

Optimización Introducción Parte III

Enrique E. Tarifa, Facultad de Ingeniería, UNJu

Extracción por solvente

Extracción por solvente

Un equipo extractor por solvente opera por lotes. La preparación del equipo para cada ciclo de operación consume 15 min. La cantidad M (kg) de producto extraído en un tiempo de operación t (h) está dada por la siguiente correlación:

$$M = k(1 - e^{-t/\tau})$$

donde $k = 15$ kg, $\tau = 10$ h.

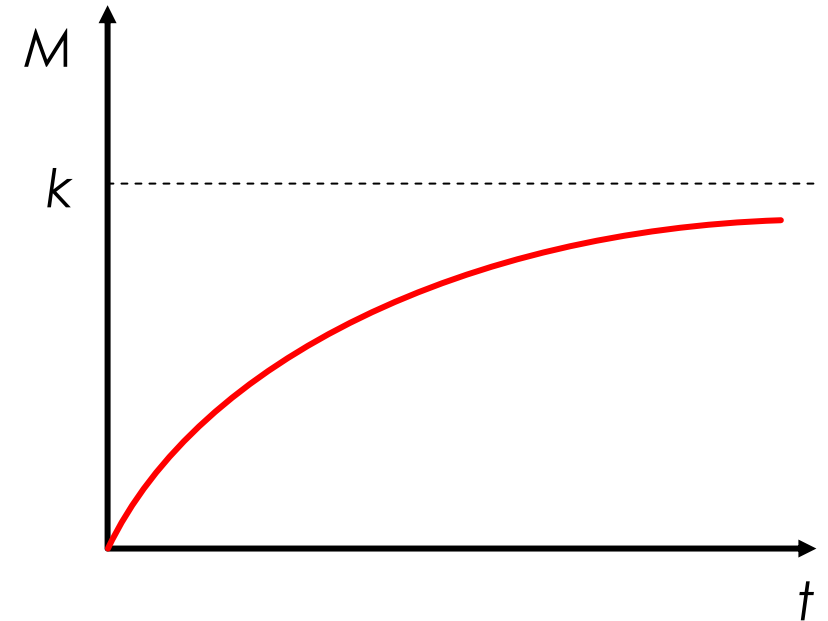
Se deben extraer 150 kg en el menor tiempo posible.

Extracción por solvente

- t_p : tiempo de preparación (h/ciclo)
- t : duración de un ciclo (h/ciclo)
- M : masa extraída en un ciclo (kg/ciclo)
- n : cantidad de ciclos (ciclo)
- t_o : tiempo de operación (h)
- M_o : masa extraída en la operación (kg)

Extracción por solvente

- Un $n = 1$ no es suficiente porque $M_0 > k$.
- Un valor alto de n implica sumar $n t_p$ tiempos muertos.
- Debe haber un valor óptimo de n intermedio.



Extracción por solvente

$$\text{Min } t_o$$

t_o, t, n, M

s. a:

$$t_o = n(tp + t)$$

$$M_o = nM$$

$$M = k(1 - e^{-t/\tau})$$

$$n \in \mathbb{N}, M \geq 0, t_o \geq 0, t \geq 0$$

- $tp = 0.25$ h
- $k = 15$ kg
- $\tau = 10$ h
- $M_o = 150$ kg

Modelo en LINGO

```
Lingo Model - Extracción por solvente
1  !Extracción por solvente;
2  Data:
3      k = 15;    !kg;
4      tau = 10; !h;
5      tp = 0.25; !h;
6      Mo = 150; !kg;
7  EndData
8
9  [FO]  Min = to;
10
11 [Rto] to = n*(tp+t);
12 [RMo] Mo = n*M;
13 [RM]  M = k*(1-@exp(-t/tau));
14 [Rn]  @gin(n);
```

Resultados en LINGO

Variable	Value	Reduced Cost
K	15.00000	0.000000
TAU	10.00000	0.000000
TP	0.2500000	0.000000
MO	150.0000	0.000000
TO	124.0585	0.000000
N	52.00000	0.4788611E-02
T	2.135741	0.000000
M	2.884615	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
FO	124.0585	-1.000000
RTO	0.000000	-1.000000
RMO	0.000000	0.8253968
RM	0.000000	42.92063

Reconciliación de lecturas

Reconciliación de lecturas

- Los balances no se cumplen por errores en las mediciones.
- Reconciliación de lecturas o de datos: Estima los valores reales de las variables a partir de sus mediciones y del modelo del proceso.
- Asegura el cumplimiento de los balances.

Reconciliación de lecturas

$$\text{Min}_{x_i, y_j} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{l_i} \left(\frac{s_{i,k} - x_i}{\sigma_{i,k}} \right)^2$$

s. a:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) = 0$$

$$x_i \geq 0 \quad \forall i$$

$$y_j \geq 0 \quad \forall j$$

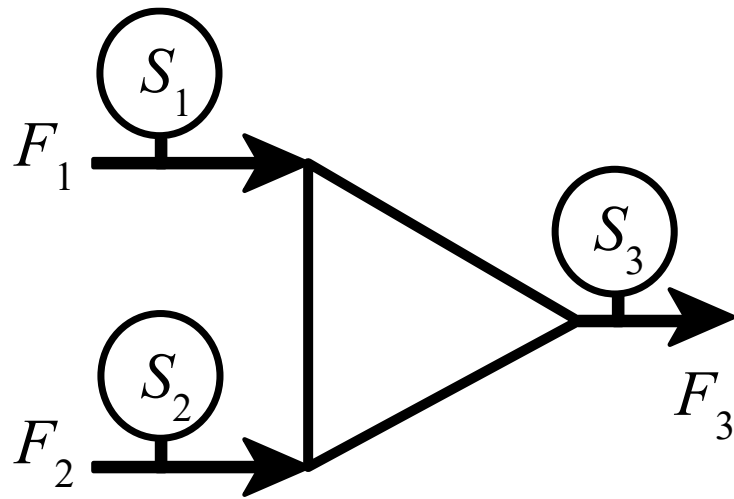
- Estima los valores de n variables medidas x y los valores de m variables no medidas y a partir de n_1 mediciones s con desviación estándar σ .
- $s_{i,k}$ es la medición k de la variable i , y $\sigma_{i,k}$ es su desviación estándar.

Reconciliación de lecturas

- $F(.) = 0$: Modelo del sistema. Vector con tamaño m_1 .
- Cantidad de mediciones: $n_1 = \sum_{i=1}^n l_i$
- Condición necesaria:
 - Redundancia de sensores: $grs = n_1 - n$
 - Redundancia topológica: $grt = m_1 - m$
 - Se debe cumplir $grs + grt > 0$

Mezclador 1

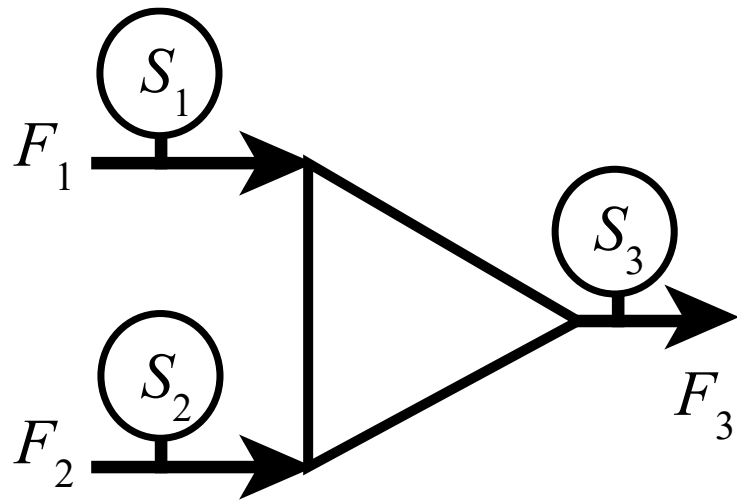
Mezclador 1



S_1 (l/s)	S_2 (l/s)	S_3 (l/s)
10	15	27

No se verifica el balance de materia.

Mezclador 1



$$\text{Min}_{F_1, F_2, F_3} \sum_{i=1}^3 (S_i - F_i)^2$$

s. a:

