

# Optimización Introducción Parte III

Enrique E. Tarifa, Facultad de Ingeniería, UNJu

# Extracción por solvente

# Extracción por solvente

Un equipo extractor por solvente opera por lotes. La preparación del equipo para cada ciclo de operación consume 15 min. La cantidad  $M$  (kg) de producto extraído en un tiempo de operación  $t$  (h) está dada por la siguiente correlación:

$$M = k(1 - e^{-t/\tau})$$

donde  $k = 15$  kg,  $\tau = 10$  h.

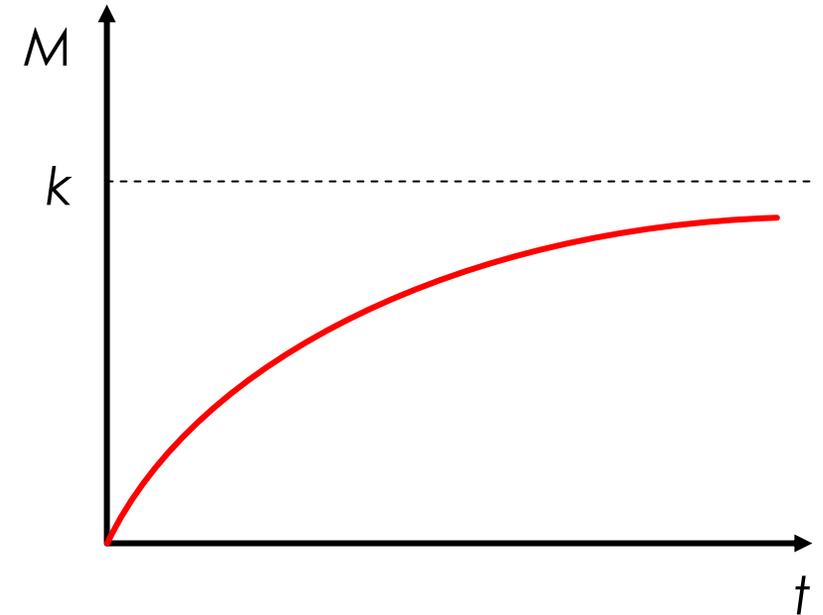
Se deben extraer 150 kg en el menor tiempo posible.

# Extracción por solvente

- $t_p$ : tiempo de preparación (h/ciclo)
- $t$ : duración de un ciclo (h/ciclo)
- $M$ : masa extraída en un ciclo (kg/ciclo)
- $n$ : cantidad de ciclos (ciclo)
- $t_o$ : tiempo de operación (h)
- $M_o$ : masa extraída en la operación (kg)

# Extracción por solvente

- Un  $n = 1$  no es suficiente porque  $M_0 > k$ .
- Un valor alto de  $n$  implica sumar  $n t_p$  tiempos muertos.
- Debe haber un valor óptimo de  $n$  intermedio.



# Extracción por solvente

$$\text{Min } t_o$$

$t_o, t, n, M$

s. a:

$$t_o = n(tp + t)$$

$$M_o = nM$$

$$M = k(1 - e^{-t/\tau})$$

$$n \in \mathbb{N}, M \geq 0, t_o \geq 0, t \geq 0$$

- $tp = 0.25$  h
- $k = 15$  kg
- $\tau = 10$  h
- $M_o = 150$  kg

# Modelo en LINGO

```
Lingo Model - Extracción por solvente
1  !Extracción por solvente;
2  Data:
3      k = 15;      !kg;
4      tau = 10;   !h;
5      tp = 0.25; !h;
6      Mo = 150;  !kg;
7  EndData
8
9  [FO]  Min = to;
10
11 [Rto] to = n*(tp+t);
12 [RMo] Mo = n*M;
13 [RM]  M = k*(1-@exp(-t/tau));
14 [Rn]  @gin(n);
```

# Resultados en LINGO

Variable	Value	Reduced Cost
K	15.00000	0.000000
TAU	10.00000	0.000000
TP	0.2500000	0.000000
MO	150.0000	0.000000
TO	124.0585	0.000000
N	52.00000	0.4788611E-02
T	2.135741	0.000000
M	2.884615	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
FO	124.0585	-1.000000
RTO	0.000000	-1.000000
RMO	0.000000	0.8253968
RM	0.000000	42.92063

# Reconciliación de lecturas

# Reconciliación de lecturas

- Los balances no se cumplen por errores en las mediciones.
- Reconciliación de lecturas o de datos: Estima los valores reales de las variables a partir de sus mediciones y del modelo del proceso.
- Asegura el cumplimiento de los balances.

# Reconciliación de lecturas

$$\text{Min}_{x_i, y_j} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{l_i} \left( \frac{s_{i,k} - x_i}{\sigma_{i,k}} \right)^2$$

s. a:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) = 0$$

$$x_i \geq 0 \quad \forall i$$

$$y_j \geq 0 \quad \forall j$$

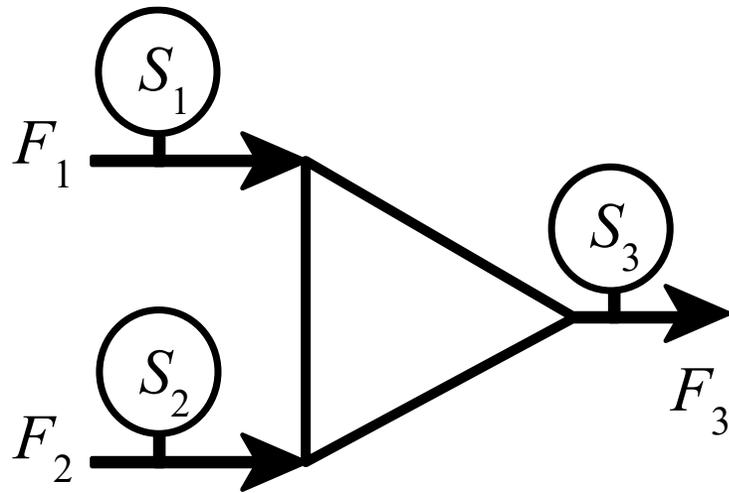
- Estima los valores de  $n$  variables medidas  $x$  y los valores de  $m$  variables no medidas y a partir de  $n_1$  mediciones  $s$  con desviación estándar  $\sigma$ .
- $s_{i,k}$  es la medición  $k$  de la variable  $i$ , y  $\sigma_{i,k}$  es su desviación estándar.

# Reconciliación de lecturas

- $F(.) = 0$ : Modelo del sistema. Vector con tamaño  $m_1$ .
- Cantidad de mediciones:  $n_1 = \sum_{i=1}^n l_i$
- Condición necesaria:
  - Redundancia de sensores:  $grs = n_1 - n$
  - Redundancia topológica:  $grt = m_1 - m$
  - Se debe cumplir  $grs + grt > 0$

# Mezclador 1

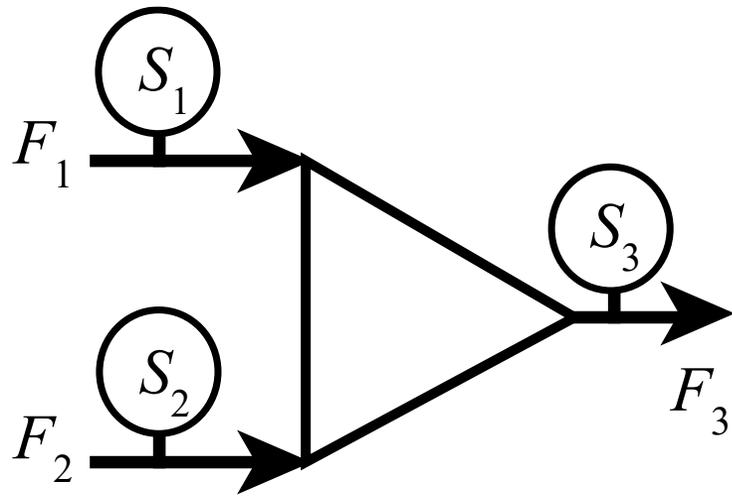
# Mezclador 1



$S_1$ (l/s)	$S_2$ (l/s)	$S_3$ (l/s)
10	15	27

No se verifica el balance de materia.

