Simulación y Optimización

Optimización
Modelo y FO

Enrique E. Tarifa, Facultad de Ingeniería, UNJu

Programación matemática

Programación matemática

$$\underset{x_i}{\text{Max}}\, FO\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

s. a:

$$h_j\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = 0 \quad j = 1, 2, \ldots, m_1$$

$$g_k\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \leq 0 \quad k = 1, 2, \ldots, m_2$$

Función objetivo

Función objetivo

- Criterio económico:
  - Valor del dinero en el tiempo: VAN y TIR
  - Beneficios = Ingresos-Costos
  - Ingresos constantes $\rightarrow$ Costos

Función objetivo

- Solo costos de operación e ingresos: Problemas de *control supervisor*, los costos de capital permanecen fijos.
- Solo costos de capital: Diseños mecánicos que no afectan a los costos de operación.
- Ambos costos: Las decisiones a tomar afectan tanto a los costos de operación como a los de capital.

Simplificación de la función objetivo

Simplificación de la FO

Sea $f(x)$, con un punto máximo en x^{opt}, este punto también será un punto óptimo de la función $g(x)$ definida como:

$$g(x) = \alpha\, f(x) + \beta$$

$$\text{Max}\{g(x)\} = \alpha\, \text{Max}\{f(x)\} + \beta \quad \alpha > 0$$

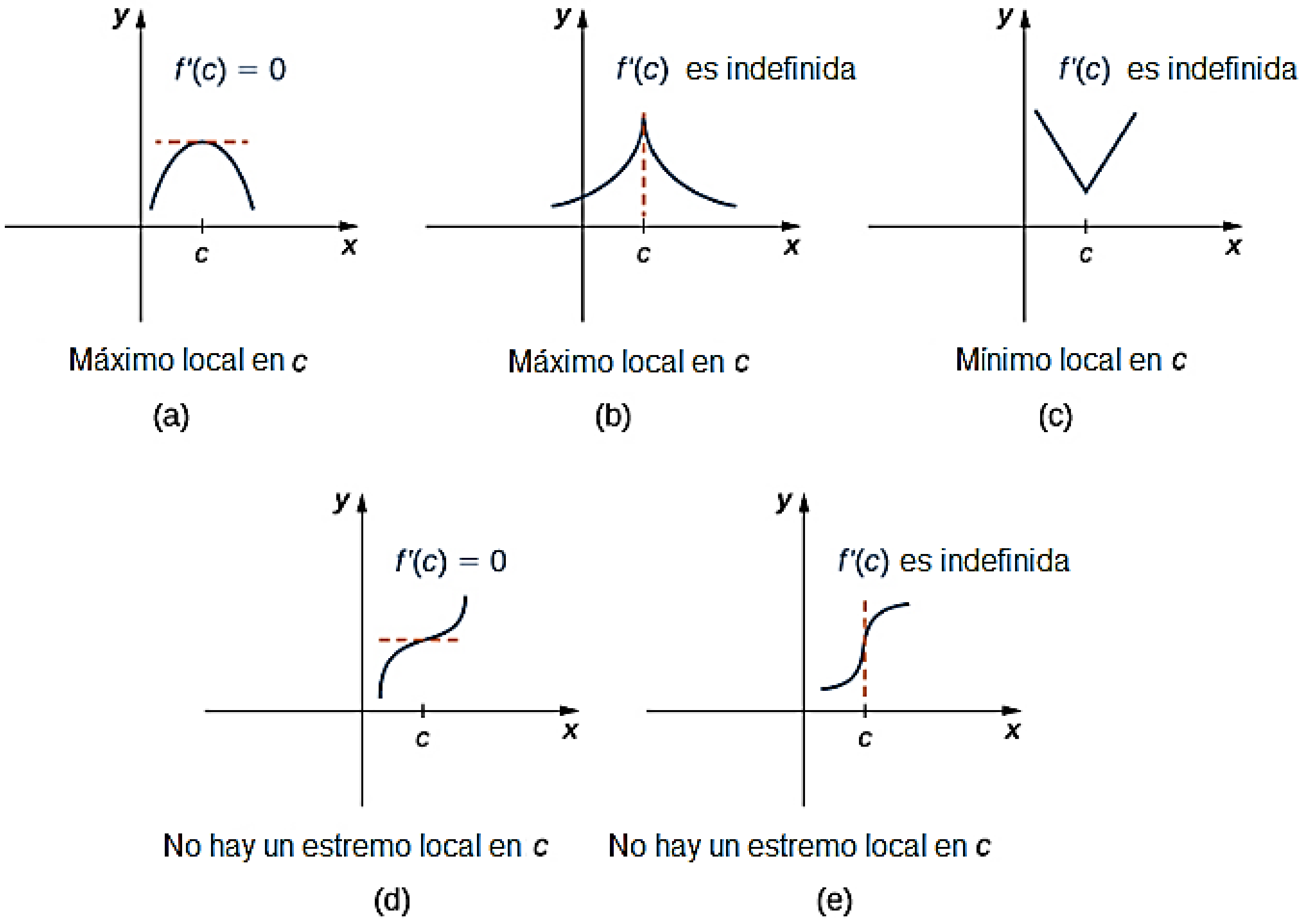
$$\text{Min}\{g(x)\} = \alpha\, \text{Max}\{f(x)\} + \beta \quad \alpha < 0$$

$$\text{Min}\{-f(x)\} = -\text{Max}\{f(x)\}$$

Solución analítica

Solución analítica

- Punto crítico:
  - $\frac{df}{dx} = 0$ o no existe.
- Punto extremo:
  - $\frac{d^2f}{dx^2} > 0$, mínimo
  - $\frac{d^2f}{dx^2} < 0$, máximo