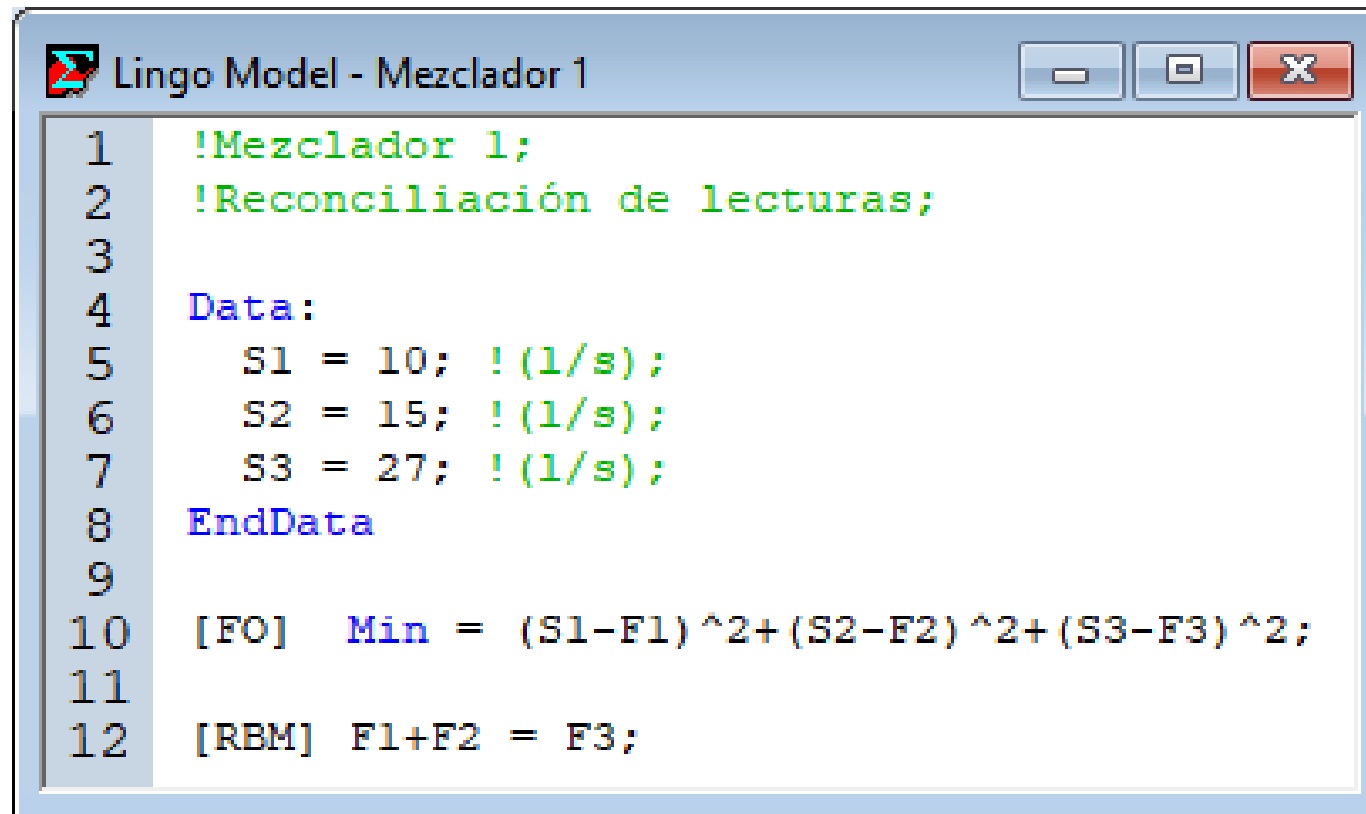
$$F_1 + F_2 = F_3$$

$$F_j \geq 0 \quad j = 1, 2, 3$$

- $grs = 3 - 3 = 0$
- $grt = 1 - 0 = 1$
- $grs + grt = 1 > 0$

Mezclador 1.lg4

Modelo en LINGO



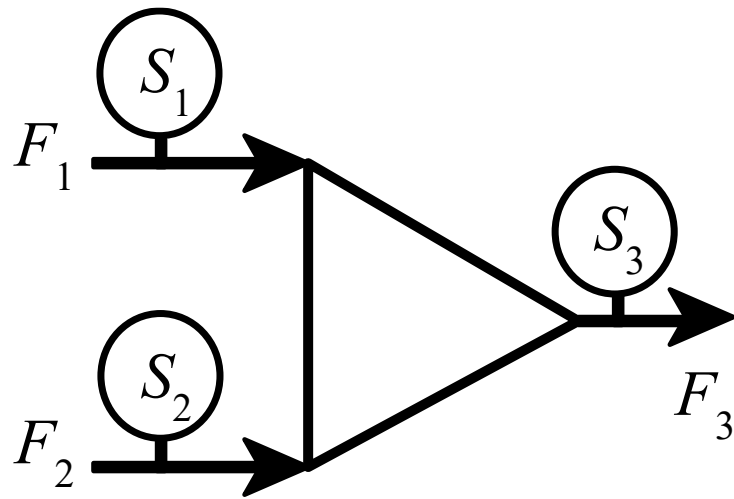
```
1  !Mezclador 1;  
2  !Reconciliación de lecturas;  
3  
4  Data:  
5      S1 = 10; !(1/s);  
6      S2 = 15; !(1/s);  
7      S3 = 27; !(1/s);  
8  EndData  
9  
10 [FO]  Min = (S1-F1)^2+(S2-F2)^2+(S3-F3)^2;  
11  
12 [RBM] F1+F2 = F3;
```


Resultados en LINGO

Variable	Value	Reduced Cost
S1	10.00000	0.000000
S2	15.00000	0.000000
S3	27.00000	0.000000
F1	10.66667	0.7982303E-07
F2	15.66667	0.1457392E-07
F3	26.33333	0.6592139E-08

Row	Slack or Surplus	Dual Price
FO	1.333333	-1.000000
RBM	0.000000	-1.333333

Mezclador 1



S_1 (l/s)	S_2 (l/s)	S_3 (l/s)
10	15	27

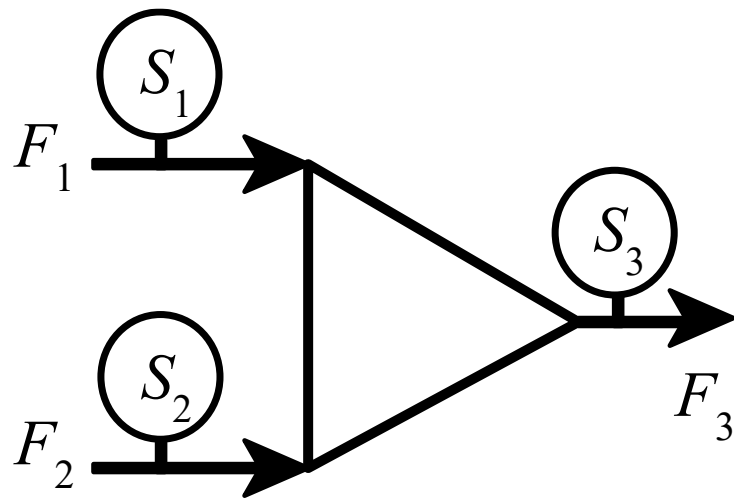


F_1 (l/s)	F_2 (l/s)	F_3 (l/s)
10.67	15.67	26.34



Mezclador 2

Mezclador 2



	Corrientes		
	1	2	3
F (l/s)	10.0	20.0	27.0
C (mol/l)	30	10	15

- E_F : 0.1 l/s
- E_C : 0.5 mol/l

Agua y metanol.
 C es la concentración de metanol.

Mezclador 2

$$\text{Min}_{F_i, C_i} \frac{1}{0.1^2} \left((10 - F_1)^2 + (20 - F_2)^2 + (27 - F_3)^2 \right) + \frac{1}{0.5^2} \left((30 - C_1)^2 + (10 - C_2)^2 + (15 - C_3)^2 \right)$$

s. a:

$$F_1 + F_2 - F_3 = 0$$

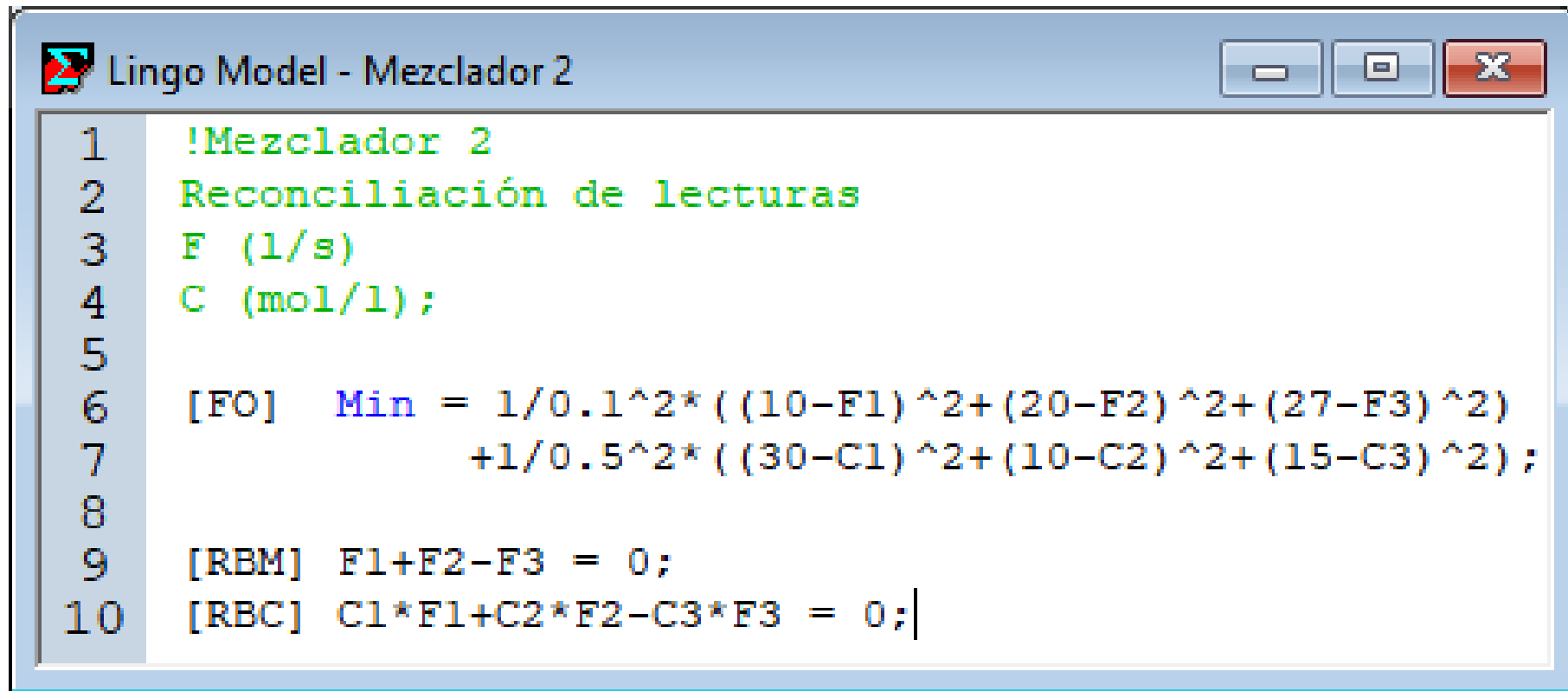
$$C_1 F_1 + C_2 F_2 - C_3 F_3 = 0$$

$$F_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3$$

$$C_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3$$

- $grs = 6 - 6 = 0$
- $grt = 2 - 0 = 2$
- $grs + grt = 2 > 0$ Mezclador 2.lg4

Modelo en LINGO



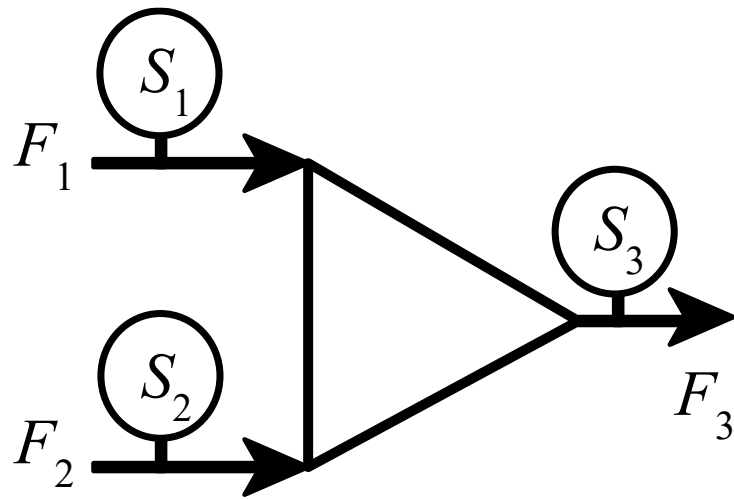
```
Lingo Model - Mezclador 2
1  !Mezclador 2
2  Reconciliación de lecturas
3  F (1/s)
4  C (mol/l);
5
6  [FO]  Min = 1/0.1^2*((10-F1)^2+(20-F2)^2+(27-F3)^2
7         +1/0.5^2*((30-C1)^2+(10-C2)^2+(15-C3)^2);
8
9  [RBM] F1+F2-F3 = 0;
10 [RBC] C1*F1+C2*F2-C3*F3 = 0;
```