# Mezclador 1



$$\text{Min}_{F_1, F_2, F_3} \sum_{i=1}^3 (S_i - F_i)^2$$

s. a:

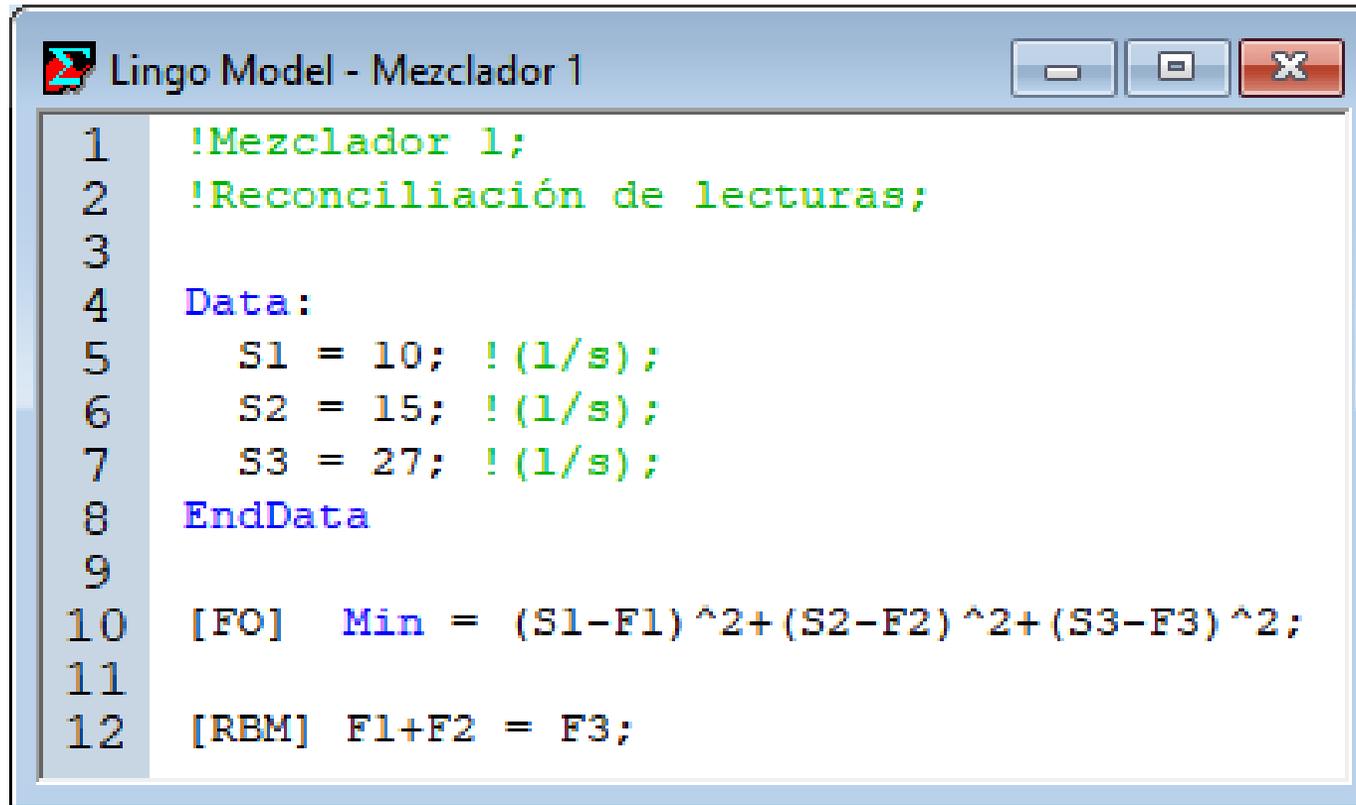
$$F_1 + F_2 = F_3$$

$$F_j \geq 0 \quad j = 1, 2, 3$$

- $grs = 3 - 3 = 0$
- $grt = 1 - 0 = 1$
- $grs + grt = 1 > 0$

Mezclador 1.lg4

# Modelo en LINGO



```
1  !Mezclador 1;  
2  !Reconciliación de lecturas;  
3  
4  Data:  
5      S1 = 10; !(1/s);  
6      S2 = 15; !(1/s);  
7      S3 = 27; !(1/s);  
8  EndData  
9  
10 [FO]  Min = (S1-F1)^2+(S2-F2)^2+(S3-F3)^2;  
11  
12 [RBM] F1+F2 = F3;
```

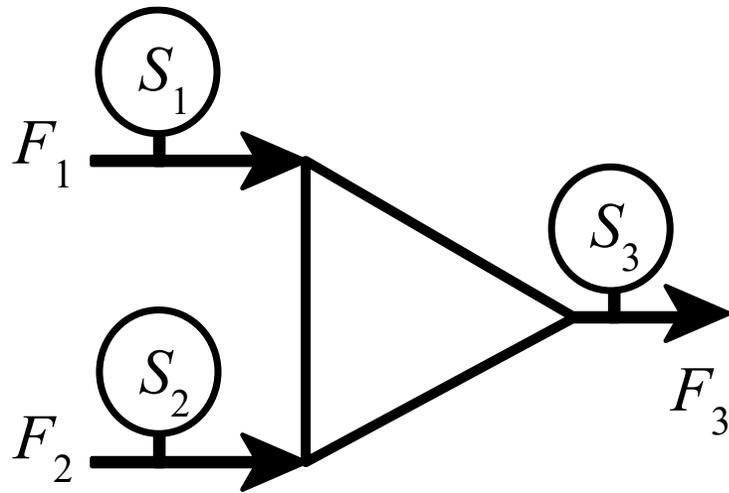
# Resultados en LINGO

Variable	Value	Reduced Cost
S1	10.00000	0.000000
S2	15.00000	0.000000
S3	27.00000	0.000000
F1	10.66667	0.7982303E-07
F2	15.66667	0.1457392E-07
F3	26.33333	0.6592139E-08

Row	Slack or Surplus	Dual Price
FO	1.333333	-1.000000
RBM	0.000000	-1.333333

# Mezclador 1



$S_1$ (l/s)	$S_2$ (l/s)	$S_3$ (l/s)
10	15	27

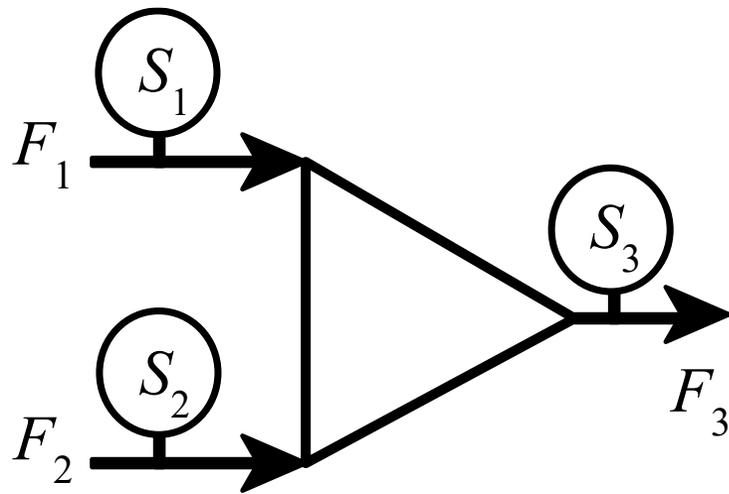


$F_1$ (l/s)	$F_2$ (l/s)	$F_3$ (l/s)
10.67	15.67	26.34



# Mezclador 2

# Mezclador 2



	Corrientes		
	1	2	3
$F$ (l/s)	10.0	20.0	27.0
$C$ (mol/l)	30	10	15

- $E_F$ : 0.1 l/s
- $E_C$ : 0.5 mol/l

Agua y metanol.  
 $C$  es la concentración de metanol.

# Mezclador 2

$$\text{Min}_{F_i, C_i} \frac{1}{0.1^2} \left( (10 - F_1)^2 + (20 - F_2)^2 + (27 - F_3)^2 \right) + \frac{1}{0.5^2} \left( (30 - C_1)^2 + (10 - C_2)^2 + (15 - C_3)^2 \right)$$

s. a:

$$F_1 + F_2 - F_3 = 0$$

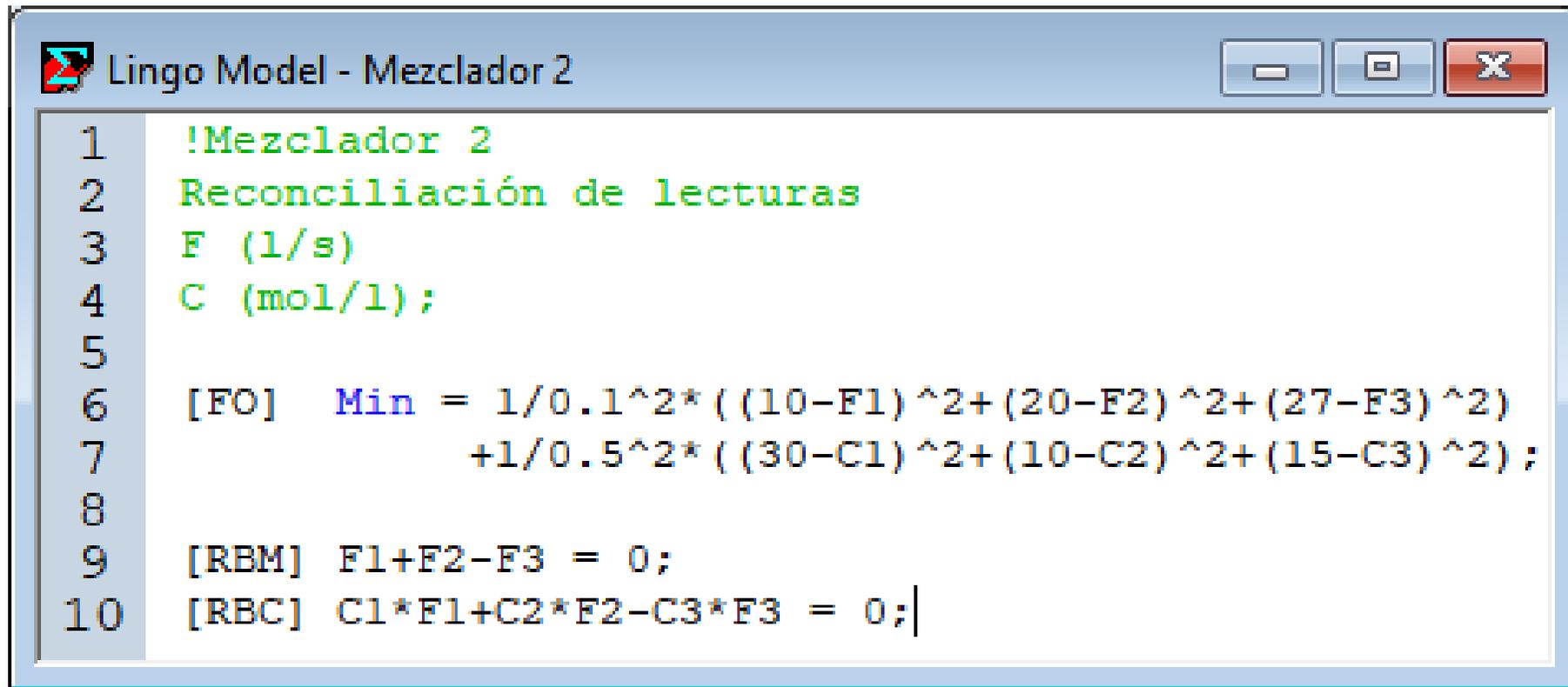
$$C_1 F_1 + C_2 F_2 - C_3 F_3 = 0$$

$$F_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3$$

$$C_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3$$

- $grs = 6 - 6 = 0$
- $grt = 2 - 0 = 2$
- $grs + grt = 2 > 0$  Mezclador 2.lg4

# Modelo en LINGO



```
Lingo Model - Mezclador 2
1  !Mezclador 2
2  Reconciliación de lecturas
3  F (1/s)
4  C (mol/l);
5
6  [FO]  Min = 1/0.1^2*((10-F1)^2+(20-F2)^2+(27-F3)^2
7         +1/0.5^2*((30-C1)^2+(10-C2)^2+(15-C3)^2);
8
9  [RBM] F1+F2-F3 = 0;
10 [RBC] C1*F1+C2*F2-C3*F3 = 0;
```

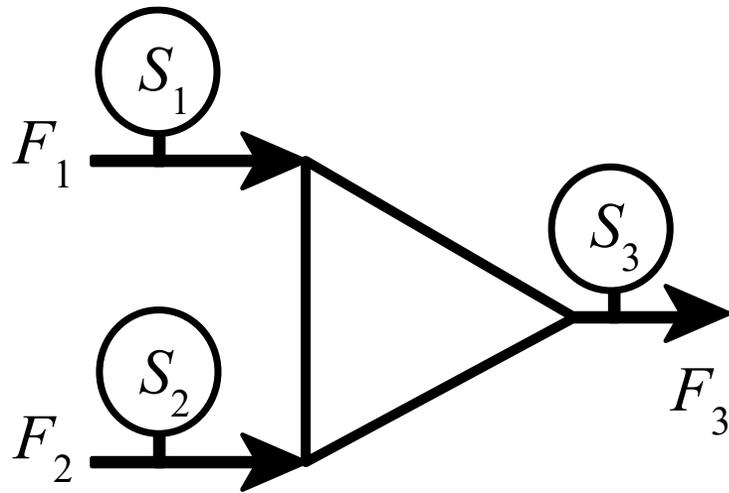
# Resultados en LINGO

Variable	Value	Reduced Cost
F1	8.985258	-0.2514405E-06
F2	19.01160	0.000000
F3	27.99686	0.6813677E-06
C1	29.70889	0.000000
C2	9.384048	-0.2909656E-07
C3	15.90706	0.5286781E-07

Row	Slack or Surplus	Dual Price
FO	305.1838	-1.000000
RBM	0.000000	195.2482
RBC	0.000000	0.2591901

# Mezclador 2



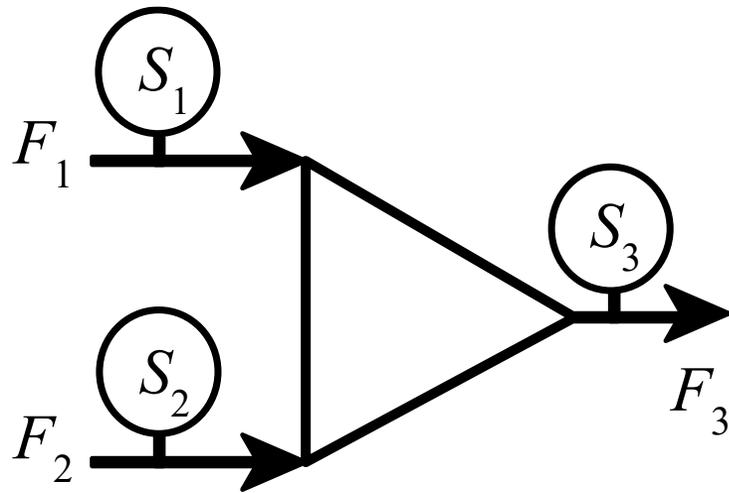
	Corrientes		
	1	2	3
$F$ (l/s)	10.0	20.0	27.0
$C$ (mol/l)	30	10	15



	Corrientes		
	1	2	3
$F$ (l/s)	8.99	19.01	28.00
$C$ (mol/l)	29.71	9.38	15.91



# Mezclador 2b



	Corrientes		
	1	2	3
$F$ (l/s)	10.0	20.0	27.0
$C$ (mol/l)	30	10	<del>15</del>

$E_F$ : 0.1 l/s  
 $E_C$ : 0.5 mol/l

# Mezclador 2b

$$\text{Min}_{F_i, C_i} \frac{1}{0.1^2} \left( (10 - F_1)^2 + (20 - F_2)^2 + (27 - F_3)^2 \right) + \frac{1}{0.5^2} \left( (30 - C_1)^2 + (10 - C_2)^2 + (15 - C_3)^2 \right)$$

s. a:

$$F_1 + F_2 - F_3 = 0$$

$$C_1 F_1 + C_2 F_2 - C_3 F_3 = 0$$

$$F_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3$$

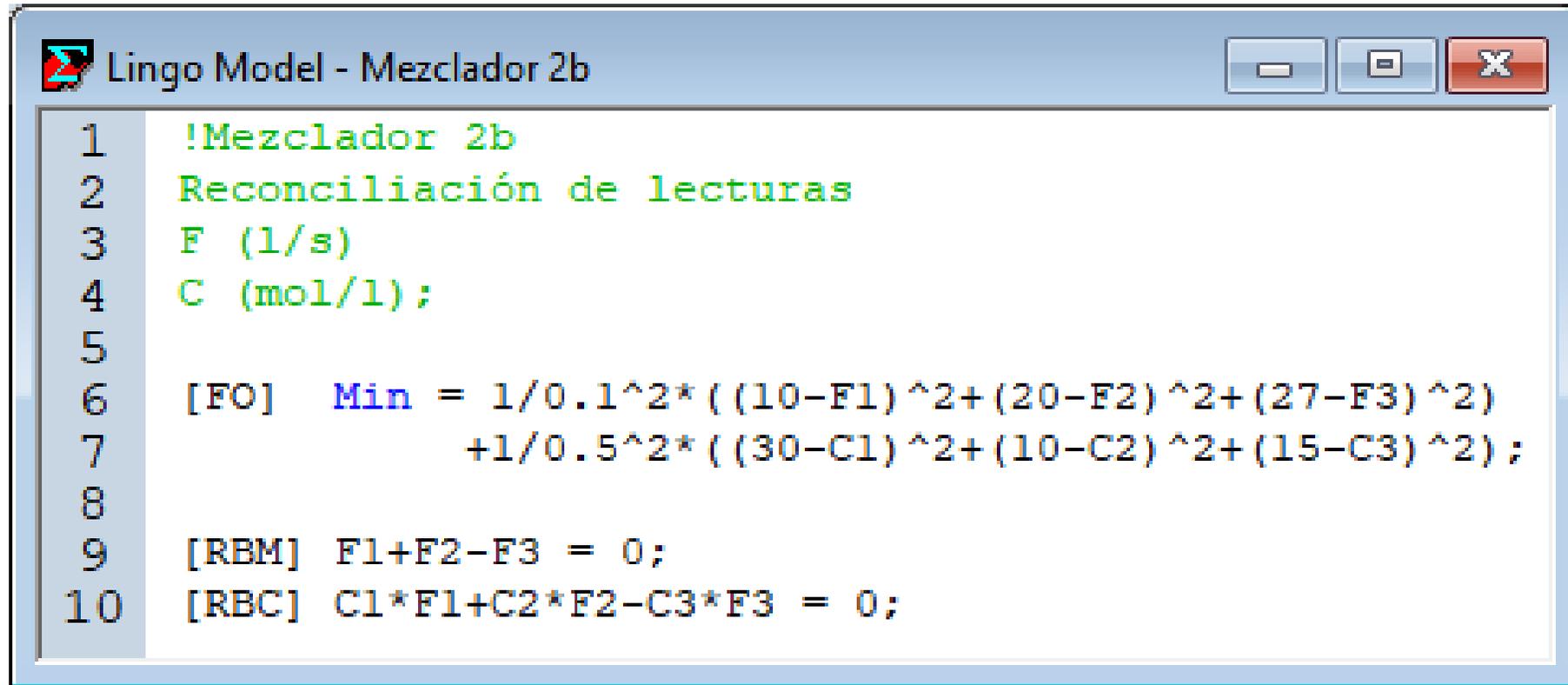
$$C_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3$$

