Simulación y Optimización

Optimización
Introducción
Parte I

Enrique E. Tarifa, Facultad de Ingeniería, UNJu

Definiciones

Concepto de optimización

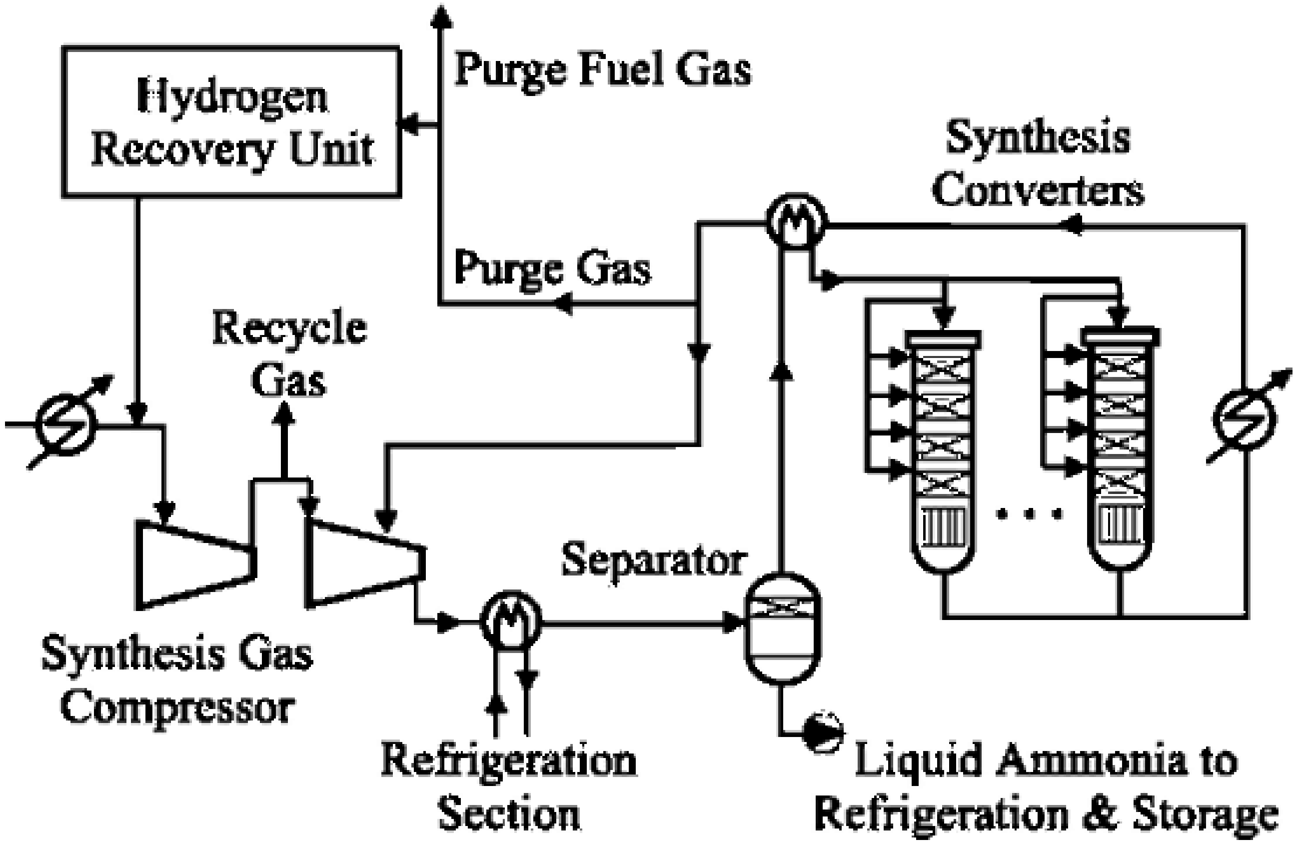
- "Para definirlo crudamente pero no inapropiadamente, la ingeniería es el arte de hacer bien con un dólar aquello que cualquier chapucero haría con dos dólares" (Wellington, 1900).
- En ingeniería, no basta con hacer una cosa, sino que hay que hacerla de la mejor forma posible.
- Optimizar es hacer lo mejor que se pueda dentro de lo posible.
- Maximizar o minimizar una función, cumpliendo con algunas restricciones.