Resultados en LINGO

Variable	Value	Reduced Cost
F1	8.985258	-0.2514405E-06
F2	19.01160	0.000000
F3	27.99686	0.6813677E-06
C1	29.70889	0.000000
C2	9.384048	-0.2909656E-07
C3	15.90706	0.5286781E-07

Row	Slack or Surplus	Dual Price
FO	305.1838	-1.000000
RBM	0.000000	195.2482
RBC	0.000000	0.2591901

Mezclador 2



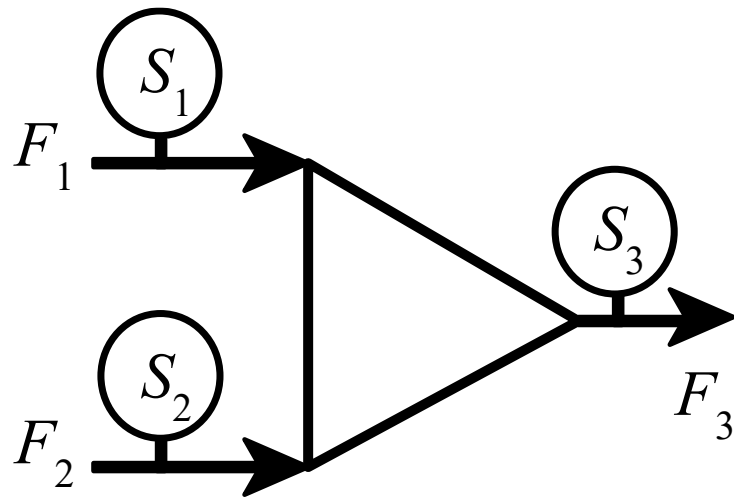
	Corrientes		
	1	2	3
F (l/s)	10.0	20.0	27.0
C (mol/l)	30	10	15



	Corrientes		
	1	2	3
F (l/s)	8.99	19.01	28.00
C (mol/l)	29.71	9.38	15.91



Mezclador 2b



	Corrientes		
	1	2	3
F (l/s)	10.0	20.0	27.0
C (mol/l)	30	10	15

E_F : 0.1 l/s
 E_C : 0.5 mol/l

Mezclador 2b

$$\text{Min}_{F_i, C_i} \frac{1}{0.1^2} \left((10 - F_1)^2 + (20 - F_2)^2 + (27 - F_3)^2 \right) + \frac{1}{0.5^2} \left((30 - C_1)^2 + (10 - C_2)^2 + (15 - C_3)^2 \right)$$

s. a:

$$F_1 + F_2 - F_3 = 0$$

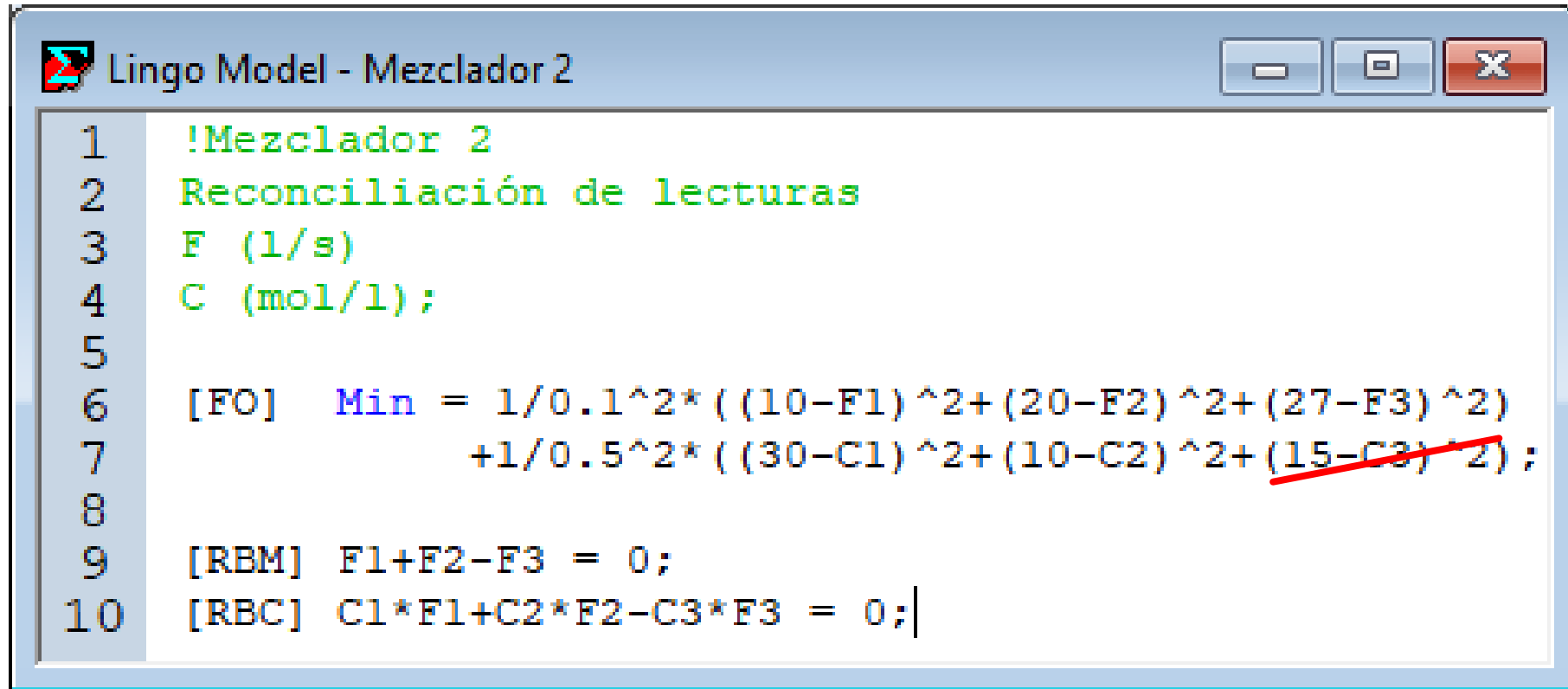
$$C_1 F_1 + C_2 F_2 - C_3 F_3 = 0$$

$$F_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3$$

$$C_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3$$

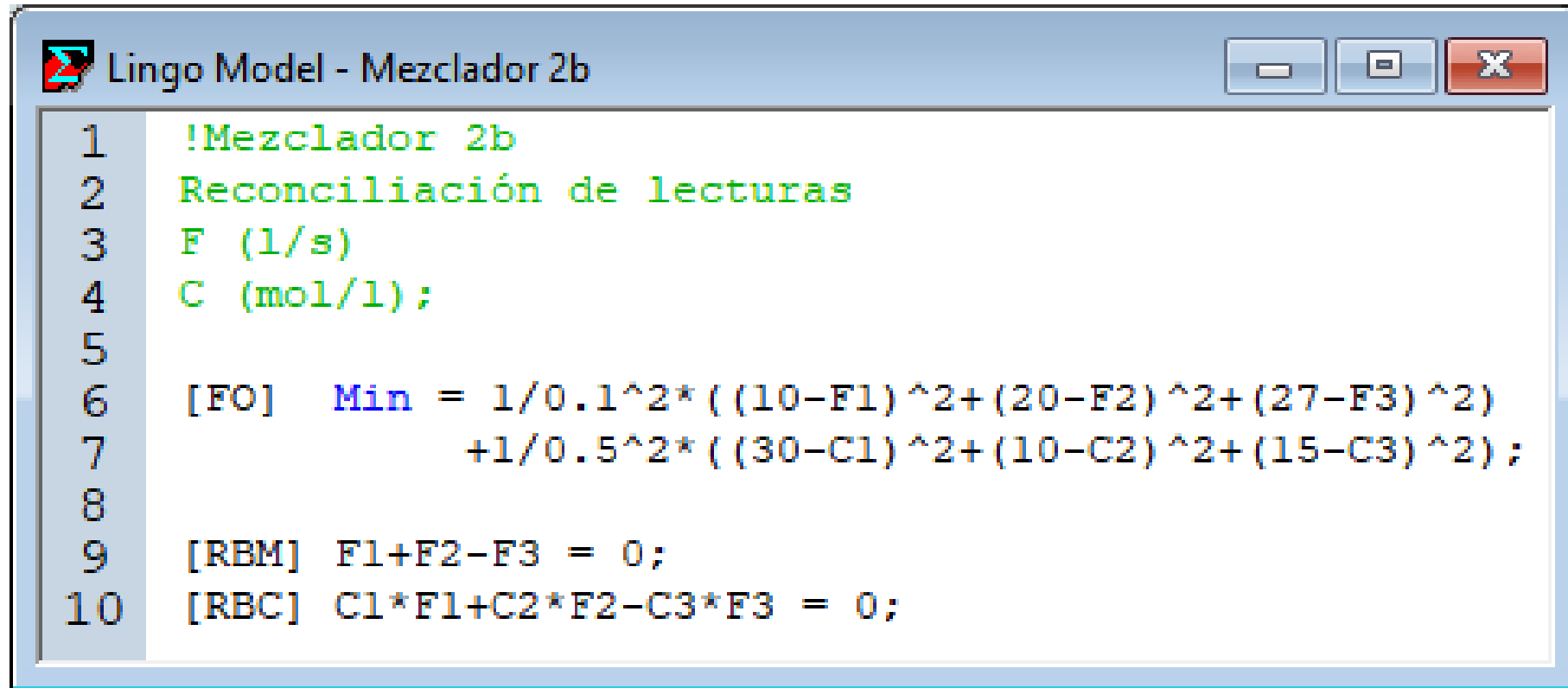
- $grs = 5 - 5 = 0$
- $grt = 2 - 1 = 1$
- $grs + grt = 1 > 0$ Mezclador 2b.lg4

