1 + x_2$$

$$\text{s. a :}$$

$$x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$



Solución no única.lg4

Solución no única

Lingo Model - Solución no única

```
! Solución no única;

[FO] Max = x1+x2;

[R1] x1+x2 <= 1;
```

Solución no única

Variable	Value	Reduced Cost
X1	0.000000	0.000000
X2	1.000000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
FO	1.000000	1.000000
R1	0.000000	1.000000

Ojos de serpiente: solución múltiple.

Solución no acotada

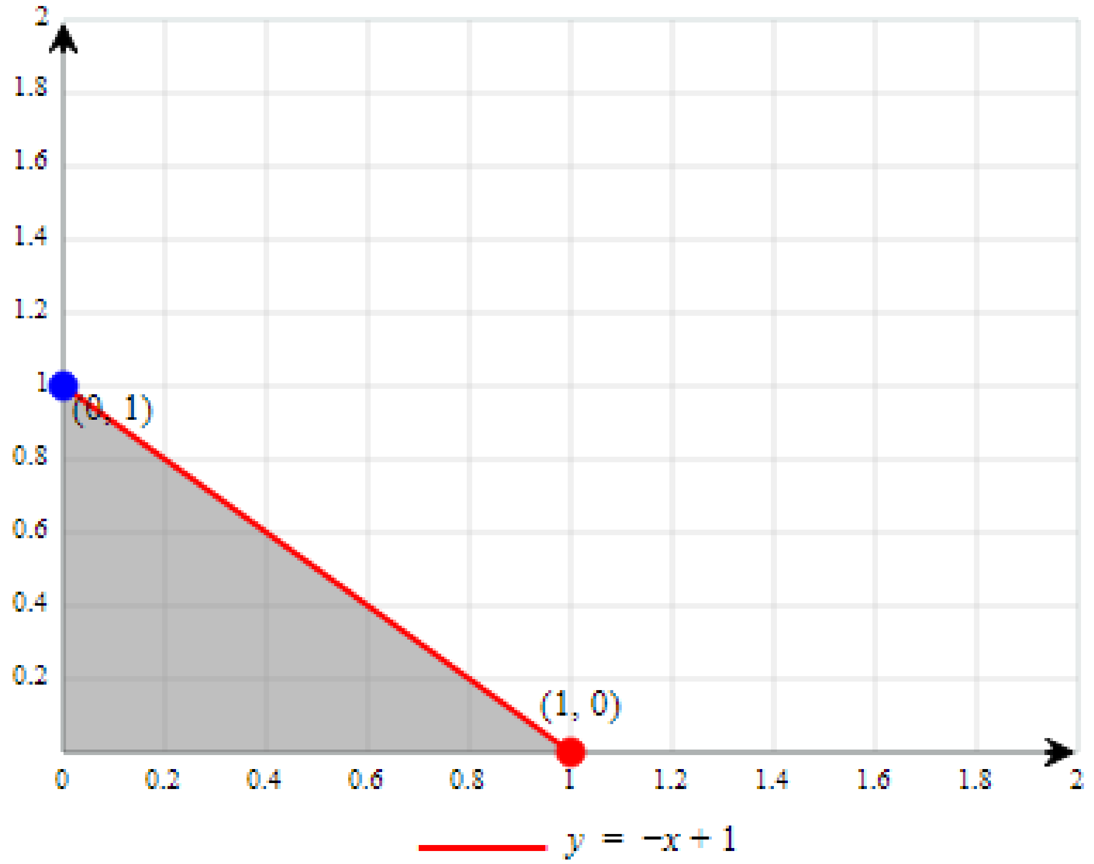
$$\max_{x_1, x_2} x_1 + x_2$$

s. a :