- $grs = 5 - 5 = 0$
- $grt = 2 - 1 = 1$
- $grs + grt = 1 > 0$  Mezclador 2b.lg4

# Modelo en LINGO

```
Lingo Model - Mezclador 2
1  !Mezclador 2
2  Reconciliación de lecturas
3  F (1/s)
4  C (mol/l);
5
6  [FO]  Min = 1/0.1^2*((10-F1)^2+(20-F2)^2+(27-F3)^2)
7         +1/0.5^2*((30-C1)^2+(10-C2)^2+(15-C3)^2);
8
9  [RBM] F1+F2-F3 = 0;
10 [RBC] C1*F1+C2*F2-C3*F3 = 0;
```

# Modelo en LINGO

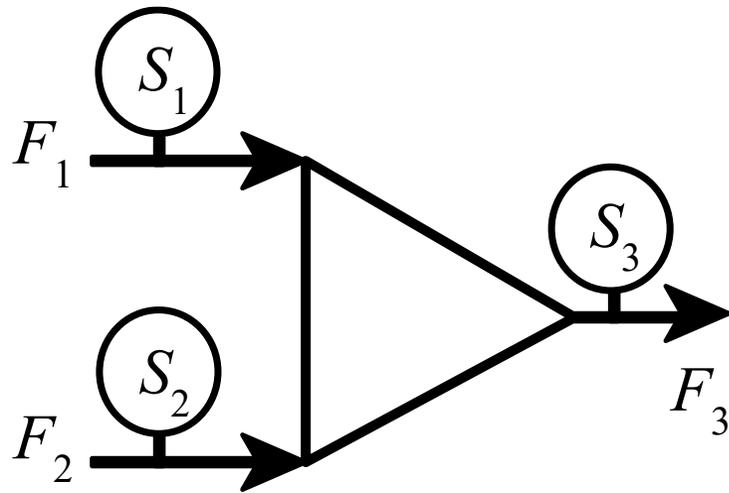


```
Lingo Model - Mezclador 2b
1  !Mezclador 2b
2  Reconciliación de lecturas
3  F (l/s)
4  C (mol/l);
5
6  [FO]  Min = 1/0.1^2* ((10-F1) ^2+(20-F2) ^2+(27-F3) ^2)
7         +1/0.5^2* ((30-C1) ^2+(10-C2) ^2+(15-C3) ^2);
8
9  [RBM] F1+F2-F3 = 0;
10 [RBC] C1*F1+C2*F2-C3*F3 = 0;
```

# Resultados en LINGO

Variable	Value	Reduced Cost
F1	8.985258	-0.2514405E-06
F2	19.01160	0.000000
F3	27.99686	0.6813677E-06
C1	29.70889	0.000000
C2	9.384048	-0.2909656E-07
C3	15.90706	0.5286781E-07
Row	Slack or Surplus	Dual Price
FO	305.1838	-1.000000
RBM	0.000000	195.2482
RBC	0.000000	0.2591901

# Mezclador 2b



	Corrientes		
	1	2	3
$F$ (l/s)	10.0	20.0	27.0
$C$ (mol/l)	30	10	-

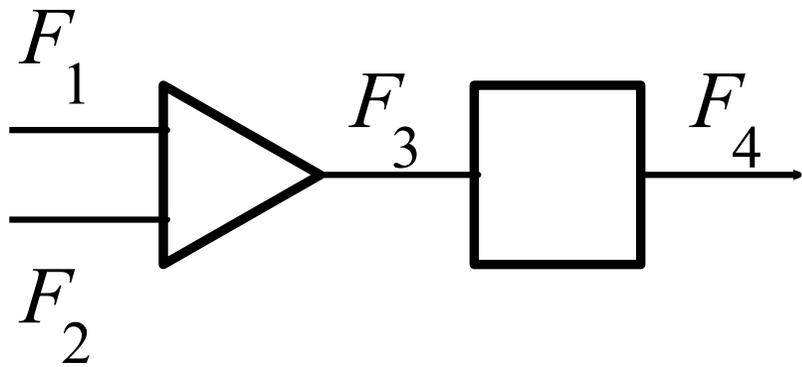


	Corrientes		
	1	2	3
$F$ (l/s)	8.99	19.01	28.00
$C$ (mol/l)	29.71	9.38	15.91



# Calculabilidad

# Sistema calculable



$$F_1 + F_2 - F_3 = 0$$

$$F_3 - F_4 = 0$$



Sistema no calculable.lg4  
Sistema calculable.lg4

	Corrientes			
	1	2	3	4
$F$ (l/s)	-	-	29.5	30.3
			28.2	



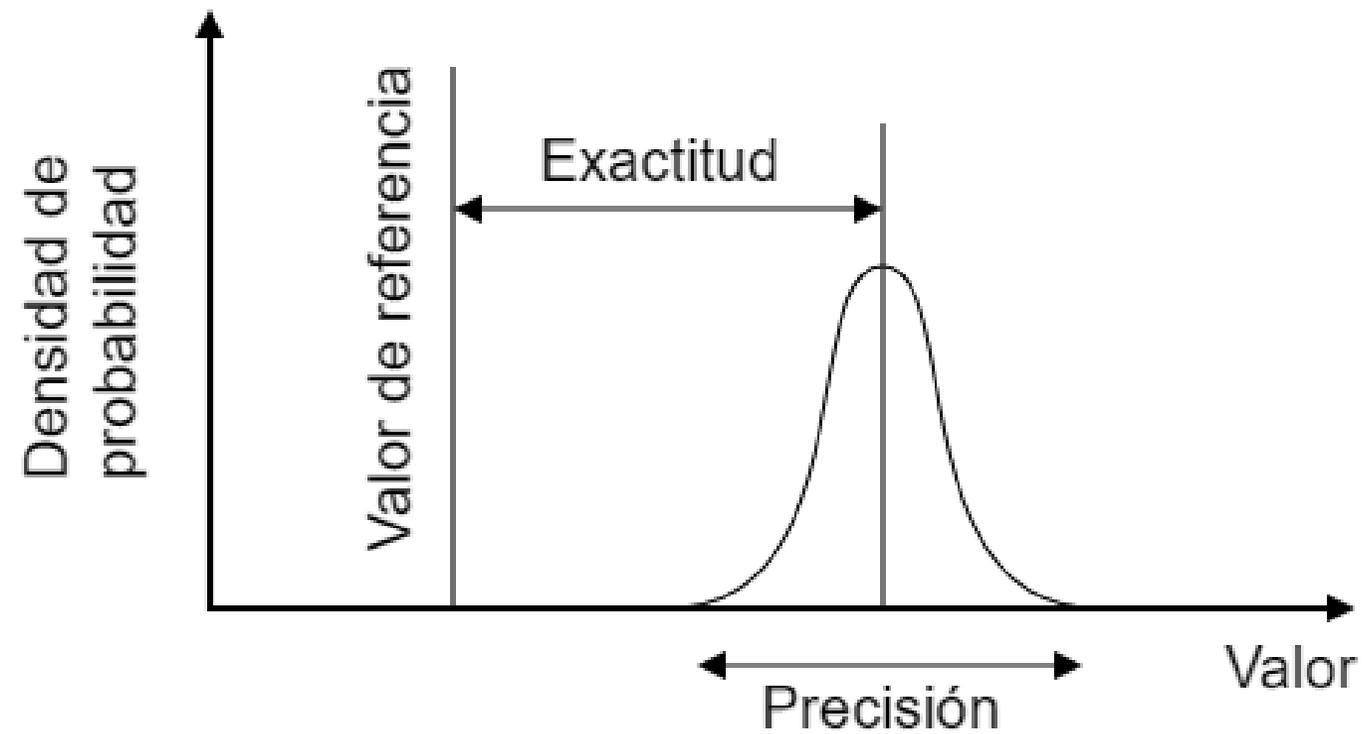
	Corrientes			
	1	2	3	4
$F$ (l/s)	8.9	-	-	28.0
	7.6			