Modelo en LINGO



```
Lingo Model - Mezclador 2
1  !Mezclador 2
2  Reconciliación de lecturas
3  F (1/s)
4  C (mol/l);
5
6  [FO]  Min = 1/0.1^2*((10-F1)^2+(20-F2)^2+(27-F3)^2)
7         +1/0.5^2*((30-C1)^2+(10-C2)^2+(15-C3)^2);
8
9  [RBM] F1+F2-F3 = 0;
10 [RBC] C1*F1+C2*F2-C3*F3 = 0;
```

Modelo en LINGO



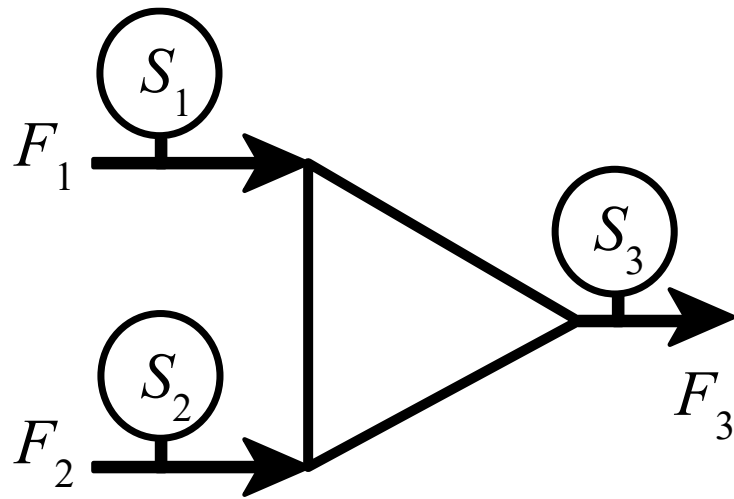
```
1  !Mezclador 2b
2  Reconciliación de lecturas
3  F (l/s)
4  C (mol/l);
5
6  [FO]  Min = 1/0.1^2* ((10-F1) ^2+(20-F2) ^2+(27-F3) ^2)
7         +1/0.5^2* ((30-C1) ^2+(10-C2) ^2+(15-C3) ^2);
8
9  [RBM] F1+F2-F3 = 0;
10 [RBC] C1*F1+C2*F2-C3*F3 = 0;
```

Resultados en LINGO

Variable	Value	Reduced Cost
F1	8.985258	-0.2514405E-06
F2	19.01160	0.000000
F3	27.99686	0.6813677E-06
C1	29.70889	0.000000
C2	9.384048	-0.2909656E-07
C3	15.90706	0.5286781E-07

Row	Slack or Surplus	Dual Price
FO	305.1838	-1.000000
RBM	0.000000	195.2482
RBC	0.000000	0.2591901

Mezclador 2b



	Corrientes		
	1	2	3
F (l/s)	10.0	20.0	27.0
C (mol/l)	30	10	-

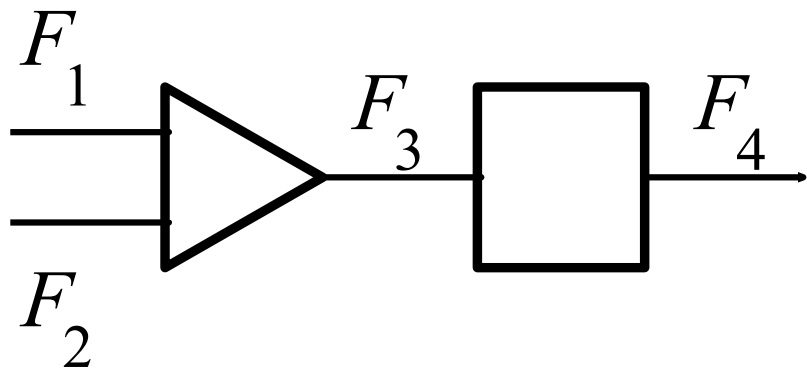


	Corrientes		
	1	2	3
F (l/s)	8.99	19.01	28.00
C (mol/l)	29.71	9.38	15.91



Calculabilidad

Sistema calculable



$$F_1 + F_2 - F_3 = 0$$

$$F_3 - F_4 = 0$$



Sistema no calculable.lg4
Sistema calculable.lg4

	Corrientes			
	1	2	3	4
F (l/s)	-	-	29.5	30.3
			28.2	



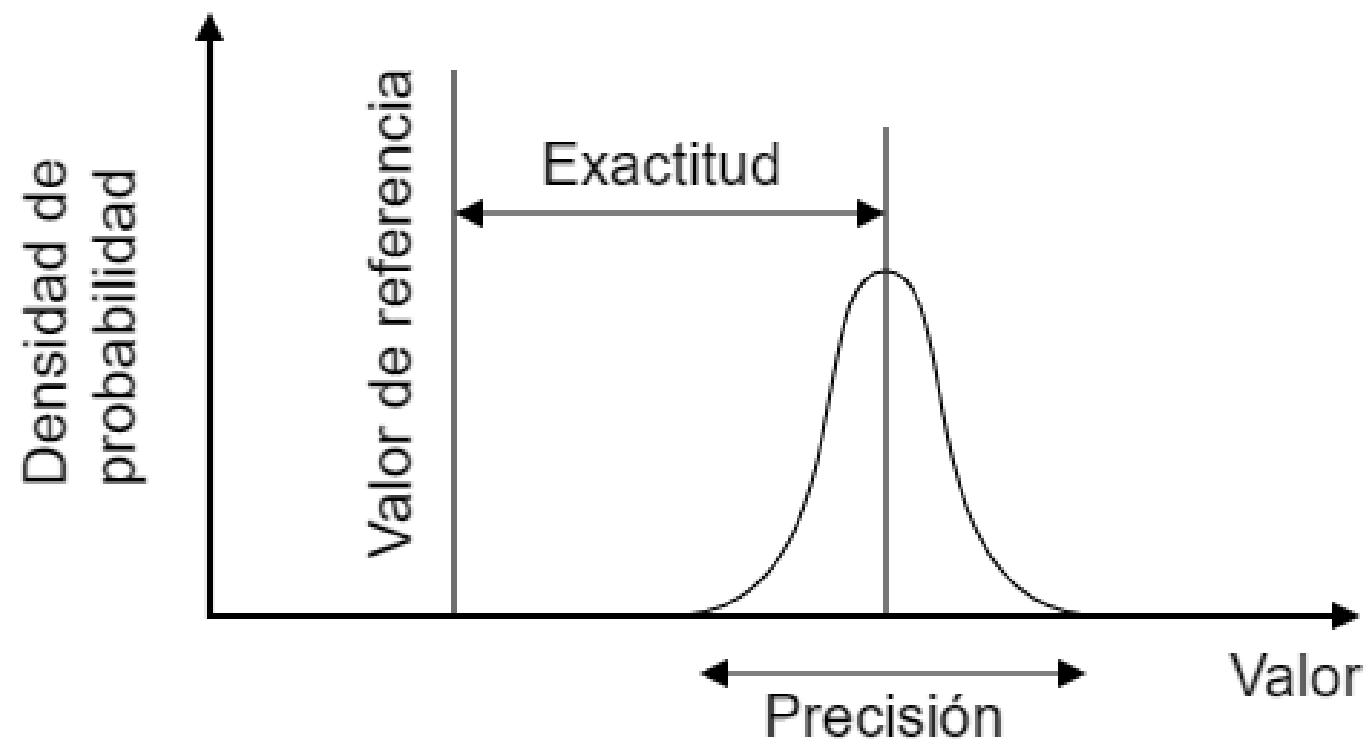
	Corrientes			
	1	2	3	4
F (l/s)	8.9	-	-	28.0
	7.6			



- $grs = 3 - 2 = 1$
- $grt = 2 - 2 = 0$
- $grs + grt = 1 > 0$

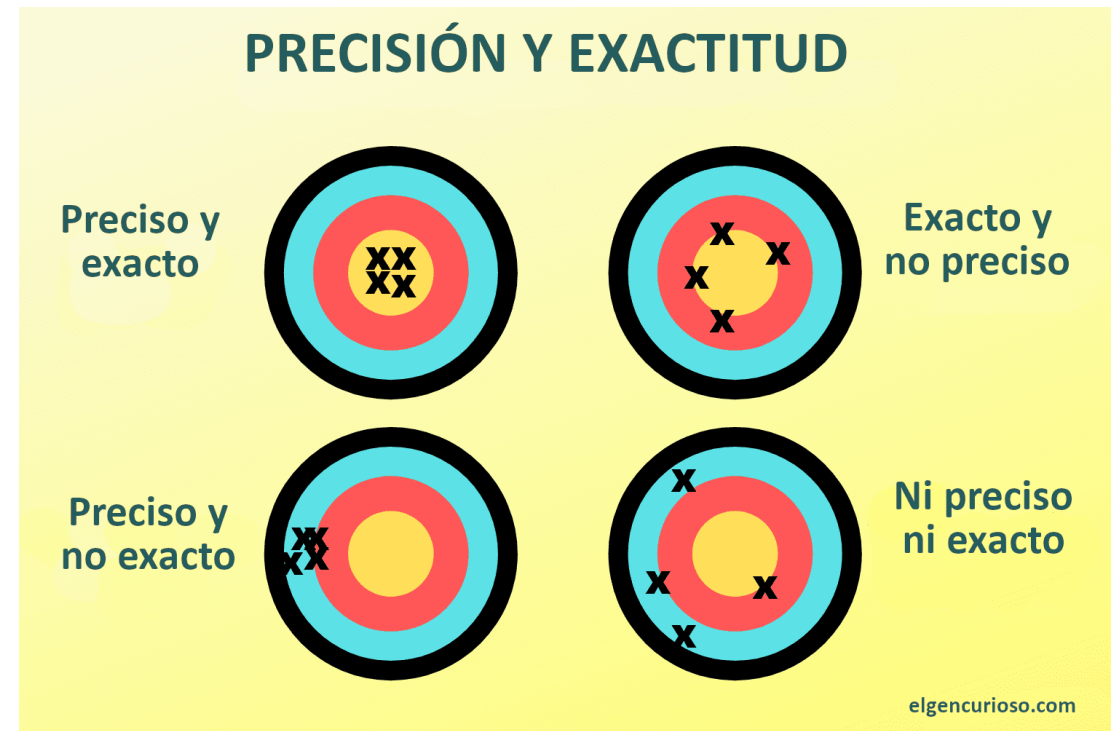
Instrumentación

Instrumentación



Instrumentación

- Es importante dónde se colocan los instrumentos.
- Los instrumentos más precisos, tienen mayor peso en la función objetivo.
- La calibración mejora la exactitud.