$$x_1 + x_2 \geq 1$$

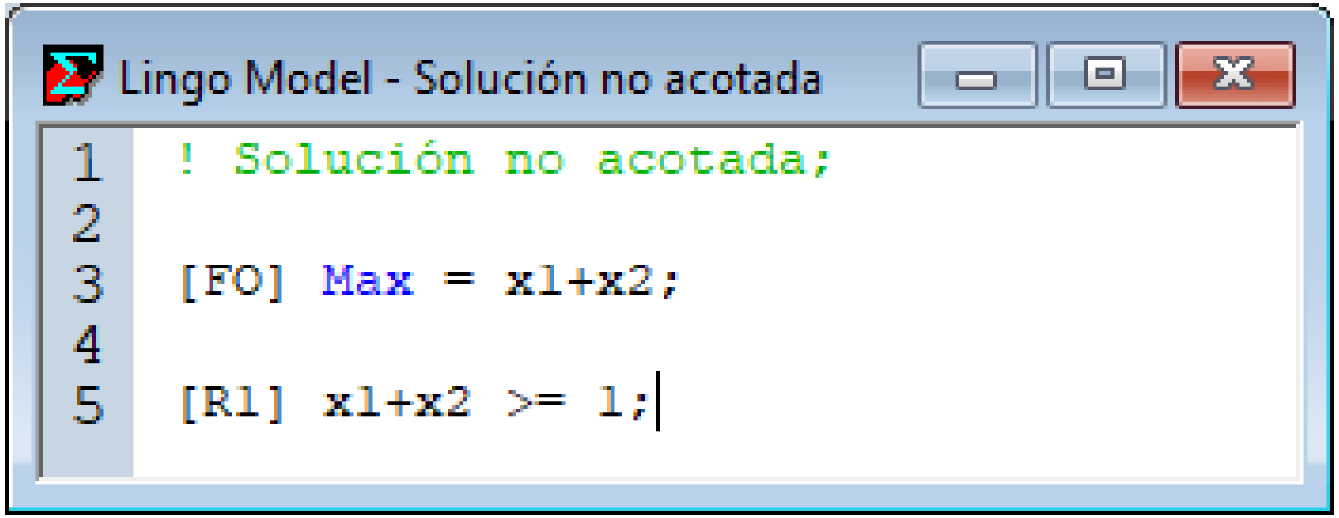
$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$