Solo costo de operación

Costo de operación

Maximizar los beneficios de una planta química que produce tres productos (D, E, F) a partir de tres reactivos (A, B, C). Los procesos son paralelos. Las reacciones involucradas son las siguientes:

$$A + B \rightarrow D$$

$$A + B \rightarrow E$$

$$3A + 2B + C \rightarrow F$$

Costo de operación

Materia Prima	Disponibilidad (lb/d)	Costo (c/lb)
A	40000	1.5
B	30000	1.0
C	25000	2.5

Producto	lb reactivo/ lb producto	Costo del proceso (c/lb)	Precio de venta (c/lb)
D	2/3 A, 1/3 B	1.5	4.0
E	2/3 A, 1/3 B	0.5	3.3
F	½ A, 1/6 B, 1/3 C	1.0	3.8

Costo de operación

- La función objetivo: beneficios (\$/d) = ingresos – costos
- x = (A B C D E F)^T (lb/d)
- Ingresos (\$/d) = $0.04x_4 + 0.033x_5 + 0.038x_6$
- Costo de materia prima (\$/d) = $0.015x_1 + 0.01x_2 + 0.025x_3$
- Costo de procesamiento (\$/d) = $0.015x_4 + 0.005x_5 + 0.01x_6$

$$f(x) = 0.025x_4 + 0.028x_5 + 0.028x_6 - 0.015x_1 - 0.01x_2 - 0.025x_3$$

Costo de operación

- Balances de materia de las materias primas:

$$x_1 = 0.667\,x_4 + 0.667\,x_5 + 0.5\,x_6$$
$$x_2 = 0.333\,x_4 + 0.333\,x_5 + 0.167\,x_6$$
$$x_3 = 0.333\,x_6$$

Costo de operación

- Disponibilidad:

$$0 \leq x_1 \leq 40000$$
$$0 \leq x_2 \leq 30000$$
$$0 \leq x_3 \leq 25000$$

Costo de operación

$$\underset{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6}{\text{Max}} \quad 0.025\,x_4 + 0.028\,x_5 + 0.028\,x_6 - 0.015\,x_1 - 0.01\,x_2 - 0.025\,x_3$$

s. a:

$$x_1 = 0.667\,x_4 + 0.667\,x_5 + 0.5\,x_6$$

$$x_2 = 0.333\,x_4 + 0.333\,x_5 + 0.167\,x_6$$

$$x_3 = 0.333\,x_6$$

$$0 \le x_1 \le 40000$$

$$0 \le x_2 \le 30000$$

$$0 \le x_3 \le 25000$$

Reacciones químicas.lg4

Modelo en LINGO

Lingo Model - Reacciones químicas

```
!Problema de las reacciones químicas;
!Considerando costo de operación;

[FO] Max = 0.025*x4+0.028*x5+0.028*x6-0.015*x1-0.010*x2-0.025*x3;
!Sunk costs;
![FO] Max = 0.025*x4+0.028*x5+0.028*x6;

[Rx1] x1 = 0.667*x4+0.667*x5+0.5*x6;
[Rx2] x2 = 0.333*x4+0.333*x5+0.167*x6;
[Rx3] x3 = 0.333*x6;

[Rx1d] x1 < 40000;
[Rx2d] x2 < 30000;
[Rx3d] x3 < 25000;
```

Resultados en LINGO

Variable	Value	Reduced Cost
X4	0.000000	0.3000000E-02
X5	59970.01	0.000000
X6	0.000000	0.4882534E-03
X1	40000.00	0.000000
X2	19970.01	0.000000
X3	0.000000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
FO	879.4603	1.000000
RX1	0.000000	-0.3698651E-01
RX2	0.000000	-0.1000000E-01
RX3	0.000000	-0.2500000E-01
RX1D	0.000000	0.2198651E-01
RX2D	10029.99	0.000000
RX3D	25000.00	0.000000

Costo hundido o *sunk cost*

- Gastos ya realizados.
- No deben ser tenidos en cuenta.
- Cuando la materia prima fue comprada previamente.
- Costo de adquisición $\rightarrow 0$

$$\underset{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6}{\text{Max}} \quad 0.025\,x_4 + 0.028\,x_5 + 0.028\,x_6 \cancel{- 0.015\,x_1 - 0.01\,x_2 - 0.025\,x_3}$$

Ingresos

$$\max_{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6} \quad 0.025\,x_4 + 0.028\,x_5 + 0.028\,x_6$$

s. a:

$$x_1 = 0.667\,x_4 + 0.667\,x_5 + 0.5\,x_6$$

$$x_2 = 0.333\,x_4 + 0.333\,x_5 + 0.167\,x_6$$

$$x_3 = 0.333\,x_6$$

$$0 \le x_1 \le 40000$$

$$0 \le x_2 \le 30000$$

$$0 \le x_3 \le 25000$$

Reacciones químicas.lg4

Modelo en LINGO

Lingo Model - Reacciones químicas

```
!Problema de las reacciones químicas;
!Considerando costo de operación;

![FO] Max = 0.025*x4+0.028*x5+0.028*x6-0.015*x1-0.010*x2-0.025*x3;
!Sunk costs;
[FO] Max = 0.025*x4+0.028*x5+0.028*x6;

[Rx1] x1 = 0.667*x4+0.667*x5+0.5*x6;
[Rx2] x2 = 0.333*x4+0.333*x5+0.167*x6;
[Rx3] x3 = 0.333*x6;

[Rx1d] x1 < 40000;
[Rx2d] x2 < 30000;
[Rx3d] x3 < 25000;
```