- $grs = 3 - 2 = 1$
- $grt = 2 - 2 = 0$
- $grs + grt = 1 > 0$

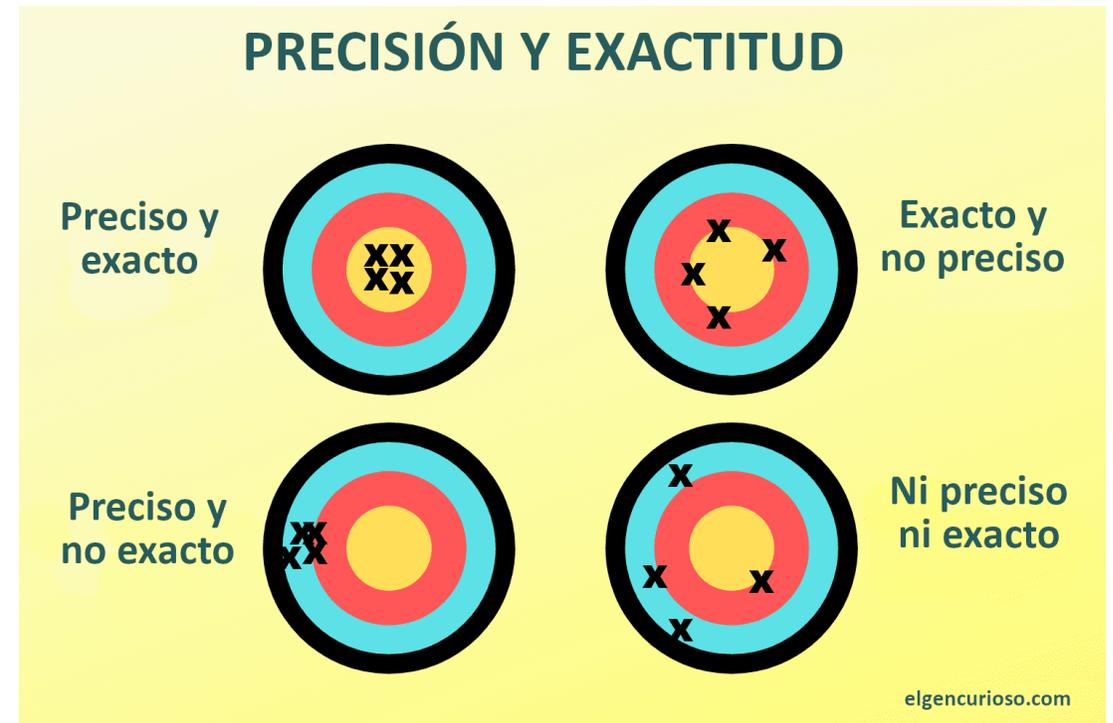
# Instrumentación

# Instrumentación



# Instrumentación

- Es importante dónde se colocan los instrumentos.
- Los instrumentos más precisos, tienen mayor peso en la función objetivo.
- La calibración mejora la exactitud.



Modelo no lineal

# Clasificación de modelos

- Programación Lineal (LP, *Linear Programming*)
- Programación No Lineal (NLP, *Nonlinear Programming*)
- Programación Lineal Entera (ILP, *Integer Linear Programming*)
- Programación No Lineal Entera (INLP, *Integer Nonlinear Programming*)
- Programación Lineal Entera Mixta (MILP, *Mixed Integer Linear Programming*)
- Programación No Lineal Entera Mixta (MINLP, *Mixed Integer Nonlinear Programming*)

$$FO(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$$

# Modelo no lineal

$$\text{Max}_x x^3 - 9x^2 + 26x - 24$$

s.a :

$$x \geq 1.5$$

$$x \leq 4.5$$

Modelo no lineal.xlsx

Modelo no lineal.lg4

Archivos Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Revisar Vista Programador Ayuda

Portapapeles Fuente Alineación Número Estilos Celdas Edición Complementos Analizar datos

D4 1

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	<b>Modelo no lineal</b>												
2													
3	<b>FO</b>		<b>Variables</b>										
4	-6		x =	1									
5													
6	<b>MI</b>	<b>Tipo</b>	<b>MD</b>										
7	1	>=	1.5										
8	1	<=	4.5										
9													
10													
11													
12													
13													
14													
15													
16													
17													
18													

fx Insertar función Biblioteca de funciones: Autosuma, Usado recientemente, Financieras, Lógicas, Texto, Fecha y hora, Búsqueda y referencia, Matemáticas y trigonométricas, Más funciones, Nombres definidos: Administrador de nombres, Asignar nombre, Utilizar en la fórmula, Crear desde la selección, Auditoría de fórmulas: Rastrear precedentes, Rastrear dependientes, Quitar flechas, Ventana Inspección, Opciones para el cálculo

D4 1

	A	B	C	D	E	F
1	<b>Modelo no lineal</b>					
2						
3	<b>FO</b>		<b>Variables</b>			
4	=D4^3-9*D4^2+26*D4-24		x =	1		
5						
6	<b>MI</b>	<b>Tipo</b>	<b>MD</b>			
7	=D4	>=	1.5			
8	=D4	<=	4.5			
9						
10						
11						
12						
13						
14						
15						
16						
17						
18						

Obtener y transformar datos Consultas & conexiones Tipos de datos Ordenar y filtrar

	A	B	C	D	E	F	G
1	<b>Modelo no lineal</b>						
2							
3	<b>FO</b>		<b>Variables</b>				
4	-6		x =	1			
5							
6	<b>MI</b>	<b>Tipo</b>	<b>MD</b>				
7	1	>=	1.5				
8	1	<=	4.5				
9							
10							
11							
12							
13							
14							
15							
16							
17							
18							

### Parámetros de Solver

Establecer objetivo:

Para:  Máx  Mín  Valor de:

Cambiando las celdas de variables:

Sujeto a las restricciones:

- SAS7 >= SC57
- SAS8 <= SC58

Convertir variables sin restricciones en no negativas

Método de resolución:

Método de resolución: Seleccione el motor GRG Nonlinear para problemas de Solver no lineales suavizados. Seleccione el motor LP Simplex para problemas de Solver lineales, y seleccione el motor Evolutionary para problemas de Solver no suavizados.

Archivos Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas **Datos** Revisar Vista Programador Ayuda Comentarios Compartir

Obtener y transformar datos Consultas y conexiones Tipos de datos Ordenar y filtrar Herramientas de datos Previsión Análisis

fx 2.42264973583779

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	<b>Modelo no lineal</b>												
2													
3	<b>FO</b>		<b>Variables</b>										
4	0.3849002		x =	2.4226497									
5													
6	<b>MI</b>	<b>Tipo</b>	<b>MD</b>										
7	2.4226497	>=	1.5										
8	2.4226497	<=	4.5										
9													
10													
11													
12													
13													
14													
15													
16													
17													
18													

**Resultados de Solver**

Solver encontró una solución. Se cumplen todas las restricciones y condiciones óptimas.

Conservar solución de Solver

Restaurar valores originales

Volver al cuadro de diálogo de parámetros de Solver

Informes de esquema

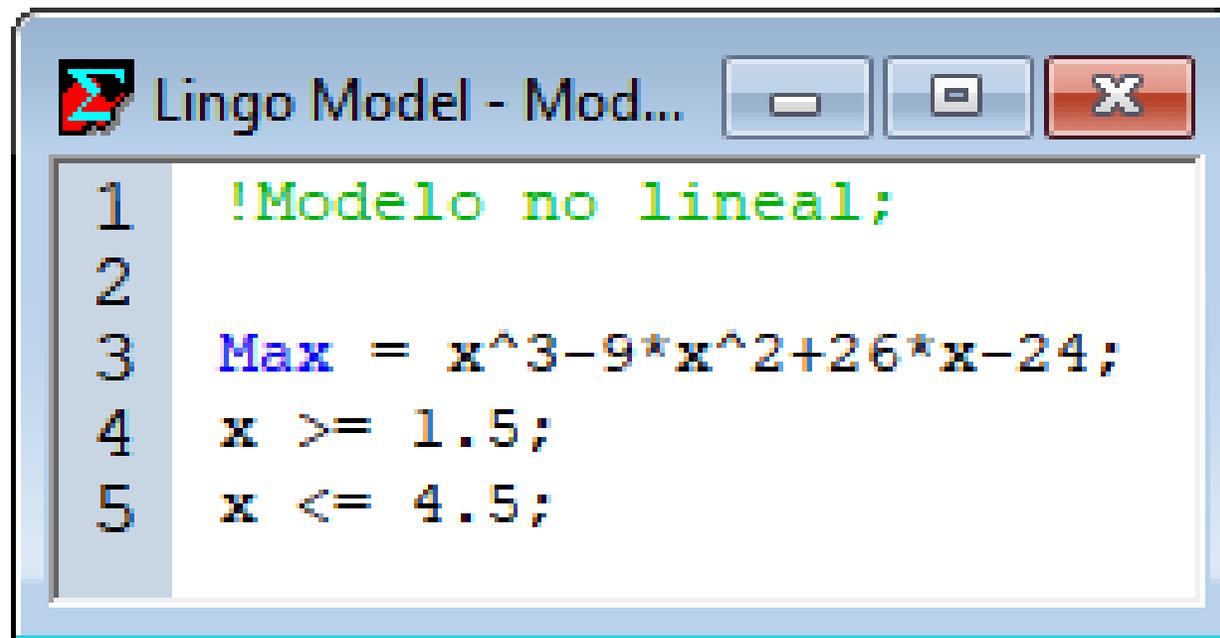
Informes: Responder, Sensibilidad, Límites

Aceptar Cancelar Guardar escenario...

Solver encontró una solución. Se cumplen todas las restricciones y condiciones óptimas.

Al usar el motor GRG, Solver ha encontrado al menos una solución óptima local. Al usar Simplex LP, significa que Solver ha encontrado una solución óptima global.