Modelo no lineal

Clasificación de modelos

- Programación Lineal (LP, *Linear Programming*)
- Programación No Lineal (NLP, *Nonlinear Programming*)
- Programación Lineal Entera (ILP, *Integer Linear Programming*)
- Programación No Lineal Entera (INLP, *Integer Nonlinear Programming*)
- Programación Lineal Entera Mixta (MILP, *Mixed Integer Linear Programming*)
- Programación No Lineal Entera Mixta (MINLP, *Mixed Integer Nonlinear Programming*)

$$FO(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$$

Modelo no lineal

$$\text{Max}_x x^3 - 9x^2 + 26x - 24$$

s.a :

$$x \geq 1.5$$

$$x \leq 4.5$$

Modelo no lineal.xlsx

Modelo no lineal.lg4

Archivo Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Revisar Vista Programador Ayuda Comentarios Compartir

Portapapeles Fuente Alineación Número Estilos Celdas Edición Complementos Analizar datos

D4 1

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Modelo no lineal												
2													
3	FO		Variables										
4	-6		x =	1									
5													
6	MI	Tipo	MD										
7	1	>=	1.5										
8	1	<=	4.5										
9													
10													
11													
12													
13													
14													
15													
16													
17													
18													

Biblioteca de funciones: Insertar función, Autosuma, Usado recientemente, Financieras, Lógicas, Texto, Fecha y hora, Búsqueda y referencia, Matemáticas y trigonométricas, Más funciones.

Nombres definidos: Administrador de nombres, Asignar nombre, Utilizar en la fórmula, Crear desde la selección.

Auditoría de fórmulas: Rastrear precedentes, Rastrear dependientes, Quitar flechas.

Cálculo: Ventana Inspección, Opciones para el cálculo.

D4 : 1

	A	B	C	D	E	F
1	Modelo no lineal					
2						
3	FO		Variables			
4	=D4^3-9*D4^2+26*D4-24		x =	1		
5						
6	MI	Tipo	MD			
7	=D4	>=	1.5			
8	=D4	<=	4.5			
9						
10						
11						
12						
13						
14						
15						
16						
17						
18						

Obtener y transformar datos Consultas & conexiones Tipos de datos Ordenar y filtrar

	A	B	C	D	E	F	G
1	Modelo no lineal						
2							
3	FO		Variables				
4	-6		x =	1			
5							
6	MI	Tipo	MD				
7	1	>=	1.5				
8	1	<=	4.5				
9							
10							
11							
12							
13							
14							
15							
16							
17							
18							

Parámetros de Solver

Establecer objetivo:

Para: Máx Mín Valor de:

Cambiando las celdas de variables:

Sujeto a las restricciones:

- SAS7 >= SC57
- SAS8 <= SC58

Convertir variables sin restricciones en no negativas

Método de resolución:

Método de resolución
Seleccione el motor GRG Nonlinear para problemas de Solver no lineales suavizados. Seleccione el motor LP Simplex para problemas de Solver lineales, y seleccione el motor Evolutionary para problemas de Solver no suavizados.

Ayuda Resolver Cerrar

Archivos Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas **Datos** Revisar Vista Programador Ayuda Comentarios Compartir

Obtener y transformar datos Consultas y conexiones Tipos de datos Ordenar y filtrar Herramientas de datos Previsión Análisis

fx 2.42264973583779

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Modelo no lineal												
2													
3	FO		Variables										
4	0.3849002		x =	2.4226497									
5													
6	MI	Tipo	MD										
7	2.4226497	>=	1.5										
8	2.4226497	<=	4.5										
9													
10													
11													
12													
13													
14													
15													
16													
17													
18													

Resultados de Solver

Solver encontró una solución. Se cumplen todas las restricciones y condiciones óptimas.

Conservar solución de Solver

Restaurar valores originales

Volver al cuadro de diálogo de parámetros de Solver

Informes de esquema

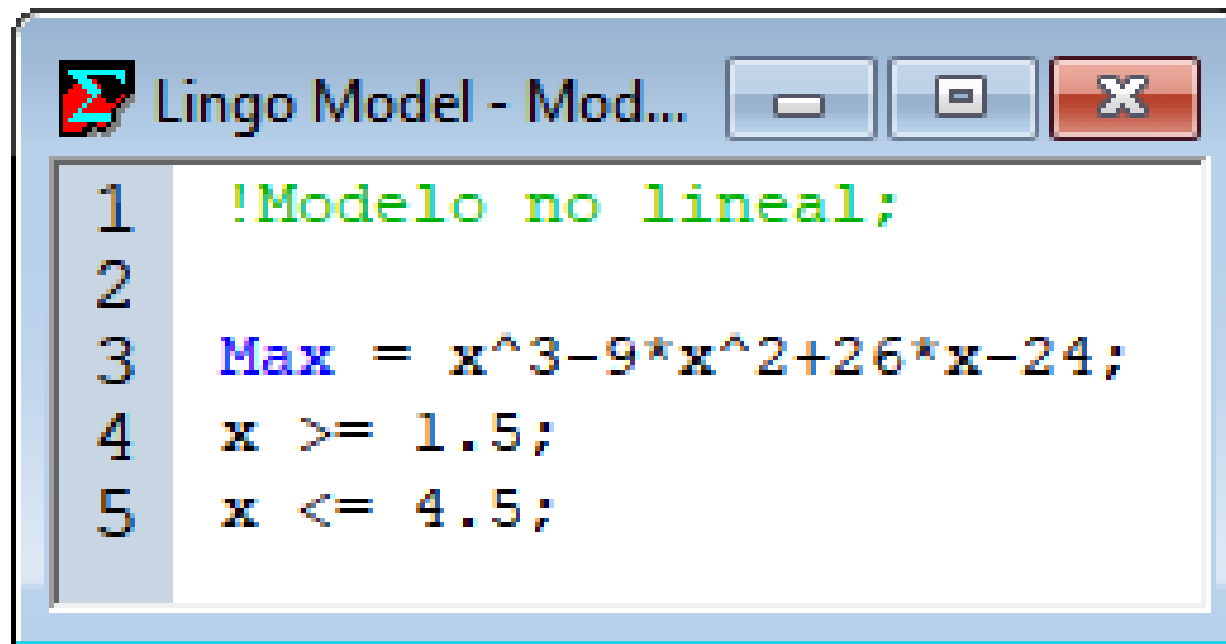
Informes: Responder, Sensibilidad, Límites

Aceptar Cancelar Guardar escenario...

Solver encontró una solución. Se cumplen todas las restricciones y condiciones óptimas.

Al usar el motor GRG, Solver ha encontrado al menos una solución óptima local. Al usar Simplex LP, significa que Solver ha encontrado una solución óptima global.

Modelo en LINGO



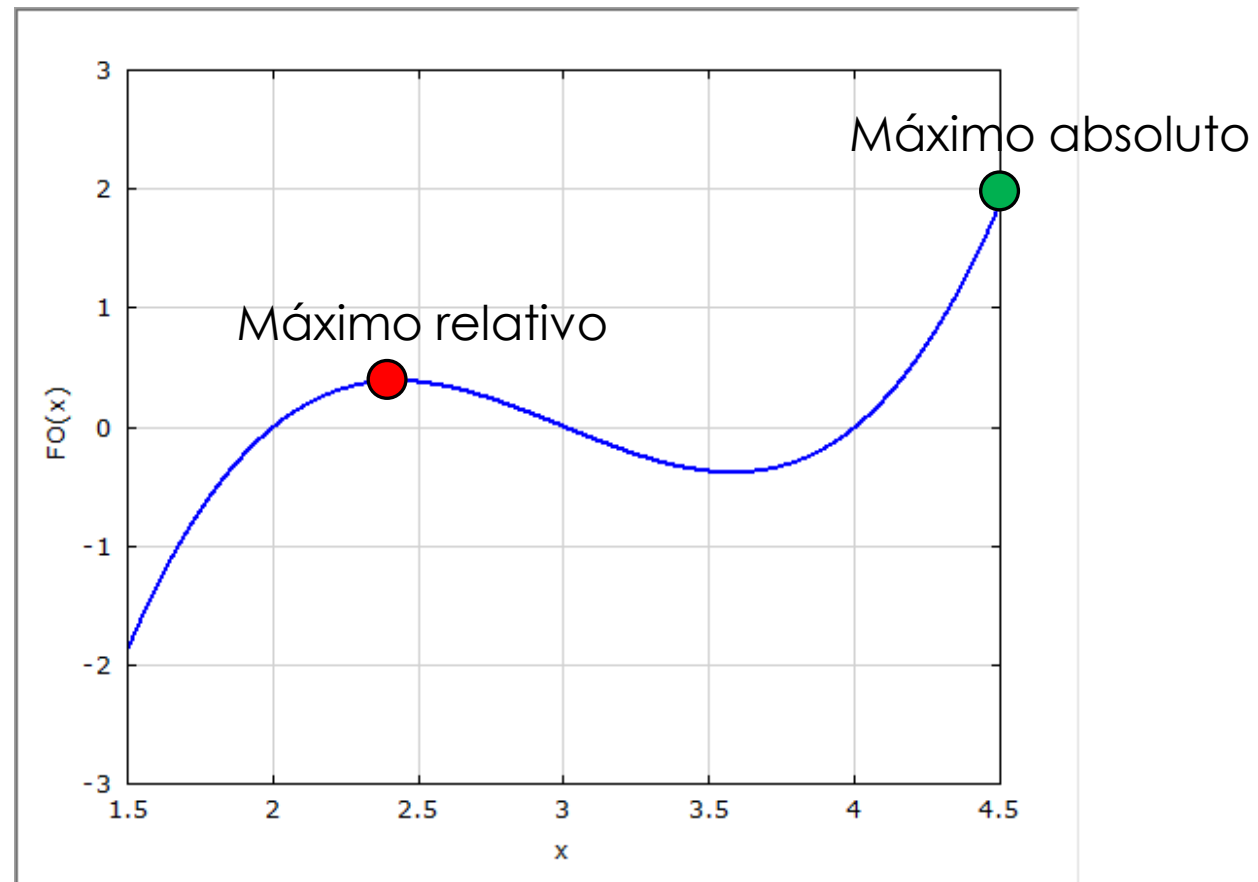
```
Lingo Model - Mod...  
1  !Modelo no lineal;  
2  
3  Max = x^3-9*x^2+26*x-24;  
4  x >= 1.5;  
5  x <= 4.5;
```