Resultados en LINGO

Variable	Value	Reduced Cost
X4	0.000000	0.3000000E-02
X5	3691.848	0.000000
X6	75075.08	0.000000
X1	40000.00	0.000000
X2	13766.92	0.000000
X3	25000.00	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
FO	2205.474	1.000000
RX1	0.000000	-0.4197901E-01
RX2	0.000000	0.000000
RX3	0.000000	-0.2105254E-01
RX1D	0.000000	0.4197901E-01
RX2D	16233.08	0.000000
RX3D	0.000000	0.2105254E-01

Solo costo de capital

Costo de capital

- Se quiere determinar la mejor relación *L/D* para un tanque cilíndrico y compararla con el heurístico que plantea que es 3.
- Suposiciones:
  - Las dos tapas son planas.
  - El espesor *t* y la densidad de las paredes son constantes.
  - El costo de fabricación y de material es el mismo para las tapas como para el cuerpo, y es igual a *S* ($/lb).
  - No hay desperdicios durante la fabricación.

Costo de capital

- La función objetivo debería ser el costo de capital (f_1); pero puede simplificarse tomando el peso (f_2) o directamente la superficie (f_3):

$$f_1 = S\,\rho\left(\frac{\pi D^2}{2} + \pi D L\right)t$$

$$f_2 = \rho\left(\frac{\pi D^2}{2} + \pi D L\right)t$$

$$f_3 = \frac{\pi D^2}{2} + \pi D L$$

Costo de capital

$$\min_{D,L} \frac{\pi D^2}{2} + \pi D L$$

s. a:

$$V = \frac{\pi D^2}{4} L$$

$$D \geq 0$$

$$L \geq 0$$

Costo de capital

- Modelo de estado:

$$\underset{D}{\text{Min}} \frac{\pi D^2}{2} + \pi D L$$

$$L \leftarrow \frac{4V}{\pi D^2}$$

s. a:

$$D \geq 0$$

$$L \geq 0$$

Costo de capital

- Modelo de sustitución:

$$\underset{D}{\mathrm{Min}}\ \frac{\pi D^2}{2} + \frac{4V}{D}$$

s. a:

$$D \geq 0$$

Costo de capital

- Punto crítico:
  - $\frac{df}{dD} = \pi\, D - 4\, V/D^2 = 0$
  - $\rightarrow D^{\text{opt}} = \sqrt[3]{4\, V/\pi}$
- Punto mínimo:
  - $\frac{d^2 f}{dD^2} = \pi + 8\, V/D^3 > 0$

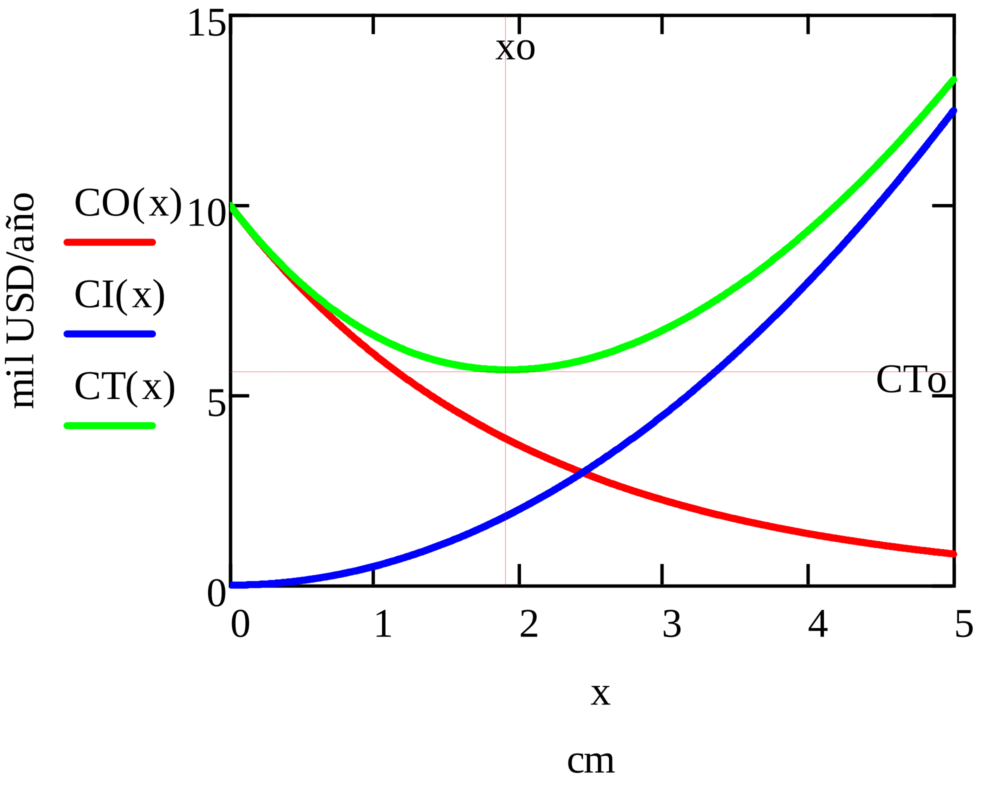
Costo de capital

$$D^{\mathrm{opt}} = \left(\frac{4V}{\pi}\right)^{1/3} \qquad L^{\mathrm{opt}} = \left(\frac{4V}{\pi}\right)^{1/3}$$

$(L/D)^{\mathrm{opt}} = 1$. Esto está lejos del 3 planteado por la experiencia, y se debe a que las suposiciones realizadas no se cumplen en la práctica.