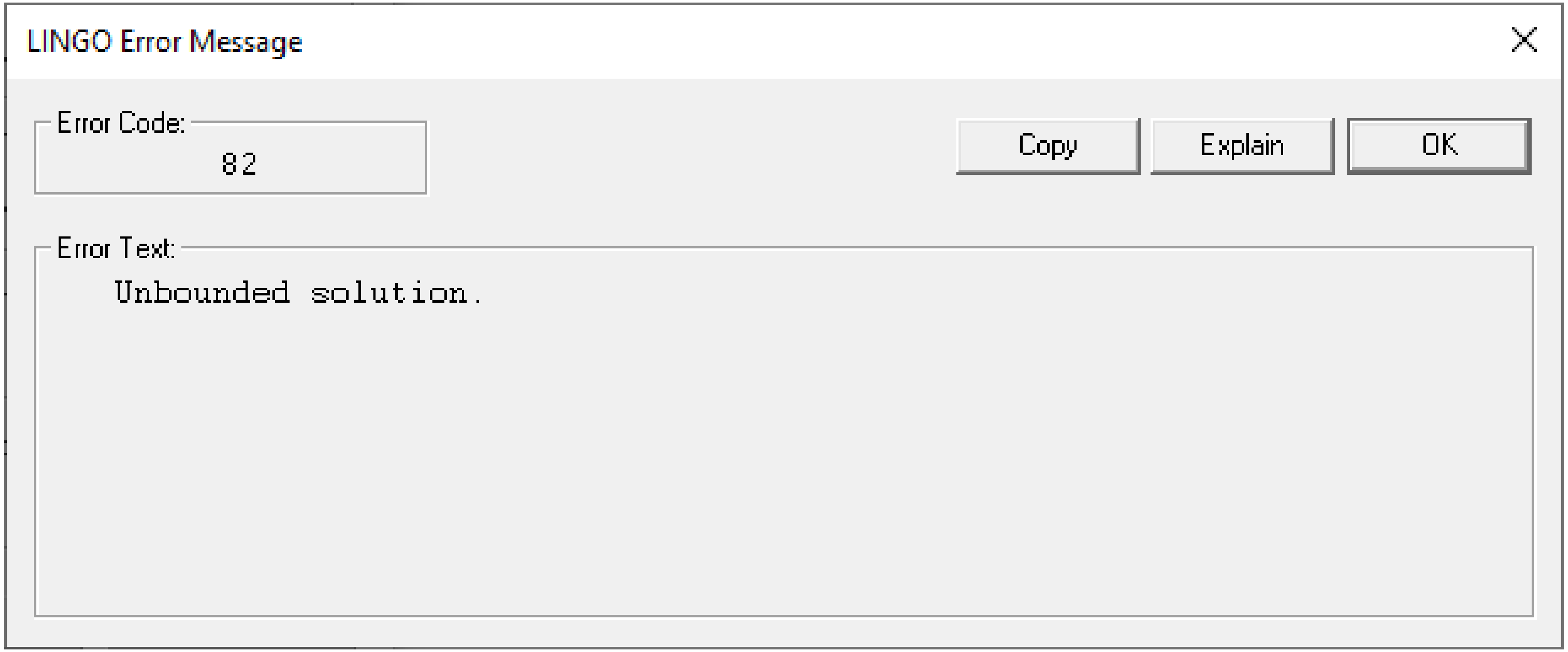
Solución no acotada.lg4

Solución no acotada


Lingo Model - Solución no acotada

```
! Solución no acotada;

[FO] Max = x1+x2;

[R1] x1+x2 >= 1;
```

Solución no acotada



No factible

$$\max_{x_1, x_2} x_1 + x_2$$

s. a :

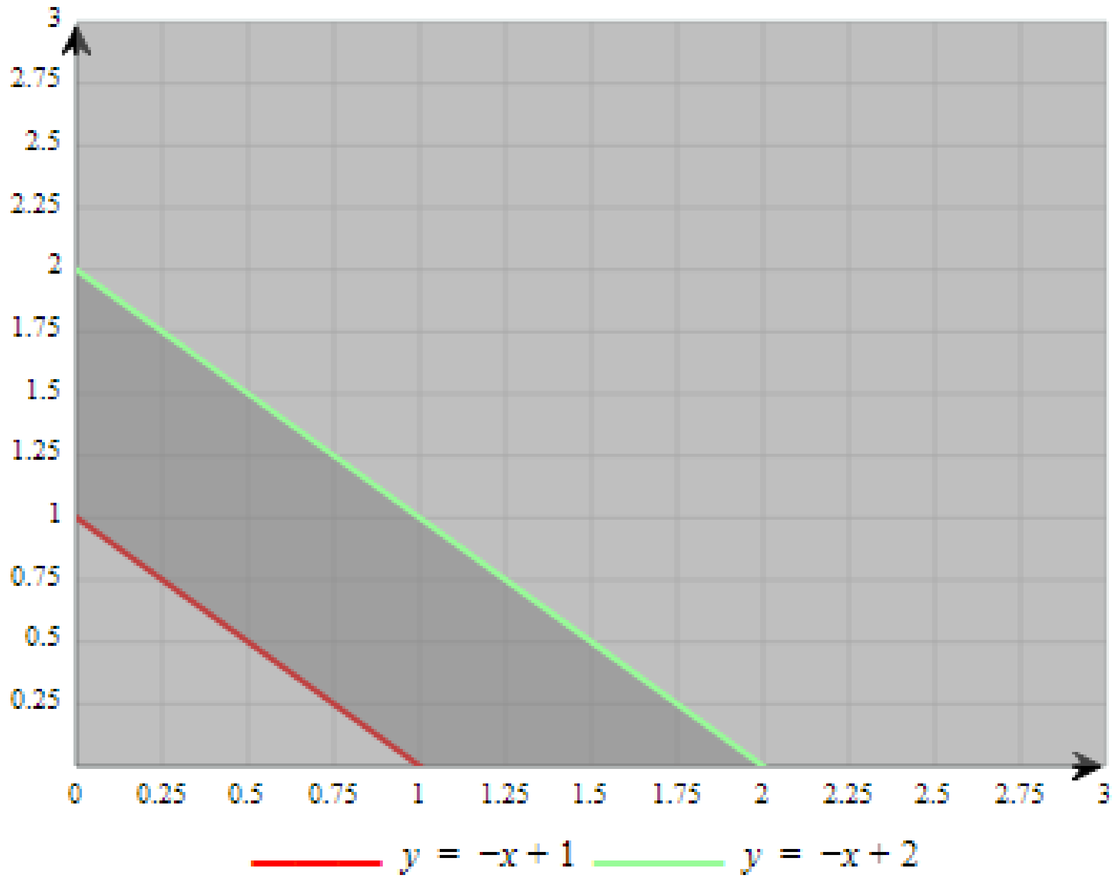
$$x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1 + x_2 \geq 2$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