Resultados en LINGO

Variable	Value	Reduced Cost
X	4.500000	-5.750000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	1.875000	1.000000
2	3.000000	0.000000
3	0.000000	0.000000

Modelo no lineal



LINGO

Lingo Options

Nonlinear Solver	Integer Pre-Solver	Integer Solver
Interface	General Solver	Linear Solver
Global Solver	Model Generator	SP Solver

Global Solver Options:

Use Global Solver

Variable Upper Bound:

Value: Application:

Tolerances:

Optimality: Delta:

Strategies:

Branching: Box Selection: Reformulation:

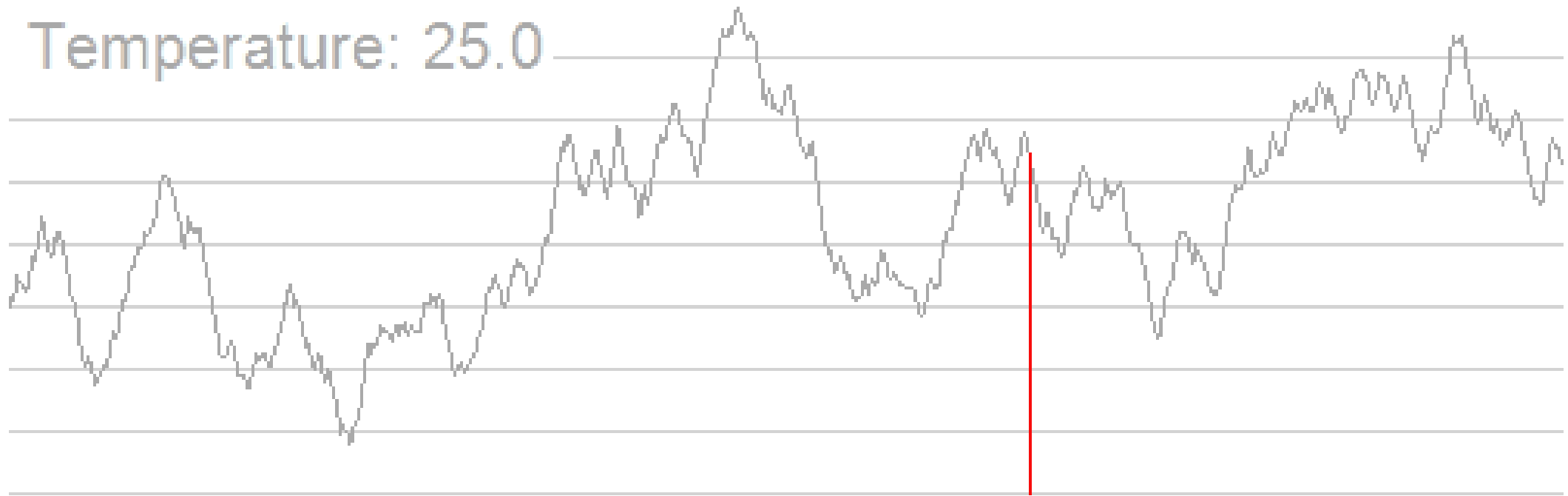
Multistart Solver:

Attempts:

Multistart Hurdle:

Help Cancel Default Save Aplicar OK

Simulated annealing, maximización

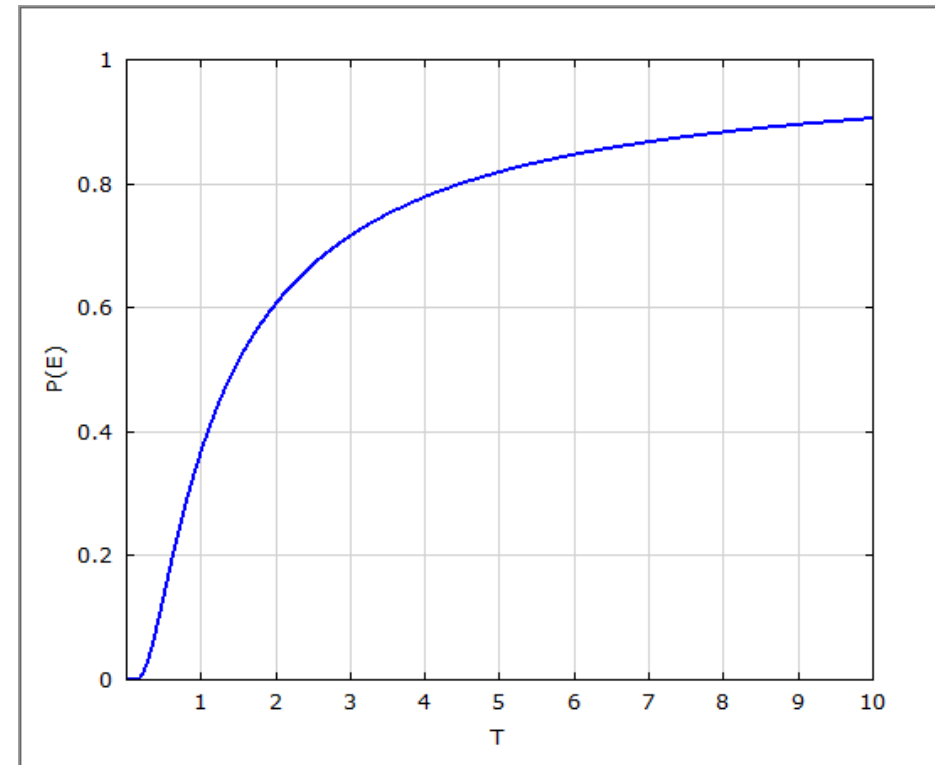


Simulated annealing

- $x \leftarrow x_0$
- Para $k = 0$ hasta k_{\max}
 - $T \leftarrow \text{temperatura}(k/k_{\max})$
 - $x_{\text{new}} \leftarrow \text{vecino}(x, T)$
 - Si $P(E(x), E(x_{\text{new}}), T) \geq \text{Aleatorio}()$ entonces $x \leftarrow x_{\text{new}}$
- Siguiente k
- Reportar x

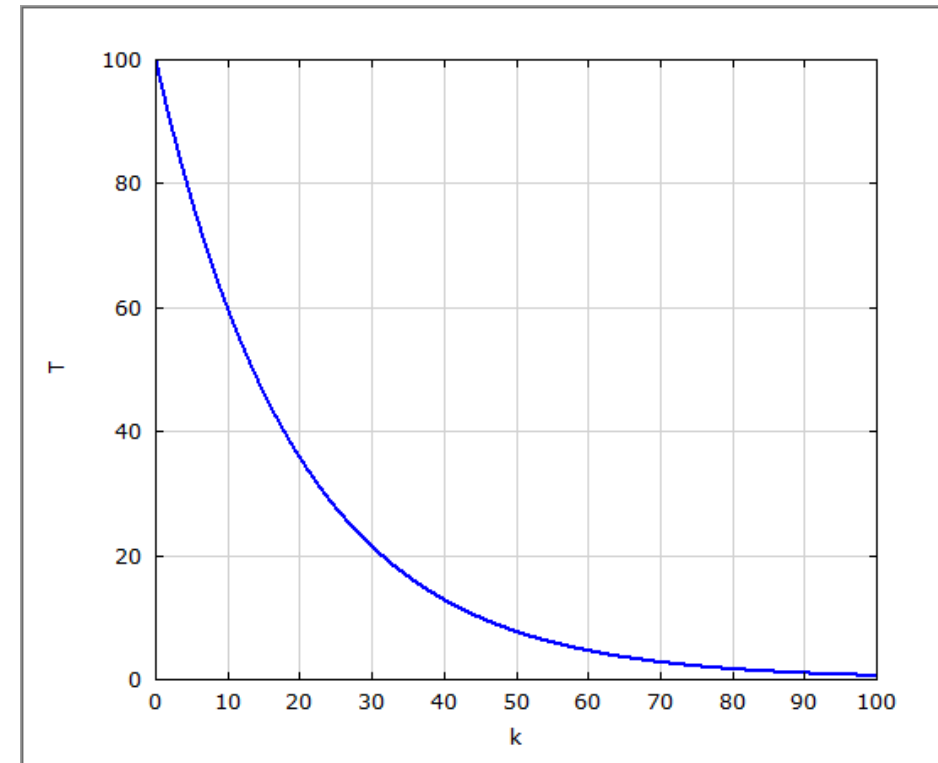
Simulated annealing

- Distribución de probabilidad de Boltzmann:
 - $P(E) \sim \exp(-E/(k T))$
 - $k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$
- Metropolis et al. (1953):
 - $p = \exp[-(E_2 - E_1)/(k T)]$
 - Si $E_2 < E_1$ entonces $p \leftarrow 1$