# Modelo en LINGO



```
Lingo Model - Mod...  
1  !Modelo no lineal;  
2  
3  Max = x^3-9*x^2+26*x-24;  
4  x >= 1.5;  
5  x <= 4.5;
```

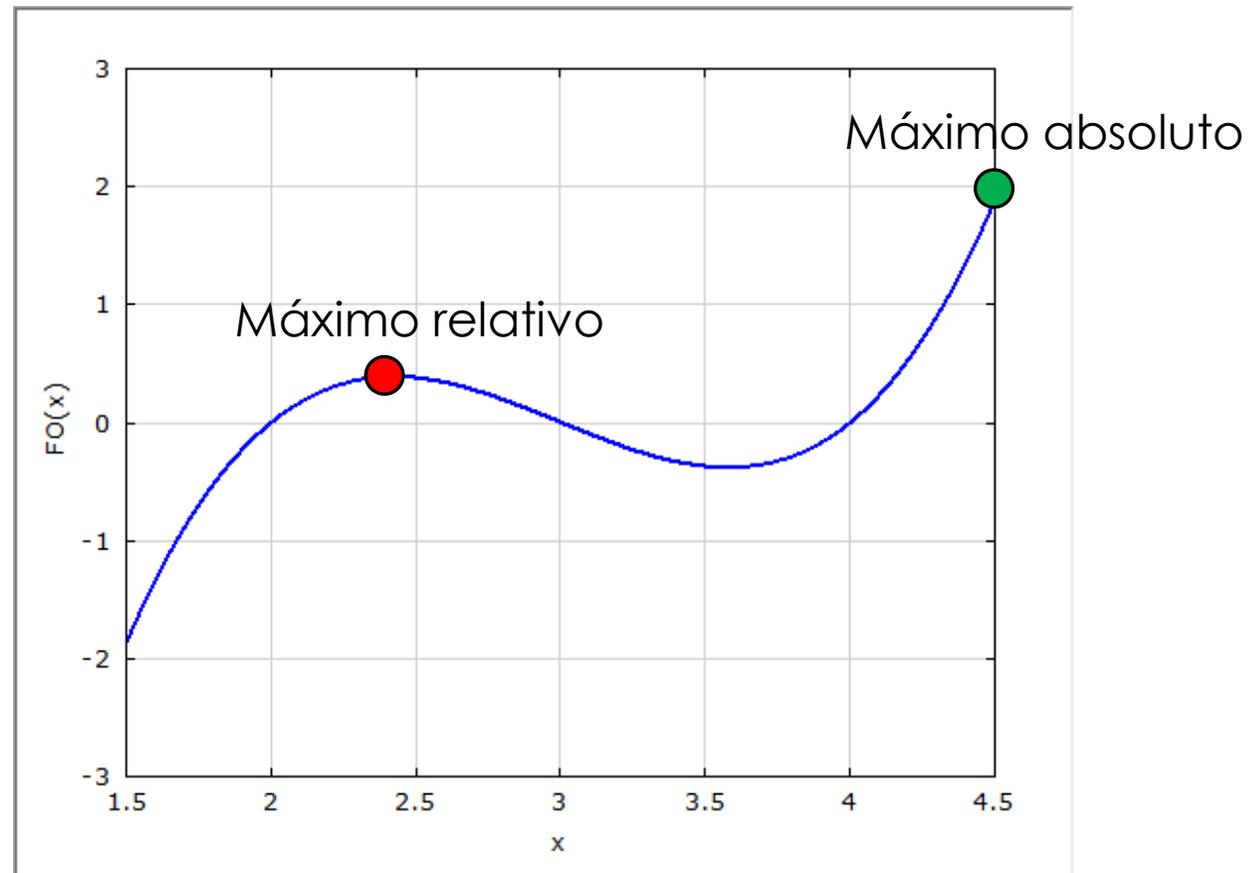
# Resultados en LINGO

Variable	Value	Reduced Cost
X	4.500000	-5.750000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	1.875000	1.000000
2	3.000000	0.000000
3	0.000000	0.000000

# Modelo no lineal





Lingo Options

Nonlinear Solver	Integer Pre-Solver	Integer Solver
Interface	General Solver	Linear Solver
Global Solver	Model Generator	SP Solver

Global Solver Options:

Use Global Solver

Variable Upper Bound:

Value:  Application:

Tolerances:

Optimality:  Delta:

Strategies:

Branching:  Box Selection:  Reformulation:

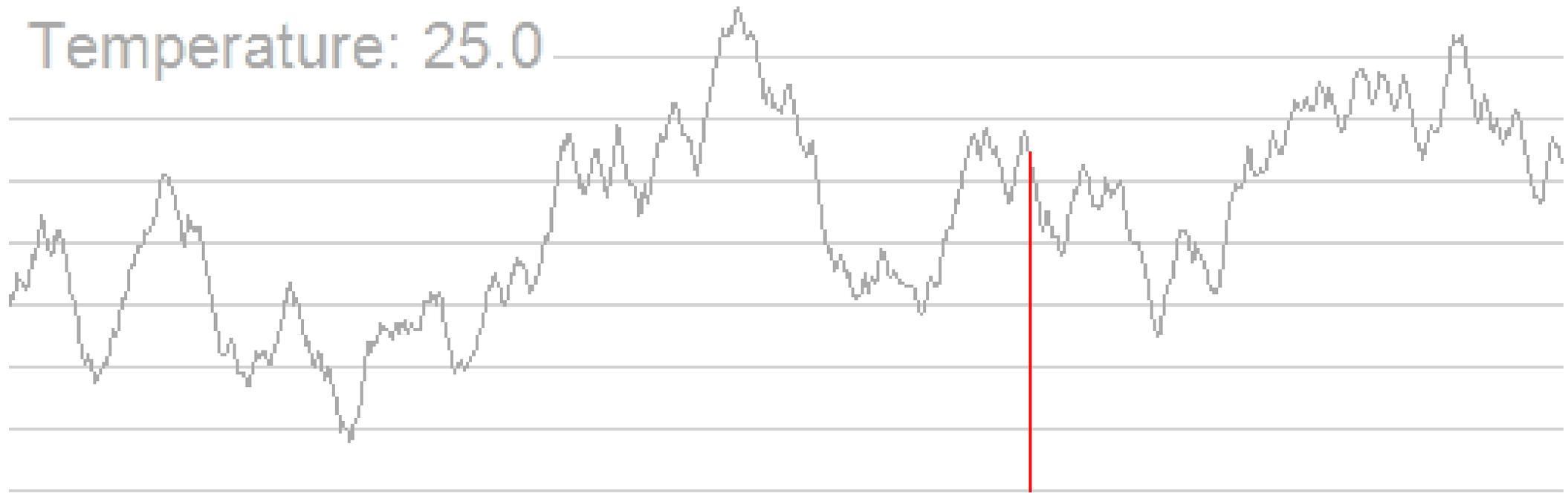
Multistart Solver:

Attempts:

Multistart Hurdle:

Help Cancel Default Save Aplicar OK

# Simulated annealing, maximización

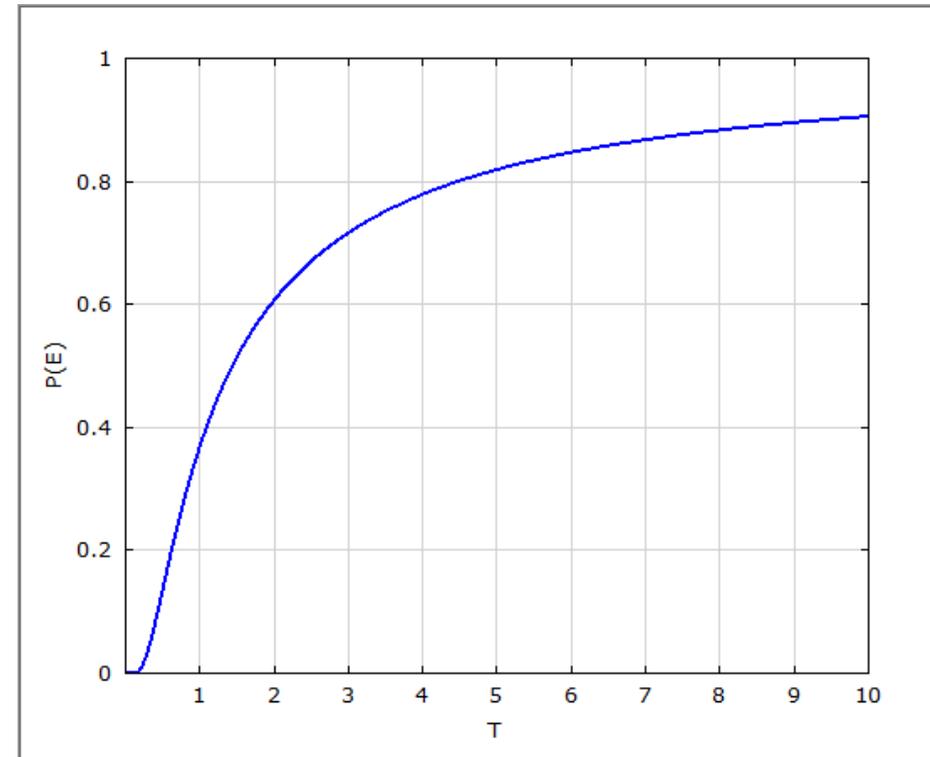


# Simulated annealing

- $x \leftarrow x_0$
- Para  $k = 0$  hasta  $k_{\max}$ 
  - $T \leftarrow \text{temperatura}(k/k_{\max})$
  - $x_{\text{new}} \leftarrow \text{vecino}(x, T)$
  - Si  $P(E(x), E(x_{\text{new}}), T) \geq \text{Aleatorio}()$  entonces  $x \leftarrow x_{\text{new}}$
- Siguiente  $k$
- Reportar  $x$