Costo de operación y de capital

Espesor de capa aislante



Costo total

- CT = CO+CI (\$/año)
- Q: Calor disipado (W).
- Y: Horas de operación por año (h/año).
- H_t: Costo de la energía (\$/Wh).
- C: Costo unitario (\$/m^2).
- A: Área a cubrir (m^2).
- r: Factor de reembolso, $r = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}$.
- i: tasa de interés (tanto por uno).

$$\operatorname*{Min}_{Q,C,x} Q\,Y\,H_t + C\,A\,r$$

s. a:

$$Q = \frac{A\Delta T}{x/k + 1/h_c}$$

$$C = F_0 + F_1\,x$$

$$Q \geq 0$$

$$C \geq 0$$

$$x \geq 0$$

Costo total

$$\underset{x}{\mathrm{Min}} \frac{A\Delta T}{x/k+1/h_c} Y H_{\mathrm{t}} + \left(F_0 + F_1 x\right) A r$$

s. a:

$$x \geq 0$$

Costo total

$$x^{\mathrm{opt}} = k\left[\left(\frac{Y\,H_{\mathrm{t}}\,\Delta T}{k\,F_{1}\,r}\right)^{1/2} - \frac{1}{h_{\mathrm{c}}}\right]$$

$$\frac{2\,AY\,H_{\mathrm{t}}\,\Delta T}{k^{2}\left(\frac{x}{k}+\frac{1}{h_{\mathrm{c}}}\right)^{3}} > 0$$

Es un mínimo.

Beneficios

Espesor de capa aislante

- Beneficios = Ingresos - Costos
- Calor perdido sin aislante: $Q_0 = h_c A \Delta T$

$$\underset{Q,C,x}{\mathrm{Max}} \left(Q_0 - Q\right) Y H_t - C A r$$

s. a:

$$Q = \frac{A \Delta T}{x / k + 1 / h_c}$$

$$C = F_0 + F_1 x$$

$$Q \leq Q_0$$

$$Q \geq 0$$

$$C \geq 0$$

$$x \geq 0$$

Beneficios

$$\underset{x}{\mathrm{Max}}\left(Q_0-\frac{A\Delta T}{x/k+1/h_c}\right)Y\,H_\mathrm{t}-\left(F_0+F_1\,x\right)A\,r$$

s. a:

$$x \geq 0$$

Beneficios

$$x^{\text{opt}} = k\left[\left(\frac{Y\,H_{\text{t}}\,\Delta T}{k\,F_1\,r}\right)^{1/2} - \frac{1}{h_{\text{c}}}\right]$$

$$-\frac{2\,AY\,H_{\text{t}}\,\Delta T}{k^2\left(\dfrac{x}{k}+\dfrac{1}{h_{\text{c}}}\right)^3} < 0$$

Es un máximo.

Generador de vapor

- Optimizar el área de intercambio de un generador de vapor para generar vapor a 250 °F y 30 psia usando aceite a 400 °F.
- U =100 BTU/(h ft^2 °F), W_{aceite} Cp_{aceite} = 7.5×10^4 BTU/(°F h)
- El precio del área de intercambio es 25 \$/ft^2.
- El beneficio del vapor generado es 2×10^{-6} \$/BTU.
- Las horas de servicio son 8000 h/año.
- Préstamo con una tasa de interés de 15 % a 10 años en cuotas anuales iguales.

Generador de vapor

$$\underset{F, I_0, W_{agua}, A, T_2}{\text{Max}} \quad F - r\, I_0$$

$$r = \frac{i\left(1+i\right)^n}{\left(1+i\right)^n - 1}$$

s. a:

$$F = 2\times10^{-6}\, \Delta H_v\, W_{agua}\, 8000$$

$$I_0 = 25\, A$$

$$W_{aceite} Cp_{aceite} \left(400 - T_2\right) = \frac{U\, A\left(400 - T_2\right)}{\ln\left(150 / \left(T_2 - 250\right)\right)}$$

$$W_{aceite} Cp_{aceite} \left(400 - T_2\right) = \Delta H_{\text{v}}\, W_{agua}$$

Generador de vapor

$$FO(T_2) = 0.016 W_{aceite} Cp_{aceite} \left(400 - T_2\right) - 25 r \frac{W_{aceite} Cp_{aceite}}{U} \ln\left(\frac{150}{T_2 - 250}\right)$$

$$T_2^{opt} = 250 + 15.62\ r = 250 + 15.62\ 0.2 = 253.1\ ^{\mathrm{o}}\mathrm{F}$$

$$A^{opt} = \frac{W_{aceite} Cp_{aceite} \left(400 - T_2^{opt}\right)}{U\left(400 - T_2^{opt}\right)} \ln\left(150 / \left(T_2^{opt} - 250\right)\right) = 2905\ \mathrm{ft}^2$$

Regresión lineal multivariable

Regresión lineal multivariable

$$y = \sum_{j=0}^{n} \beta_j \, x_j$$

$$x_0 = 1$$

$$\underset{\beta}{\text{Min}} \sum_{i=1}^{p} \left(y_i - \sum_{j=0}^{n} \beta_j \, x_{i,j} \right)^2$$

$$x_{i,0} = 1$$

- *n*: cantidad de variables x.
- *p*: cantidad de puntos a ajustar.
- β: parámetros a ajustar.