No factible.lg4

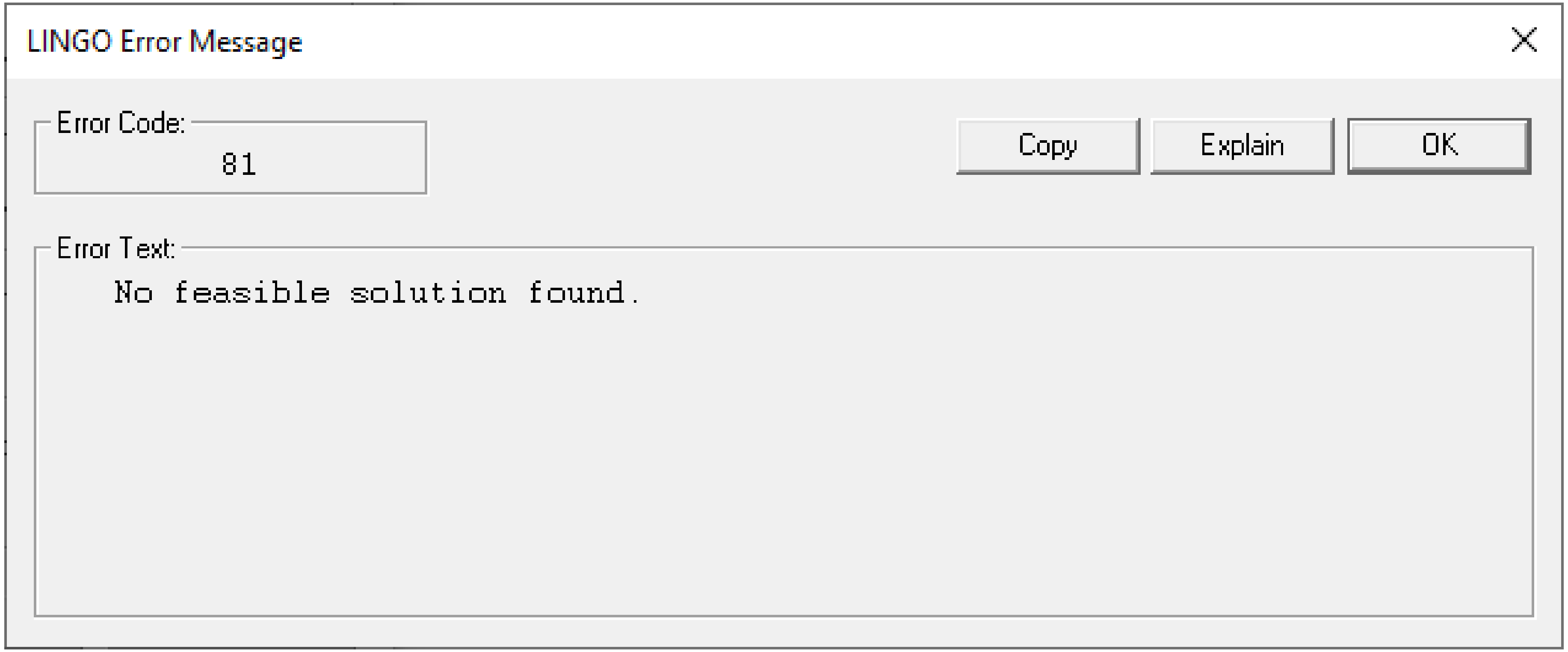


No factible

Lingo Model - No factible

```
! No factible;

[FO] Max = x1+x2;

[R1] x1+x2 <= 1;
[R2] x1+x2 >= 2;
```

No factible


LINGO Error Message
Error Code:
81
Copy
Explain
OK
Error Text:
No feasible solution found.

Problema de producción

Problema de producción

Se maximizan los beneficios originados por n actividades que compiten por m recursos. La actividad j se ejecuta a velocidad x_j (kg/h), produce un beneficio unitario b_j ($/kg) y tiene un consumo específico a_{ij} del recurso i, cuya disponibilidad es s_i (kg).

Problema de producción

- Parámetros:
  - n: Tipos de actividades.
  - m: Tipos de recursos.
  - b_j: Beneficio unitario de la actividad j (\$/kg).
  - s_i: Disponibilidad del recurso i (kg).
  - a_{ij}: Consumo específico del recurso i por la actividad j.
- Variables de decisión:
  - x_j: Velocidad de ejecución de la actividad j (kg/h).