Simulated annealing

- T_0 : temperatura inicial, e. g. 100.
- Funciones de enfriamiento:
 - Exponencial: $T \leftarrow T_0 0.95^k$
 - Rápida: $T \leftarrow T_0/k$
 - Boltzmann: $T \leftarrow T_0/\ln(k)$

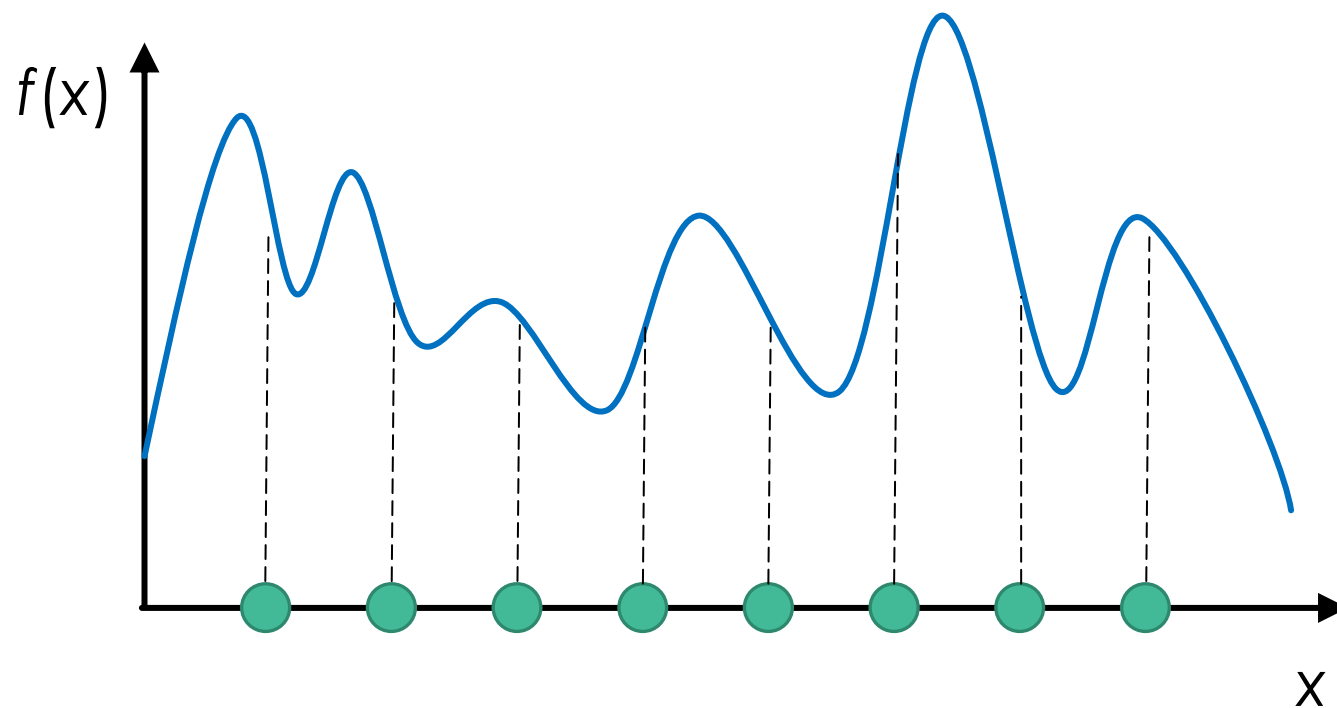


Simulated annealing

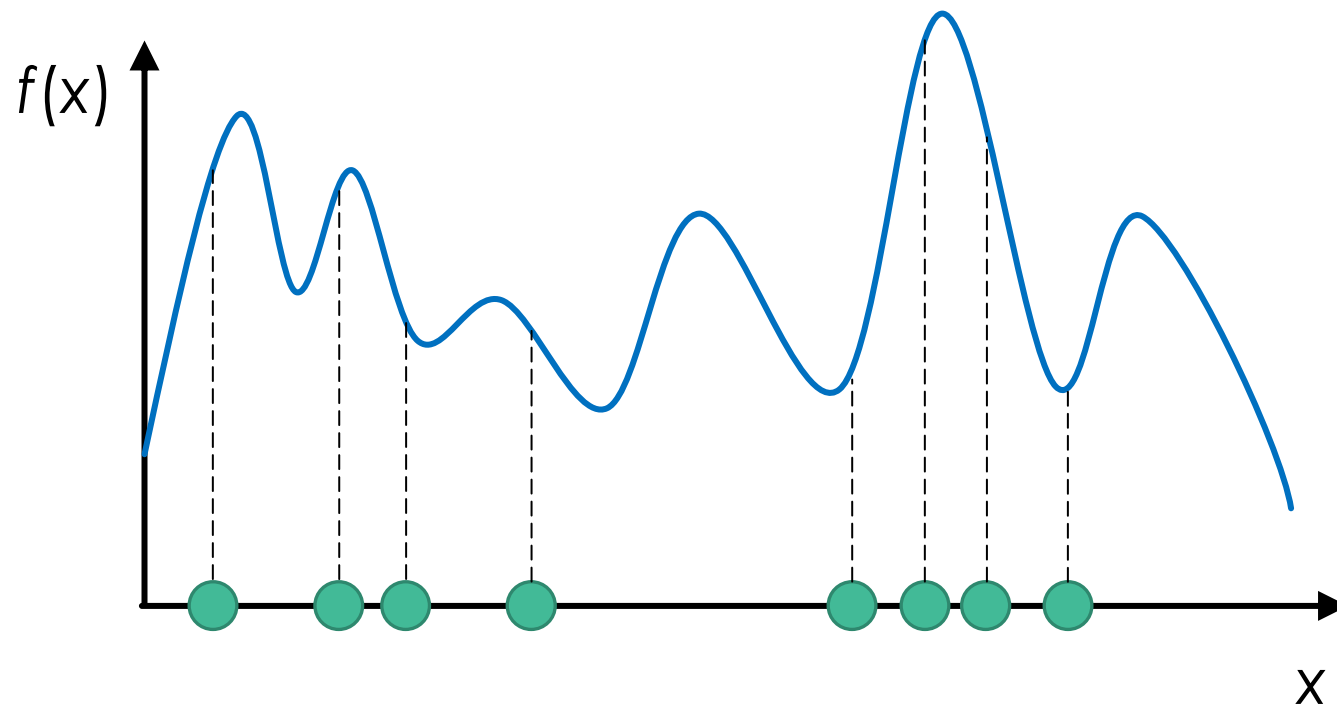
- Funciones de selección de vecinos:
 - Rápida: La longitud del salto es igual a la temperatura. La dirección es aleatoria.
 - Boltzmann: La longitud del salto es igual a la raíz cuadrada de la temperatura. La dirección es aleatoria.



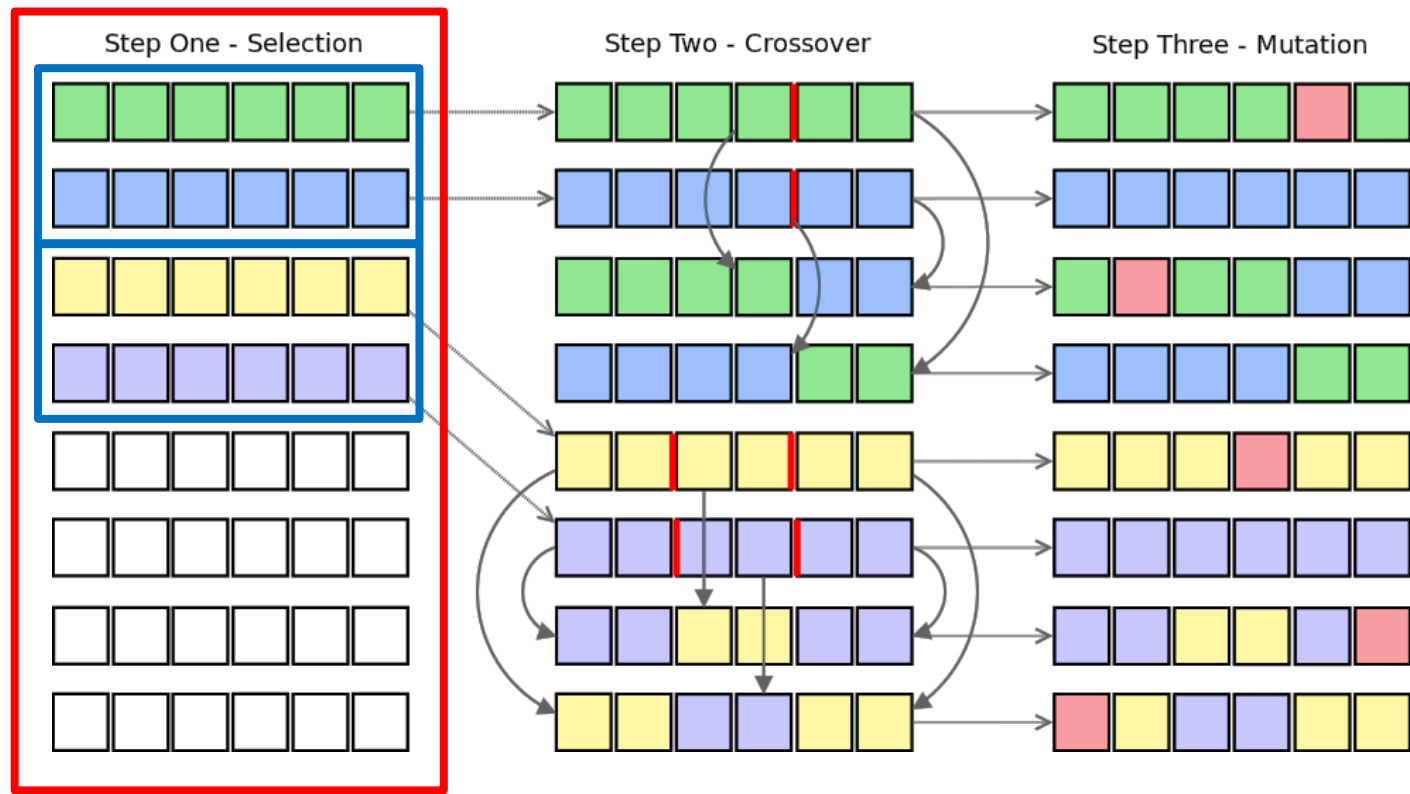
Algoritmo genético



Algoritmo genético



Algoritmo genético



Regresión

Línea de tendencia

T (K)	σ_{Ge} (10^{-4} S/cm)
400	0.05
500	0.10
600	0.20
700	0.40
800	1.00
900	2.00
1000	4.00