Regresión lineal multivariable

Aplicando el operador $\partial/\partial\beta_j = 0$, se obtiene:

$$\beta_0 \sum_{i=1}^{p} x_{i,0}^2 + \beta_1 \sum_{i=1}^{p} x_{i,0}\, x_{i,1} + \beta_2 \sum_{i=1}^{p} x_{i,0}\, x_{i,2} + \ldots + \beta_n \sum_{i=1}^{p} x_{i,0}\, x_{i,n} = \sum_{i=1}^{p} y_i\, x_{i,0}$$

$$\beta_0 \sum_{i=1}^{p} x_{i,1}\, x_{i,0} + \beta_1 \sum_{i=1}^{p} x_{i,1}^2 + \beta_2 \sum_{i=1}^{p} x_{i,1}\, x_{i,2} + \ldots + \beta_n \sum_{i=1}^{p} x_{i,1}\, x_{i,n} = \sum_{i=1}^{p} y_i\, x_{i,1}$$

$$\beta_0 \sum_{i=1}^{p} x_{i,2}\, x_{i,0} + \beta_1 \sum_{i=1}^{p} x_{i,2}\, x_{i,1} + \beta_2 \sum_{i=1}^{p} x_{i,2}^2 + \ldots + \beta_n \sum_{i=1}^{p} x_{i,2}\, x_{i,n} = \sum_{i=1}^{p} y_i\, x_{i,2}$$

$$\ldots$$

$$\beta_0 \sum_{i=1}^{p} x_{i,n}\, x_{i,0} + \beta_1 \sum_{i=1}^{p} x_{i,n}\, x_{i,2} + \beta_2 \sum_{i=1}^{p} x_{i,n}\, x_{i,2} + \ldots + \beta_n \sum_{i=1}^{p} x_{i,n}^2 = \sum_{i=1}^{p} y_i\, x_{i,n}$$

Regresión lineal multivariable

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_p \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_{p1} & x_{p2} & \cdots & x_{pn} \end{pmatrix}$$

Regresión lineal multivariable

$$\beta_0 \sum_{i=1}^{p} x_{i,0}^2 + \beta_1 \sum_{i=1}^{p} x_{i,0}\, x_{i,1} + \beta_2 \sum_{i=1}^{p} x_{i,0}\, x_{i,2} + \ldots + \beta_n \sum_{i=1}^{p} x_{i,0}\, x_{i,n} = \sum_{i=1}^{p} y_i\, x_{i,0}$$

$$\beta_0 \sum_{i=1}^{p} x_{i,1}\, x_{i,0} + \beta_1 \sum_{i=1}^{p} x_{i,1}^2 + \beta_2 \sum_{i=1}^{p} x_{i,1}\, x_{i,2} + \ldots + \beta_n \sum_{i=1}^{p} x_{i,1}\, x_{i,n} = \sum_{i=1}^{p} y_i\, x_{i,1}$$

$$\beta_0 \sum_{i=1}^{p} x_{i,2}\, x_{i,0} + \beta_1 \sum_{i=1}^{p} x_{i,2}\, x_{i,1} + \beta_2 \sum_{i=1}^{p} x_{i,2}^2 + \ldots + \beta_n \sum_{i=1}^{p} x_{i,2}\, x_{i,n} = \sum_{i=1}^{p} y_i\, x_{i,2}$$

$$\ldots$$

$$\beta_0 \sum_{i=1}^{p} x_{i,n}\, x_{i,0} + \beta_1 \sum_{i=1}^{p} x_{i,n}\, x_{i,2} + \beta_2 \sum_{i=1}^{p} x_{i,n}\, x_{i,2} + \ldots + \beta_n \sum_{i=1}^{p} x_{i,n}^2 = \sum_{i=1}^{p} y_i\, x_{i,n}$$

Regresión lineal multivariable

$$X^T X \beta = X^T Y$$

$$\Rightarrow \quad \beta = \left(X^{\mathrm{T}} X \right)^{-1} X^{\mathrm{T}} Y$$

Costo de un intercambiador de calor

Costo de intercambiadores

- C: Costo de mano de obra ($).
- A: Área (m^2).
- *N*: Número de tubos.
- $C = \beta_0 + \beta_1 A + \beta_2 N$

y	x_1	x_2
Mano de obra $	**Área**	**Número de tubos**
310	120	550
300	130	600
275	108	520
250	110	420
220	84	400
200	90	300
190	80	230
150	55	120
140	64	190
100	50	100