Problema de producción

$$\underset{x_j}{\text{Max}} \sum_{j=1}^{n} b_j \, x_j$$

$$\text{s. a}:$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, x_j \le s_i \qquad i = 1 \ldots m$$

$$x_j \ge 0 \qquad j = 1 \ldots n$$

Fábrica de pinturas

Fábrica de pinturas

Una fábrica produce dos tipos de pinturas: el amarillo (A) y el celeste (C). Existen dos líneas de producción, una para cada color. La capacidad de la línea A es 60 litros por día; mientras que la capacidad de la línea C es 50 litros por día. Un litro de A requiere 1 h-hombre de labor; mientras que un litro de C requiere 2 h-hombre. Se disponen de 120 h-hombre como máximo por día que pueden ser asignadas indistintamente a la producción de ambos colores. La contribución a los beneficios de la empresa es $20 y $30 por litro de A y C, respectivamente. Se debe determinar el plan de producción diaria óptimo.

Fábrica de pinturas

- $n = 2$
- $m = 3$
- $b = 20\ 30$ ($/l)
- $s = 60$ (l/d)

  50 (l/d)

  120 (h-hombre)
- x = A C (l/d)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A & C \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} LA \\ LC \\ MO \end{array} \end{array}$$

Fábrica de pinturas

$$\max_{A,C} 20A + 30C$$

$$\text{s. a}:$$

$$A \le 60$$

$$C \le 50$$

$$A + 2C \le 120$$

$$A \ge 0, C \ge 0$$

Pinturas.lg4

Modelo en LINGO

Lingo Model - Pinturas

```
! Fábrica de pinturas;
[FO] MAX = 20*A+30*C;

[LA] A <= 60;
[LC] C <= 50;
[MO] A+2*C <= 120;
```

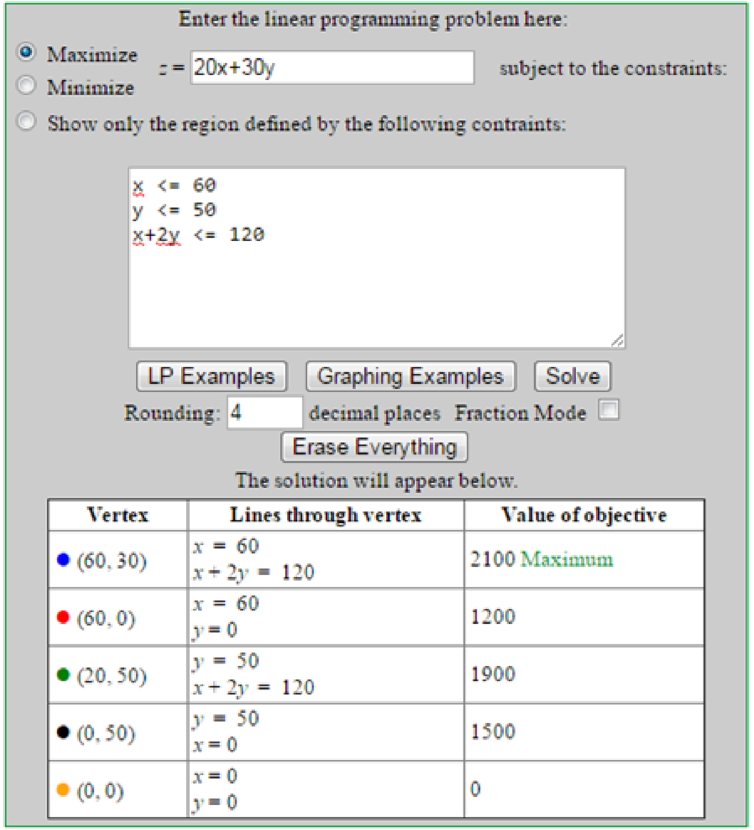
Resultados en LINGO

Variable	Value	Reduced Cost
A	60.00000	0.000000
C	30.00000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
FO	2100.000	1.000000
LA	0.000000	5.000000
LC	20.00000	0.000000
MO	0.000000	15.00000

Se activaron LA y MO. Hacen valer la igualdad. Se acabaron esos recursos.