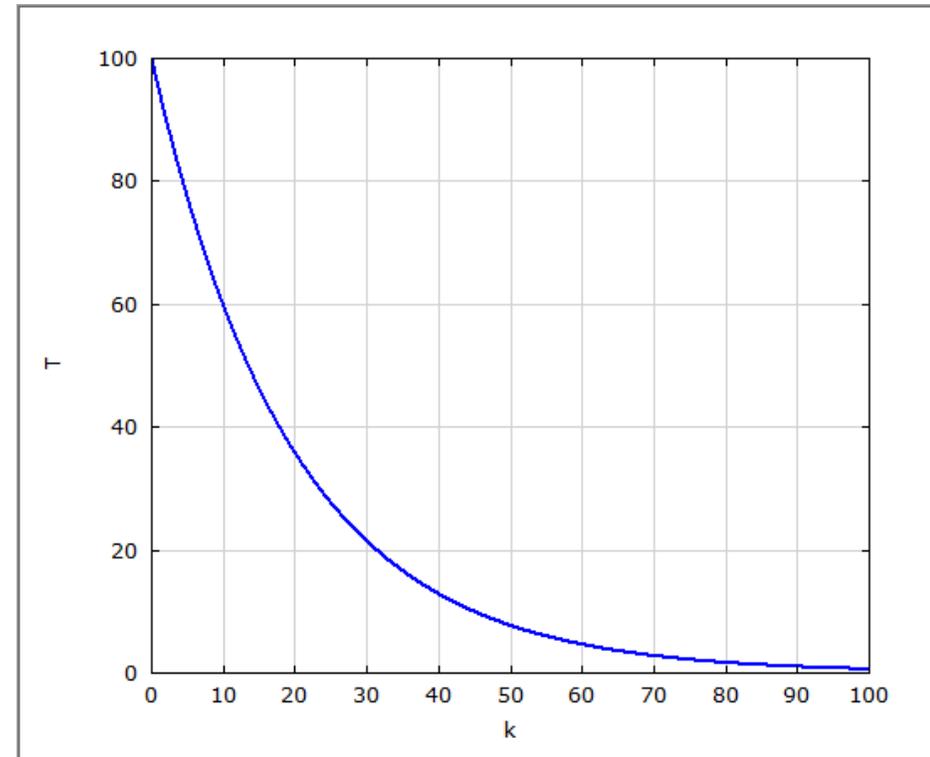
# Simulated annealing

- Distribución de probabilidad de Boltzmann:
  - $P(E) \sim \exp(-E/(k T) )$
  - $k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$
- Metropolis et al. (1953):
  - $p = \exp[-(E_2 - E_1)/(k T) ]$
  - Si  $E_2 < E_1$  entonces  $p \leftarrow 1$



# Simulated annealing

- $T_0$ : temperatura inicial, e. g. 100.
- Funciones de enfriamiento:
  - Exponencial:  $T \leftarrow T_0 0.95^k$
  - Rápida:  $T \leftarrow T_0/k$
  - Boltzmann:  $T \leftarrow T_0/\ln(k)$

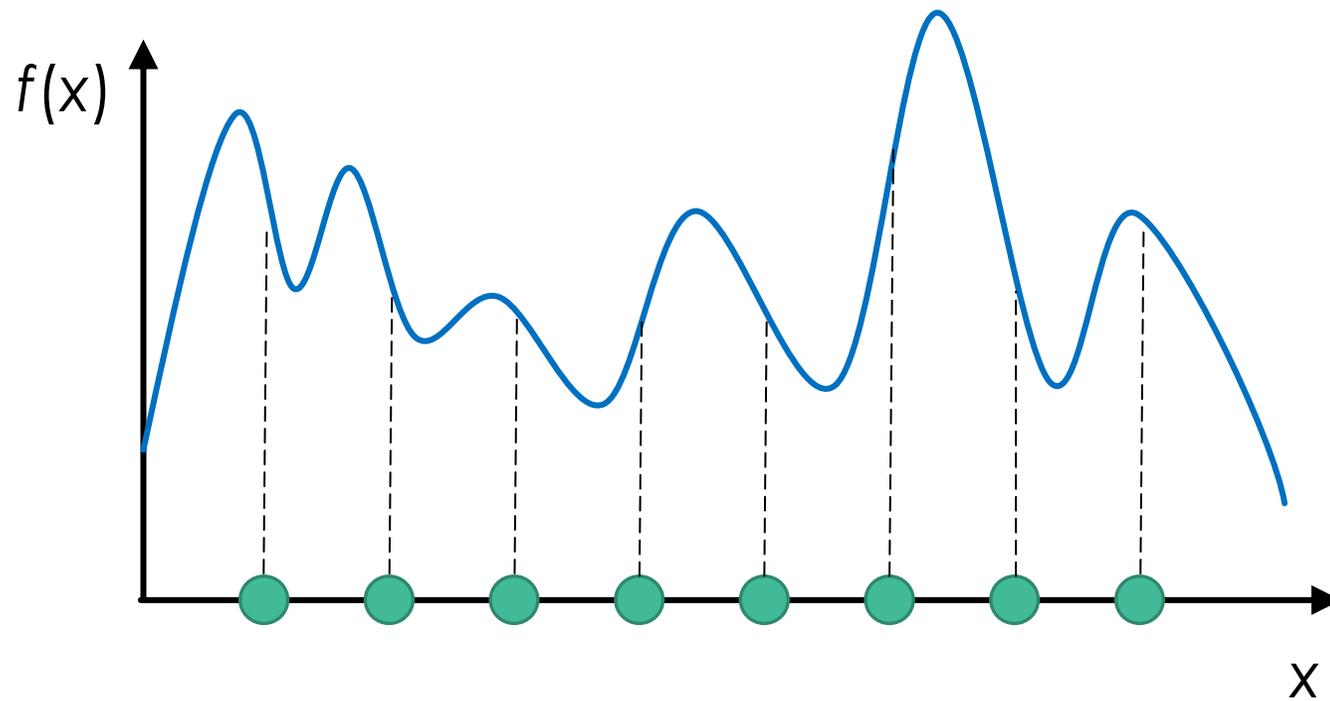


# Simulated annealing

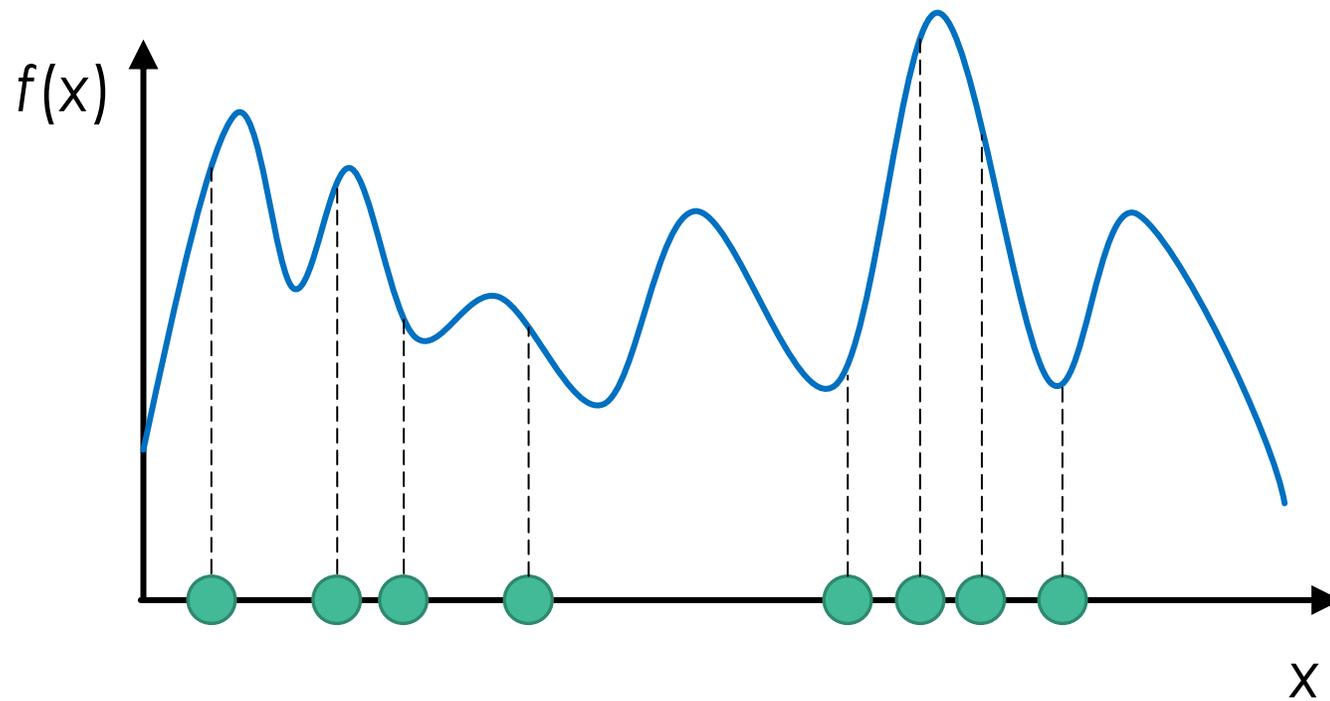
- Funciones de selección de vecinos:
  - Rápida: La longitud del salto es igual a la temperatura. La dirección es aleatoria.
  - Boltzmann: La longitud del salto es igual a la raíz cuadrada de la temperatura. La dirección es aleatoria.