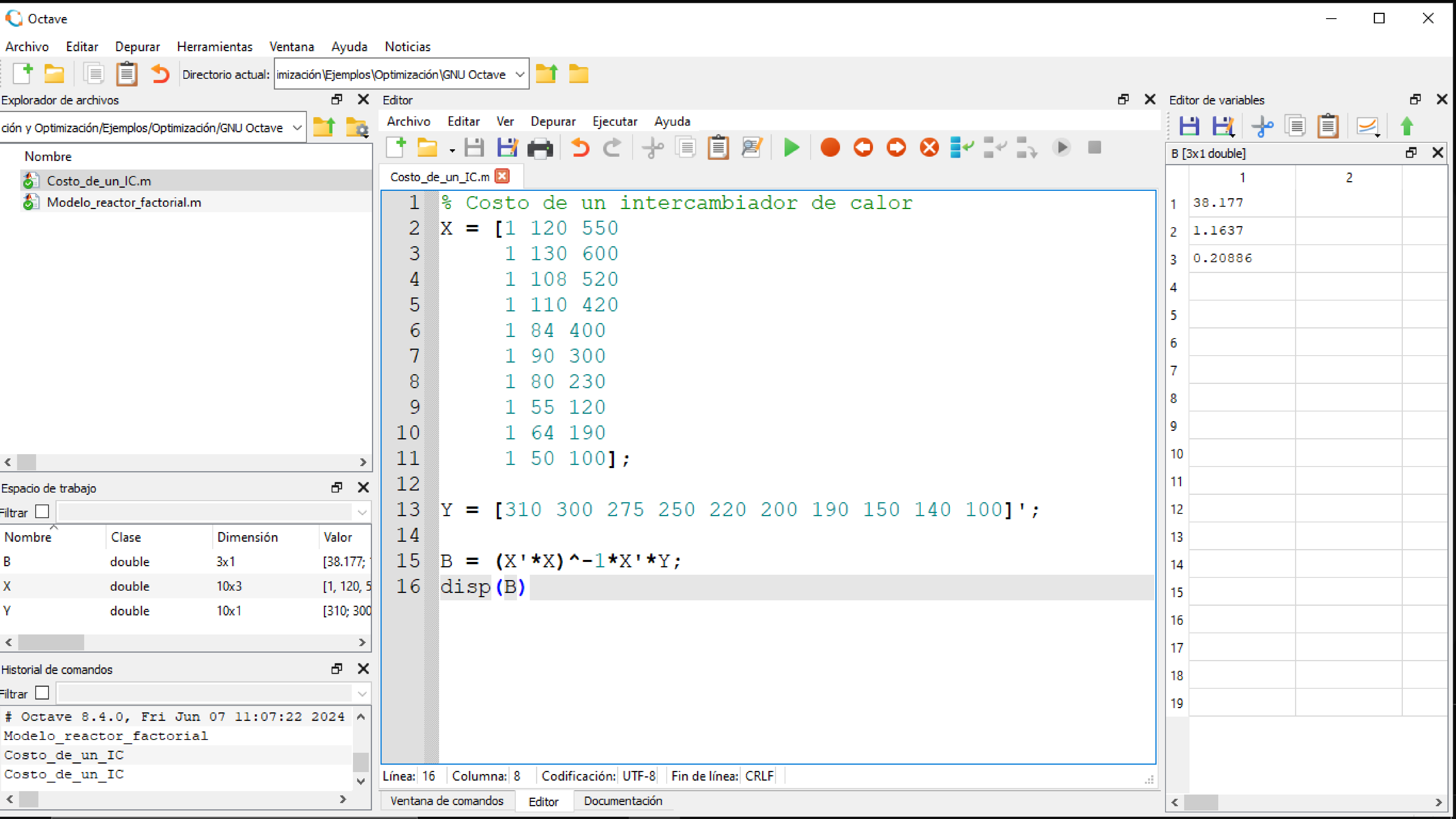
Costo de intercambiadores

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 120 & 550 \\ 1 & 130 & 600 \\ 1 & 108 & 520 \\ 1 & 110 & 420 \\ 1 & 84 & 400 \\ 1 & 90 & 300 \\ 1 & 80 & 230 \\ 1 & 55 & 120 \\ 1 & 64 & 190 \\ 1 & 50 & 100 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 310 \\ 300 \\ 275 \\ 250 \\ 220 \\ 200 \\ 190 \\ 150 \\ 140 \\ 100 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} 38.18 \\ 1.16 \\ 0.21 \end{pmatrix}$$

Costo de intercambiador de calor

$$X := \begin{bmatrix} 1 & 120 & 550 \\ 1 & 130 & 600 \\ 1 & 108 & 520 \\ 1 & 110 & 420 \\ 1 & 84 & 400 \\ 1 & 90 & 300 \\ 1 & 80 & 230 \\ 1 & 55 & 120 \\ 1 & 64 & 190 \\ 1 & 50 & 100 \end{bmatrix} \qquad Y := \begin{bmatrix} 310 \\ 300 \\ 275 \\ 250 \\ 220 \\ 200 \\ 190 \\ 150 \\ 140 \\ 100 \end{bmatrix}$$

$$\beta := \left(X^{\mathrm{T}} \cdot X\right)^{-1} \cdot X^{\mathrm{T}} \cdot Y = \begin{bmatrix} 38.1773 \\ 1.1637 \\ 0.2089 \end{bmatrix}$$