Fábrica de pinturas



Enter the linear programming problem here:

- (•) Maximize
- ( ) Minimize

z = 20x+30y subject to the constraints:

( ) Show only the region defined by the following contraints:

```
x <= 60
y <= 50
x+2y <= 120
```

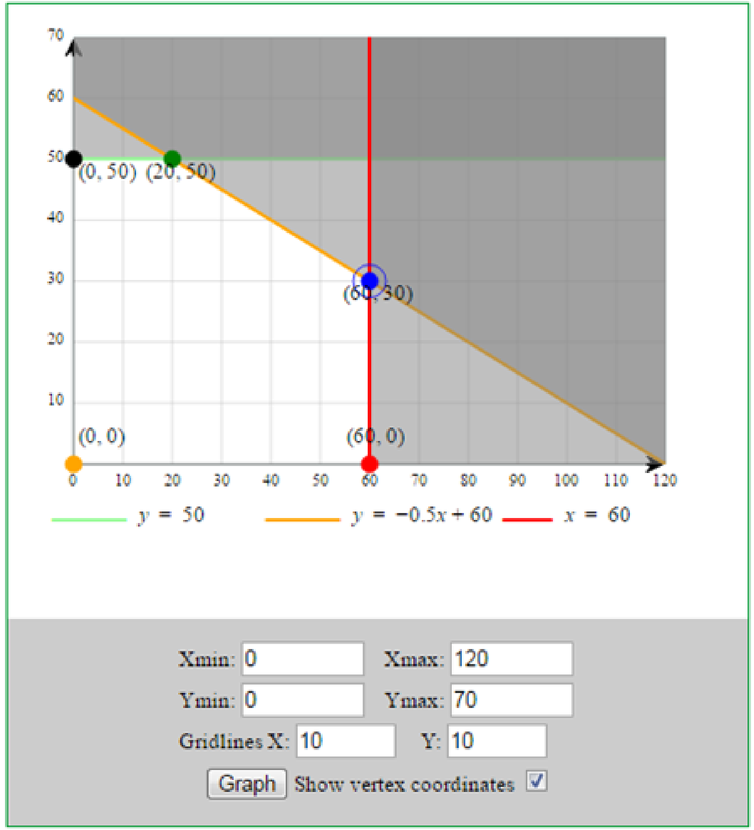
LP Examples | Graphing Examples | Solve

Rounding: 4 decimal places Fraction Mode

Erase Everything

The solution will appear below.

Vertex	Lines through vertex	Value of objective
(60, 30)	$x = 60$ $x + 2y = 120$	2100 Maximum
(60, 0)	$x = 60$ $y = 0$	1200
(20, 50)	$y = 50$ $x + 2y = 120$	1900
(0, 50)	$y = 50$ $x = 0$	1500
(0, 0)	$x = 0$ $y = 0$	0



Simplex

Fábrica de químicos

Fábrica de químicos

Una fábrica de químicos produce dos tipos de combos: el especial y el estándar. Cada combo contiene 8 kg del químico A. El especial tiene 2 kg del químico B y requiere 3 h-hombre de mano de obra, mientras que la estándar contiene 1.5 kg del químico B y requiere 2 h-hombre de mano de obra. La fábrica solo puede producir 400 kg de A y 80 kg de B por semana. La capacidad de mano de obra es de 2 hombres trabajando cada uno 40 h/semana, pero podrían trabajar hasta 10 horas extras cobrando el doble. El precio de venta de cada tipo de combo es de $50 y $40, respectivamente. La mano de obra tiene un costo de 2 $/h, el costo de A es 0.5 $/kg y el costo de B es 10 $/kg. Se desea organizar la producción semanal para obtener el máximo beneficio.

Fábrica de químicos

- x_1: Especiales producidos por semana en la jornada normal.
- x_2: Estándares producidos por semana en la jornada normal.
- x_3: Especiales producidos por semana en la jornada extra.
- x_4: Estándares producidas por semana en la jornada extra.