Conductividad Ge - Regresión.xlsx

Regresión lineal

$$\text{Min}_{a,b} \sum_{i=1}^n (y_i - (a x_i + b))^2$$

- n : cantidad de puntos (x_i, y_i) a ajustar.
- a y b : parámetros a ajustar:
 $y(x) = a x + b$

Regresión.xlsx

Archivo Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Revisar Vista Programador Ayuda

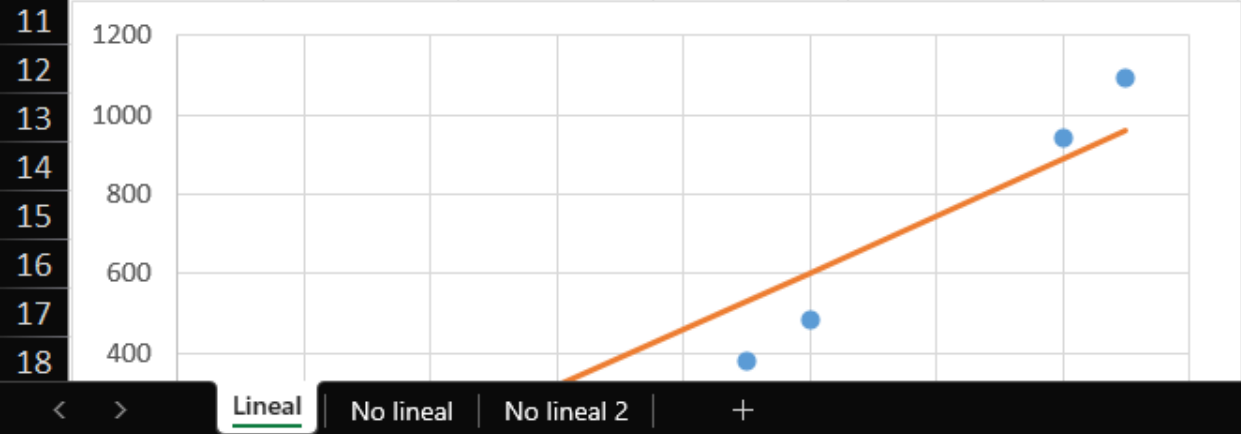
Comentarios Compartir

Portapapeles Fuente Alineación Número Estilos Celdas Edición Complementos Analizar datos

F4 fx

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	x	y	y(x)	Error²									
2	0	8	-109	13623	a =	71.19							
3	1	14	-38	2655	b =	-108.72							
4	4	80	176	9224									
5	9	385	532	21604									
6	10	485	603	13965									
7	14	945	888	3257									
8	15	1095	959	18464									
9			Suma =	82792									

$$\text{Min}_{a,b} \sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b))^2$$



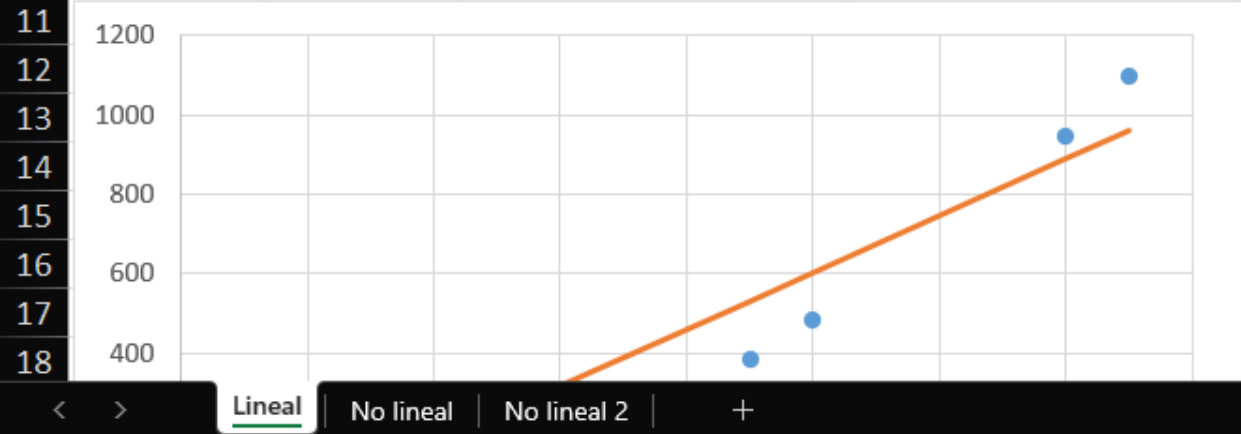
Archivo Inicio Insertar Disposición de página **Fórmulas** Datos Revisar Vista Programador Ayuda Comentarios Compartir

Insertar función Autosuma Lógicas Búsqueda y referencia Asignar nombre Rastrear precedentes Rastrear dependientes Quitar flechas Ventana Inspección Opciones para el cálculo
Usado recientemente Texto Matemáticas y trigonométricas Utilizar en la fórmula Crear desde la selección Auditoría de fórmulas
Financieras Fecha y hora Más funciones Administrador de nombres Nombres definidos Cálculo

E4 fx

	A	B	C	D	E	F	G
1	x	y	y(x)	Error ²			
2	0	8	=F\$2*A2+F\$3	=(B2-C2)^2		a = 71.1889764570955	
3	1	14	=F\$2*A3+F\$3	=(B3-C3)^2		b = -108.716535435635	
4	4	80	=F\$2*A4+F\$3	=(B4-C4)^2			
5	9	385	=F\$2*A5+F\$3	=(B5-C5)^2			
6	10	485	=F\$2*A6+F\$3	=(B6-C6)^2			
7	14	945	=F\$2*A7+F\$3	=(B7-C7)^2			
8	15	1095	=F\$2*A8+F\$3	=(B8-C8)^2			
9			Suma =	=SUMA(D2:D8)			

$$\text{Min}_{a,b} \sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b))^2$$



Regresión no lineal

- Correlación de Vogel para ajustar la viscosidad del agua de mar.

$$\mu_w = e^{\frac{a}{T+b}+c}$$

$$\text{Min}_{a,b,c} \sum_{i=1}^n \left(y_i - e^{\frac{a}{T_i+b}+c} \right)^2$$

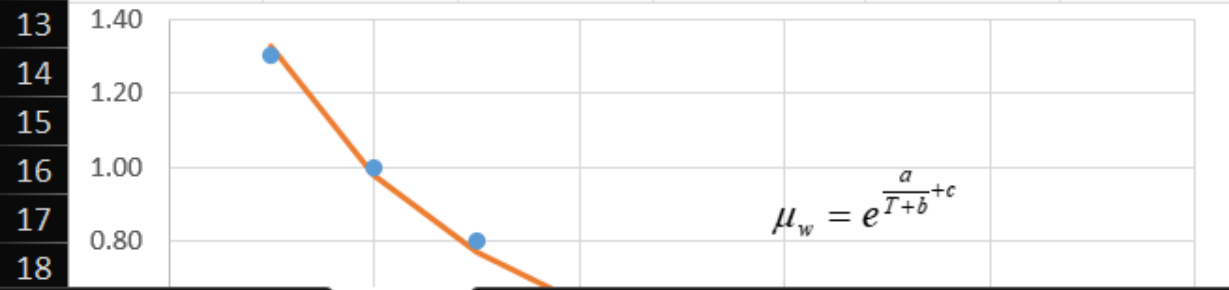
Regresión.xlsx

Portapapeles
Calibri 11
Fuente
Alineación
General
Número
Estilos
Celdas
Edición
Complementos
Analizar datos

E5

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	T(C°)	mw (cP)	mw(T)	Error²								
2	10	1.30	1.33	0.0006707	a =	203.69						
3	20	1.00	0.98	0.00052864	b =	66.83						
4	30	0.80	0.77	0.00110276	c =	-2.37						
5	40	0.65	0.63	0.00041075								
6	50	0.54	0.53	2.5969E-05								
7	60	0.46	0.47	3.8448E-05								
8	70	0.40	0.41	0.00021225								
9	80	0.35	0.37	0.00060501								
10	90	0.31	0.34	0.00108135								
11			Suma =	0.00								

$$\text{Min}_{a,b,c} \sum_{i=1}^n \left(y_i - e^{\frac{a}{T_i+b}+c} \right)^2$$



$$\mu_w = e^{\frac{a}{T+b}+c}$$

Archivos Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Revisar Vista Programador Ayuda

Comentarios Compartir

Portapapeles Fuente Alineación Número Estilos Celdas Edición Complementos Analizar datos

E5

	A	B	C	D	E	F	G
1	T(C°)	mw (cP)	mw(T)	Error ²			
2	10	1.3	=EXP(F\$2/(A2+F\$3)+F\$4)	=(B2-C2)^2		a = 203.688477115495	
3	20	1	=EXP(F\$2/(A3+F\$3)+F\$4)	=(B3-C3)^2		b = 66.8269377674381	
4	30	0.8	=EXP(F\$2/(A4+F\$3)+F\$4)	=(B4-C4)^2		c = -2.36917396425011	
5	40	0.65	=EXP(F\$2/(A5+F\$3)+F\$4)	=(B5-C5)^2			
6	50	0.54	=EXP(F\$2/(A6+F\$3)+F\$4)	=(B6-C6)^2			
7	60	0.46	=EXP(F\$2/(A7+F\$3)+F\$4)	=(B7-C7)^2			
8	70	0.4	=EXP(F\$2/(A8+F\$3)+F\$4)	=(B8-C8)^2			
9	80	0.35	=EXP(F\$2/(A9+F\$3)+F\$4)	=(B9-C9)^2			
10	90	0.31	=EXP(F\$2/(A10+F\$3)+F\$4)	=(B10-C10)^2			
11			Suma =	=SUMA(D2:D10)			

$$\text{Min}_{a,b,c} \sum_{i=1}^n \left(y_i - e^{\frac{a}{T_i+b}+c} \right)^2$$