Octave
Archivo Editar Depurar Herramientas Ventana Ayuda Noticias
Directorio actual: imización\Ejemplos\Optimización\GNU Octave
Explorador de archivos
ción y Optimización/Ejemplos/Optimización/GNU Octave
Nombre
Costo_de_un_IC.m
Modelo_reactor_factorial.m
Espacio de trabajo
Filtrar
Nombre Clase Dimensión Valor
B double 3x1 [38.177;
X double 10x3 [1, 120, 5
Y double 10x1 [310; 300
Historial de comandos
Filtrar
Octave 8.4.0, Fri Jun 07 11:07:22 2024
Modelo_reactor_factorial
Costo_de_un_IC
Costo_de_un_IC
Editor
Archivo Editar Ver Depurar Ejecutar Ayuda
Costo_de_un_IC.m
% Costo de un intercambiador de calor
X = [1 120 550
1 130 600
1 108 520
1 110 420
1 84 400
1 90 300
1 80 230
1 55 120
1 64 190
1 50 100];
Y = [310 300 275 250 220 200 190 150 140 100]';
B = (X'*X)^-1*X'*Y;
disp(B)
Línea: 16 Columna: 8 Codificación: UTF-8 Fin de línea: CRLF
Ventana de comandos Editor Documentación
Editor de variables
B [3x1 double]
1 2
1 38.177
2 1.1637
3 0.20886

EMT x64 (Costo de un IC)

File Recent Edit Extras Options User Menu Tasks Help

Estimación de costo de un intercambiador de calor

```
>X =  [1, 120, 550; ...
        1, 130, 600; ...
        1, 108, 520; ...
        1, 110, 420; ...
        1, 84, 400; ...
        1, 90, 300; ...
        1, 80, 230; ...
        1, 55, 120; ...
        1, 64, 190; ...
        1, 50, 100];
>Y = [310, 300, 275, 250, 220, 200, 190, 150, 140, 100]';
```

$$\beta = \left(X^{\mathrm{T}}X\right)^{-1}X^{\mathrm{T}}Y$$

```
>B = inv(X'.X).X'.Y

        38.1773
        1.16367
       0.208863
```

Diseño factorial

Diseño factorial

- Es un plan de experimentación para ajustar un modelo de regresión lineal multivariable.
- Facilita la determinación de los coeficientes del modelo.
- Aumenta la exactitud de los coeficientes del modelo.
- La covarianza entre los coeficientes es mínima.

$$y = \sum_{j=0}^{n} \beta_j \, x_j$$

$$x_0 = 1$$

Diseño factorial

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$$

$$\underset{\beta}{\text{Min}} \sum_{i=1}^{p} \left(y_i - \sum_{j=0}^{n} \beta_j x_{i,j} \right)^2$$

$$x_{i,0} = 1$$

Experimento	Diseño Experimental		Respuesta
n	**x_1**	**x_2**	***y***
1	-1	-1	y_1
2	1	-1	y_2
3	-1	1	y_3
4	1	1	y_4
5	0	0	y_5

Diseño factorial

$$X^{\mathrm{T}}X = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad X^{\mathrm{T}}Y = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{5} y_i \\ -y_1 + y_2 - y_3 + y_4 \\ -y_1 - y_2 + y_3 + y_4 \end{pmatrix}$$

- Para invertir matriz, basta con tomar la recíproca de los elementos de la diagonal.

Modelo de un reactor

Reactor

Se tiene un reactor operando a 220 °F y 3 atm. Se desea desarrollar un modelo lineal en *T* y *P* para predecir el efecto de perturbaciones de ± 20 °F y ± 2 atm sobre la producción del reactor.

Reactor

$$x_1 = \frac{T - 220}{20} \qquad x_2 = \frac{P - 3}{2}$$

x_1	x_2	y (producción)
-1	-1	20.50
1	-1	60.14
-1	1	58.89
1	1	67.71
0	0	77.87
0	0	78.93
0	0	70.10

Reactor

$$X^{\mathrm{T}}X = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \left(X^{\mathrm{T}}X\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/7 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \quad X^{T}Y = \begin{pmatrix} 434.1 \\ 48.46 \\ 45.96 \end{pmatrix}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 62.02 \\ 12.11 \\ 11.49 \end{pmatrix}$$