Fábrica de químicos

Prod.	Ingre.	Mano de obra	A	B	Costo total	Benef.
1	50	2·3	0.5·8	10·2	30	20
2	40	2·2	0.5·8	10·1.5	23	17
3	50	4·3	0.5·8	10·2	36	14
4	40	4·2	0.5·8	10·1.5	27	13

$$f\left(x\right) = 20\,x_1 + 17\,x_2 + 14\,x_3 + 13\,x_4$$

Fábrica de químicos

- Restricciones:
  - Horas normales (h-hombre): $3x_1 + 2x_2 \leq 2 \cdot 40$
  - Horas extras (h-hombre): $3x_3 + 2x_4 \leq 2 \cdot 10$
  - Químico A (kg/semana): $8(x_1 + x_3) + 8(x_2 + x_4) \leq 400$
  - Químico B (kg/semana): $2(x_1 + x_3) + 1.5(x_2 + x_4) \leq 80$

Fábrica de químicos

$$\underset{x_j}{\text{Max}} \sum_{j=1}^{n} b_j \, x_j$$

s. a :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, x_j \le s_i \qquad \forall i$$

$$x_j \ge 0 \qquad \forall j$$

$$\underset{x_1, x_2, x_3, x_4}{\text{Max}} \; 20\,x_1 + 17\,x_2 + 14\,x_3 + 13\,x_4$$

s. a:

$$3\,x_1 + 2\,x_2 \le 80$$

$$3\,x_3 + 2\,x_4 \le 20$$

$$8\,x_1 + 8\,x_2 + 8\,x_3 + 8\,x_4 \le 400$$

$$2\,x_1 + 1.5\,x_2 + 2\,x_3 + 1.5\,x_4 \le 80$$

x_1, x_2, x_3, x_4 no negativas

```
b = 20 17 14 13
s = 80 20 400 80
a = 3 2 0 0
    0 0 3 2
    8 8 8 8
    2 1.5 2 1.5
```

Químicos.lg4

Modelo en LINGO

Lingo Model - Químicos

```
! Fábrica de químicos;
[FO] MAX = 20*x1+17*x2+14*x3+13*x4;

[RN] 3*x1+2*x2 <= 80;
[RE] 3*x3+2*x4 <= 20;
[RA] 8*x1+8*x2+8*x3+8*x4 <= 400;
[RB] 2*x1+1.5*x2+2*x3+1.5*x4 <= 80;
```

Resultados en LINGO

Variable	Value	Reduced Cost
X1	0.000000	0.000000
X2	40.00000	0.000000
X3	0.000000	0.000000
X4	10.00000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
FO	810.0000	1.000000
RN	0.000000	3.000000
RE	0.000000	1.000000
RA	0.000000	1.375000
RB	5.000000	0.000000

Conjuntos

Fábrica de químicos

$$\underset{x_j}{\text{Max}} \sum_{j=1}^{n} b_j \, x_j$$

$$\text{s. a}:$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, x_j \le s_i \qquad \forall i$$

$$x_j \ge 0 \qquad \forall j$$

Químicos con sets.lg4

```
Sets:
Productos/1..4/: x,b;
Recursos/1..4/: s;
RxP(Recursos,Productos): a;
EndSets

Data:
b = 20 17 14 13;
a = 3 2 0 0
    0 0 3 2
    8 8 8 8
    2 1.5 2 1.5;
s = 80 20 400 80;
EndData

[FO] MAX = @sum(Productos: b*x);

@for(Recursos(i):
[RP] @sum(Productos(j): a(i,j)*x(j)) <= s(i)
);
```