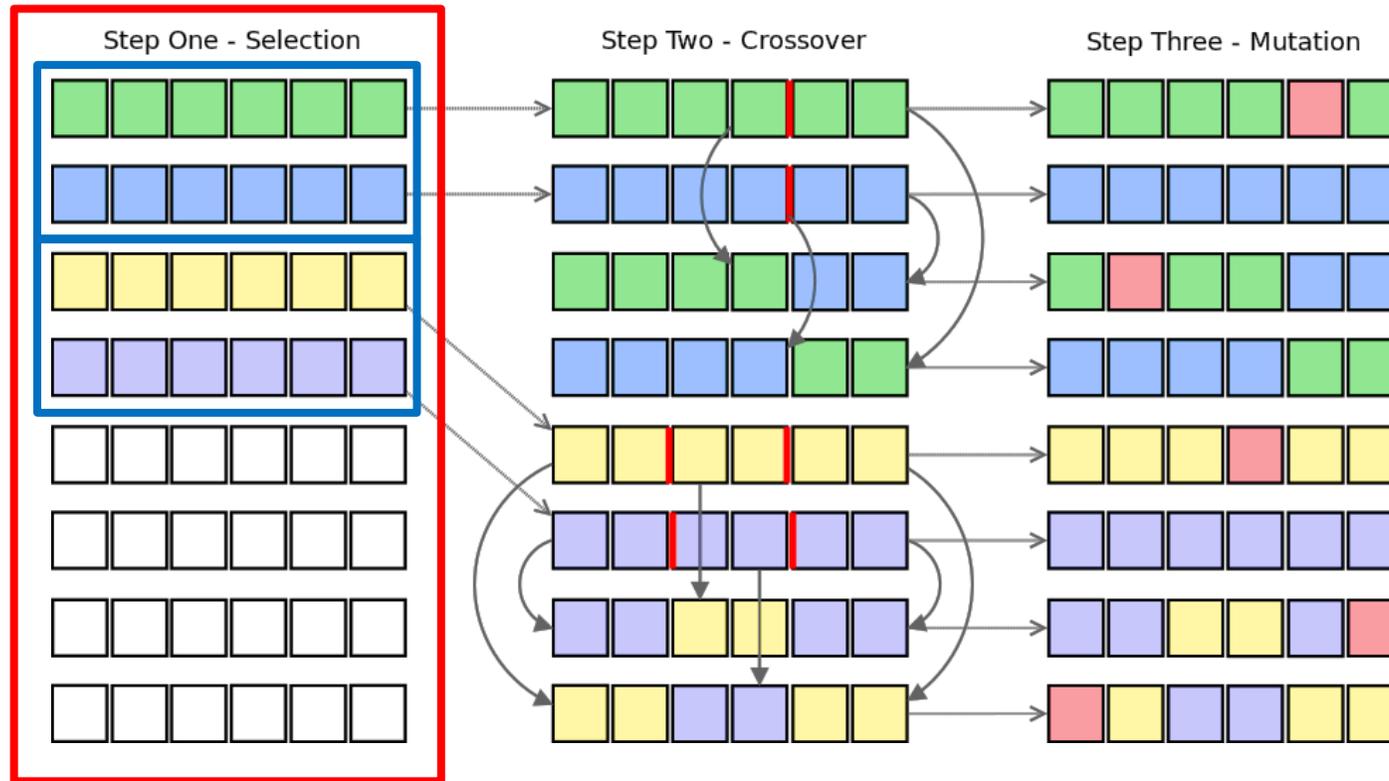
# Algoritmo genético



# Algoritmo genético



# Algoritmo genético



# Regresión

# Línea de tendencia

$T$ (K)	$\sigma_{\text{Ge}}$ ( $10^{-4}$ S/cm)
400	0.05
500	0.10
600	0.20
700	0.40
800	1.00
900	2.00
1000	4.00



Conductividad Ge - Regresión.xlsx

# Regresión lineal

$$\text{Min}_{a,b} \sum_{i=1}^n (y_i - (a x_i + b))^2$$

- $n$ : cantidad de puntos  $(x_i, y_i)$  a ajustar.
- $a$  y  $b$ : parámetros a ajustar:  
 $y(x) = a x + b$

Regresión.xlsx

Archivo Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Revisar Vista Programador Ayuda

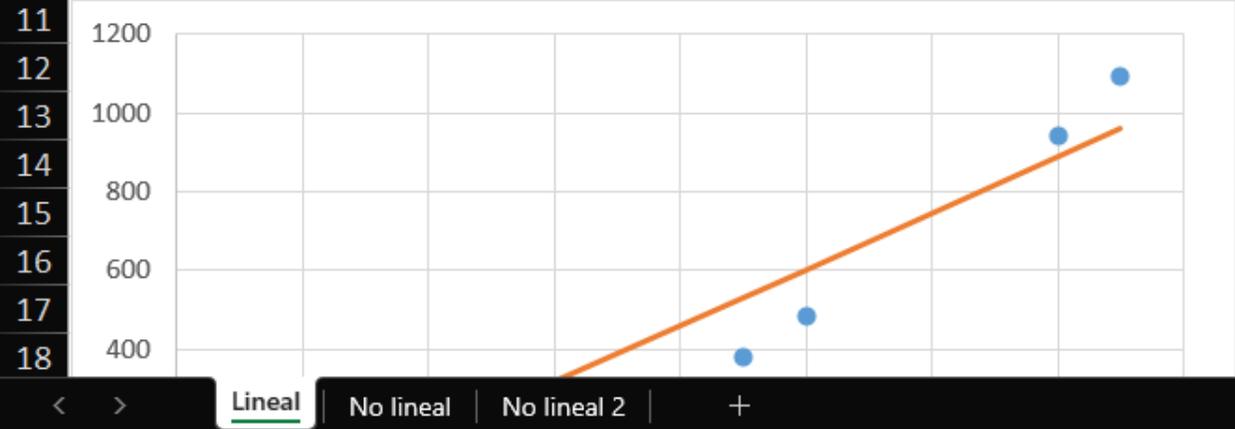
Comentarios Compartir

Portapapeles Fuente Alineación Número Estilos Celdas Edición Complementos Analizar datos

F4 fx

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	<b>x</b>	<b>y</b>	<b>y(x)</b>	<b>Error<sup>2</sup></b>									
2	0	8	-109	13623	<b>a =</b>	71.19							
3	1	14	-38	2655	<b>b =</b>	-108.72							
4	4	80	176	9224									
5	9	385	532	21604									
6	10	485	603	13965									
7	14	945	888	3257									
8	15	1095	959	18464									
9			<b>Suma =</b>	82792									

$$\text{Min}_{a,b} \sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b))^2$$





# Regresión no lineal

- Correlación de Vogel para ajustar la viscosidad del agua de mar.

$$\mu_w = e^{\frac{a}{T+b}+c}$$

$$\text{Min}_{a,b,c} \sum_{i=1}^n \left( y_i - e^{\frac{a}{T_i+b}+c} \right)^2$$

Regresión.xlsx

Portapapeles Fuente Alineación Número Estilos Celdas Edición Complementos Analizar datos

E5  $f_x$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	<b>T(C°)</b>	<b>mw (cP)</b>	<b>mw(T)</b>	<b>Error<sup>2</sup></b>								
2	10	1.30	1.33	0.0006707	<b>a =</b>	203.69						
3	20	1.00	0.98	0.00052864	<b>b =</b>	66.83						
4	30	0.80	0.77	0.00110276	<b>c =</b>	-2.37						
5	40	0.65	0.63	0.00041075								
6	50	0.54	0.53	2.5969E-05								
7	60	0.46	0.47	3.8448E-05								
8	70	0.40	0.41	0.00021225								
9	80	0.35	0.37	0.00060501								
10	90	0.31	0.34	0.00108135								
11			<b>Suma =</b>	0.00								

$$\text{Min}_{a,b,c} \sum_{i=1}^n \left( y_i - e^{\frac{a}{T_i+b}+c} \right)^2$$



$$\mu_w = e^{\frac{a}{T+b}+c}$$

Archivos Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Revisar Vista Programador Ayuda

Comentarios Compartir

Portapapeles Fuente Alineación Número Estilos Celdas Edición Complementos Analizar datos

E5

	A	B	C	D	E	F	G
1	T(C°)	mw (cP)	mw(T)	Error <sup>2</sup>			
2	10	1.3	=EXP(F\$2/(A2+F\$3)+F\$4)	=(B2-C2)^2		a = 203.688477115495	
3	20	1	=EXP(F\$2/(A3+F\$3)+F\$4)	=(B3-C3)^2		b = 66.8269377674381	
4	30	0.8	=EXP(F\$2/(A4+F\$3)+F\$4)	=(B4-C4)^2		c = -2.36917396425011	
5	40	0.65	=EXP(F\$2/(A5+F\$3)+F\$4)	=(B5-C5)^2			
6	50	0.54	=EXP(F\$2/(A6+F\$3)+F\$4)	=(B6-C6)^2			
7	60	0.46	=EXP(F\$2/(A7+F\$3)+F\$4)	=(B7-C7)^2			
8	70	0.4	=EXP(F\$2/(A8+F\$3)+F\$4)	=(B8-C8)^2			
9	80	0.35	=EXP(F\$2/(A9+F\$3)+F\$4)	=(B9-C9)^2			
10	90	0.31	=EXP(F\$2/(A10+F\$3)+F\$4)	=(B10-C10)^2			
11			Suma =	=SUMA(D2:D10)			

$$\text{Min}_{a,b,c} \sum_{i=1}^n \left( y_i - e^{\frac{a}{T_i+b}+c} \right)^2$$