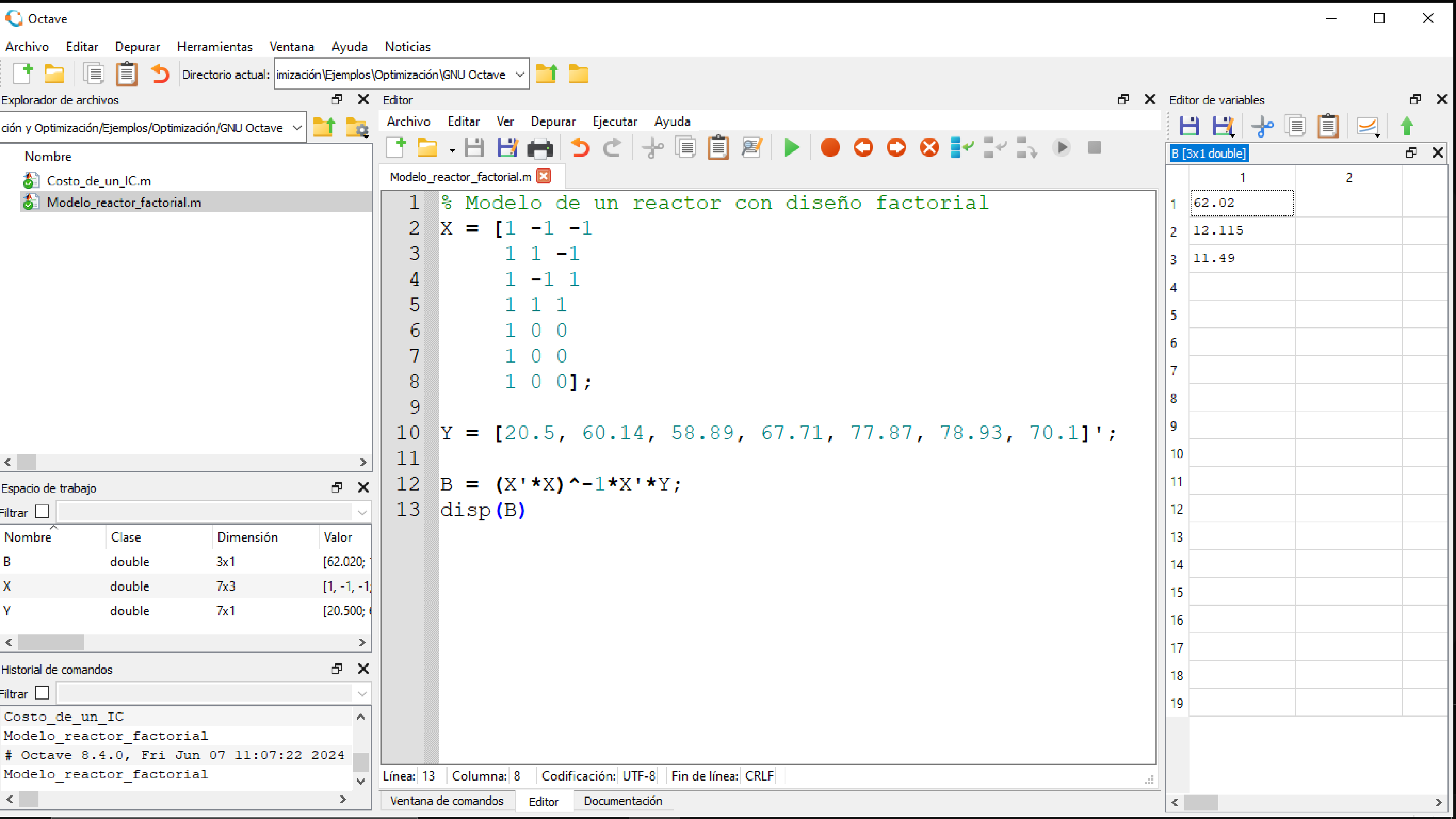
SMath Solver - [Modelo de un reactor diseño factorial.sm*]

Diseño de un reactor con diseño factorial

$$X := \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad Y := \begin{bmatrix} 20.50 \\ 60.14 \\ 58.89 \\ 67.71 \\ 77.87 \\ 78.93 \\ 70.10 \end{bmatrix}$$

$$\beta := \left(X^{\mathrm{T}} \cdot X \right)^{-1} \cdot X^{\mathrm{T}} \cdot Y = \begin{bmatrix} 62.02 \\ 12.115 \\ 11.49 \end{bmatrix}$$

Página 1 de 1 Listo



Octave
Archivo Editar Depurar Herramientas Ventana Ayuda Noticias
Directorio actual: imización\Ejemplos\Optimización\GNU Octave
Explorador de archivos
ción y Optimización/Ejemplos/Optimización/GNU Octave
Nombre
Costo_de_un_IC.m
Modelo_reactor_factorial.m
Espacio de trabajo
Filtrar
Nombre Clase Dimensión Valor
B double 3x1 [62.020;
X double 7x3 [1, -1, -1;
Y double 7x1 [20.500;
Historial de comandos
Filtrar
Costo_de_un_IC
Modelo_reactor_factorial
Octave 8.4.0, Fri Jun 07 11:07:22 2024
Modelo_reactor_factorial
Editor
Archivo Editar Ver Depurar Ejecutar Ayuda
Modelo_reactor_factorial.m
% Modelo de un reactor con diseño factorial
X = [1 -1 -1
1 1 -1
1 -1 1
1 1 1
1 0 0
1 0 0
1 0 0];
Y = [20.5, 60.14, 58.89, 67.71, 77.87, 78.93, 70.1]';
B = (X'*X)^-1*X'*Y;
disp(B)
Línea: 13 Columna: 8 Codificación: UTF-8 Fin de línea: CRLF
Ventana de comandos Editor Documentación
Editor de variables
B [3x1 double]
1 2
1 62.02
2 12.115
3 11.49

EMT x64 (Modelo de un reactor diseño factorial)

File Recent Edit Extras Options User Menu Tasks Help

Modelo de un reactor con diseño factorial

```
>X = [1, -1, -1; ...
      1, 1, -1; ...
      1, -1, 1; ...
      1, 1, 1; ...
      1, 0, 0; ...
      1, 0, 0; ...
      1, 0, 0];
>Y = [20.5, 60.14, 58.89, 67.71, 77.87, 78.93, 70.1]';
```

$$\beta = \left(X^{\mathrm{T}} X\right)^{-1} X^{\mathrm{T}} Y$$

```
>B = inv(X'.X).X'.Y

          62.02
         12.115
          11.49
```