Modelo en LINGO

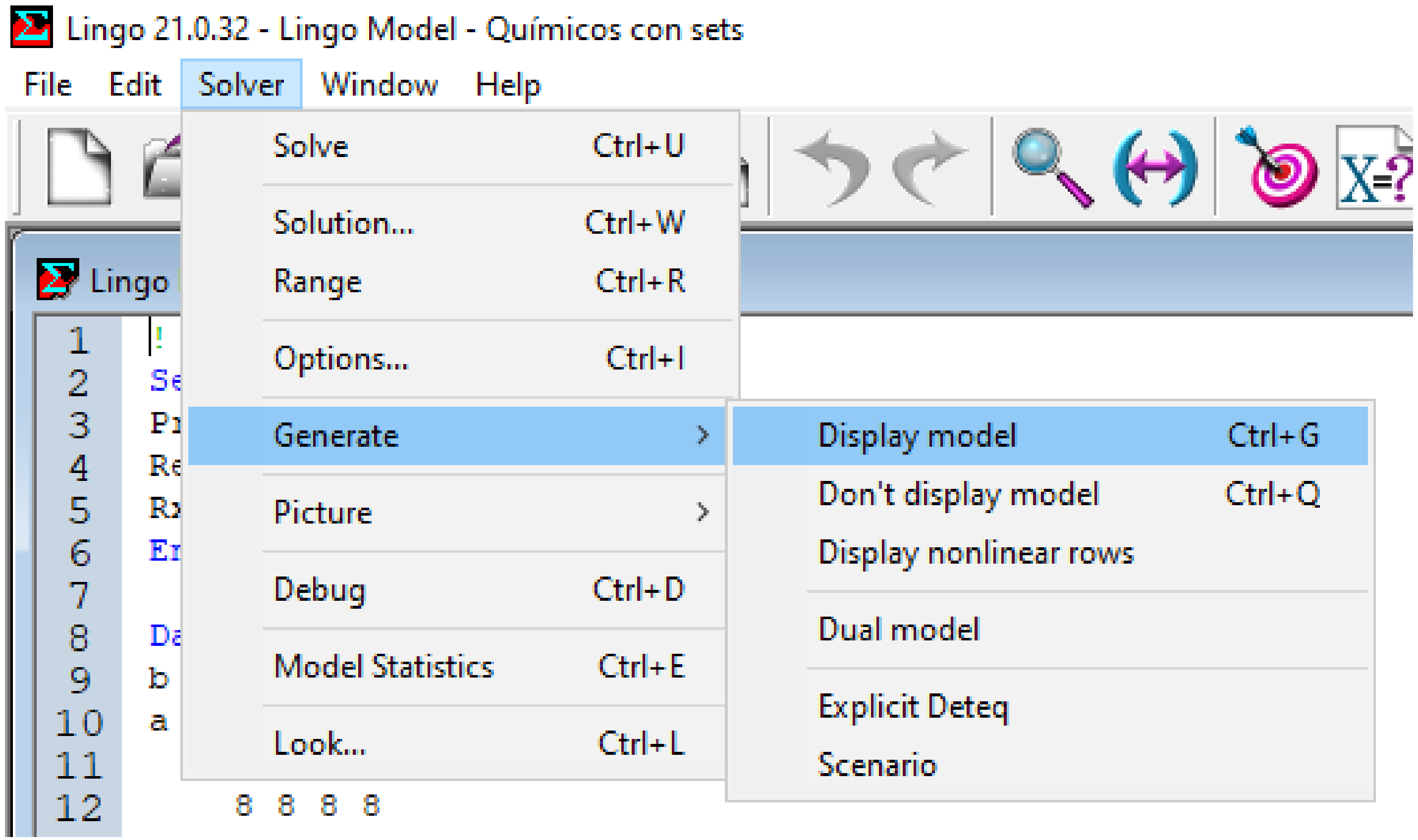
Lingo Model - Químicos con sets

```
! Fábrica de químicos;
Sets:
  Productos/1..4/: x,b;
  Recursos/1..4/: s;
  RxP(Recursos,Productos): a;
EndSets

Data:
  b = 20 17 14 13;
  a = 3 2 0 0
      0 0 3 2
      8 8 8 8
      2 1.5 2 1.5;
  s = 80 20 400 80;
EndData

[FO] MAX = @sum(Productos: b*x);

@for(Recursos(i):
  [RR] @sum(Productos(j): a(i,j)*x(j)) <= s(i)
);
```

Resultados en LINGO

```
Variable              Value        Reduced Cost
   X( 1)           0.000000            0.000000
   X( 2)           40.00000            0.000000
   X( 3)           0.000000            0.000000
   X( 4)           10.00000            0.000000
   B( 1)           20.00000            0.000000
...
A( 1, 1)           3.000000            0.000000
...

     Row    Slack or Surplus      Dual Price
      FO           810.0000            1.000000
  RR( 1)           0.000000            3.000000
  RR( 2)           0.000000            1.000000
  RR( 3)           0.000000            1.375000
  RR( 4)           5.000000            0.000000
```

Modelo desarrollado



Modelo desarrollado

```
MODEL:
[FO] MAX= 20 * X_1 + 17 * X_2 + 14 * X_3 + 13 * X_4;
[RR_1] 3 * X_1 + 2 * X_2 <= 80;
[RR_2] 3 * X_3 + 2 * X_4 <= 20;
[RR_3] 8 * X_1 + 8 * X_2 + 8 * X_3 + 8 * X_4 <= 400;
[RR_4] 2 * X_1 + 1.5 * X_2 + 2 * X_3 + 1.5 * X_4 <= 80;
END
```