Etapas de la optimización

1. Especificación del problema
2. Formulación del modelo
3. Resolución del modelo
4. Verificación de las condiciones de optimalidad
5. Análisis de sensibilidad

Planta de NH_3

- Reciclo
- Purga
- Integración energética



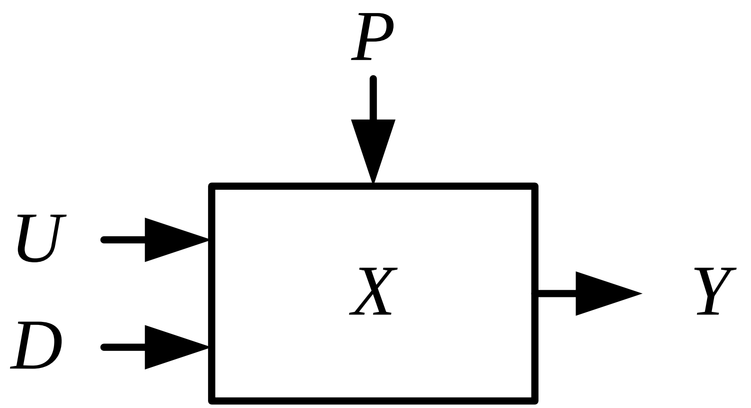
Campos de aplicación

- Gerenciamiento
- Diseño de procesos
- Diseño de equipos
- Control de procesos
- Operación de la planta
- Comercialización

Toma de decisiones

Clasificación de variables

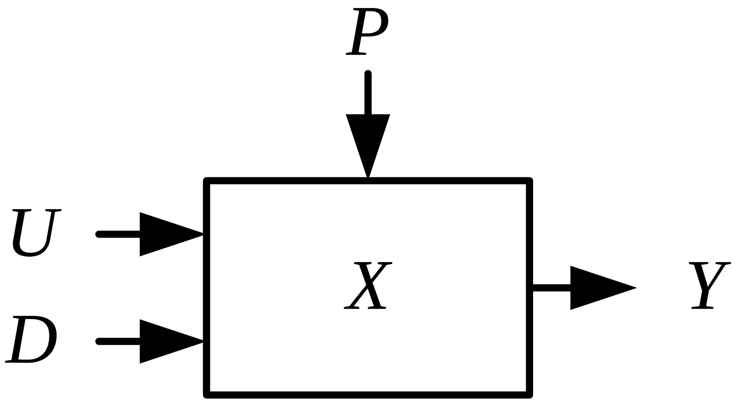
- Parámetros (P)
- Variables de entrada:
  - Manipulables (U)
  - Perturbación (D)
- Variables de salida (Y)
- Variables internas (I)
- Variables de estado ($X \subseteq I$)



Una variable es un símbolo que se usa para designar valores.

Clasificación de variables

- Diseño: Fijar *P* y proveer *U* para atenuar *D* y obtener el *Y* deseado.
- Especificación: Similar a diseño.
- Operación: Fijar *U* para inicializar *X* y atenuar *D* para obtener el *Y* deseado.
- Supervisión: Observar *Y*, estimar *X*.



Modelo de optimización

Optimizar

Obtener el mejor {Objetivo}

Acciones

s. a (sujeto a):

Alternativas $\in$ {posible, práctico}

Solución: alternativa óptima y el valor del objetivo

Modelo de optimización

Operador de optimización $\underset{X}{\text{Max}}\, FO(X)$ Función objetivo

Variable de decisión

s. a:

Restricciones

$$H(X) = 0$$

$$G(X) \leq 0$$

$\Rightarrow$ X^{opt}, $FO(x^{opt})$

- $GL = n\text{-}m > 0$
- n: incógnitas
- m: igualdades

Función objetivo

Función objetivo

Operadores: Max y Min

Criterios	Función objetivo
Económico	Beneficios, costos, retorno de capital, TIR, VAN
Técnico	Nivel de producción, tiempo de producción, utilización de servicios, calidad del producto
De seguridad	Probabilidad de accidentes, consecuencias de accidentes, riesgo
Ambiental	Concentración de contaminantes, caudal de efluentes, consumo de recursos naturales
Personal	Utilidad

Problema multicriterio

- Plantear un problema con múltiples funciones objetivo.
- Resolver secuencialmente.
- Plantear una función objetivo combinada.
- Convertir los objetivos secundarios en restricciones.

$$FO(X) = \sum_{k=1}^{l} w_k r_k FO_k(X)$$

$$\sum_{k=1}^{l} w_k = 1$$

r: factor de conversión de unidades.
w: peso.

Restricciones

Restricciones

- Naturaleza del sistema (lo posible)
  - Modelo de simulación del sistema
  - Región de validez del modelo de simulación
- Criterios ingenieriles (lo práctico)

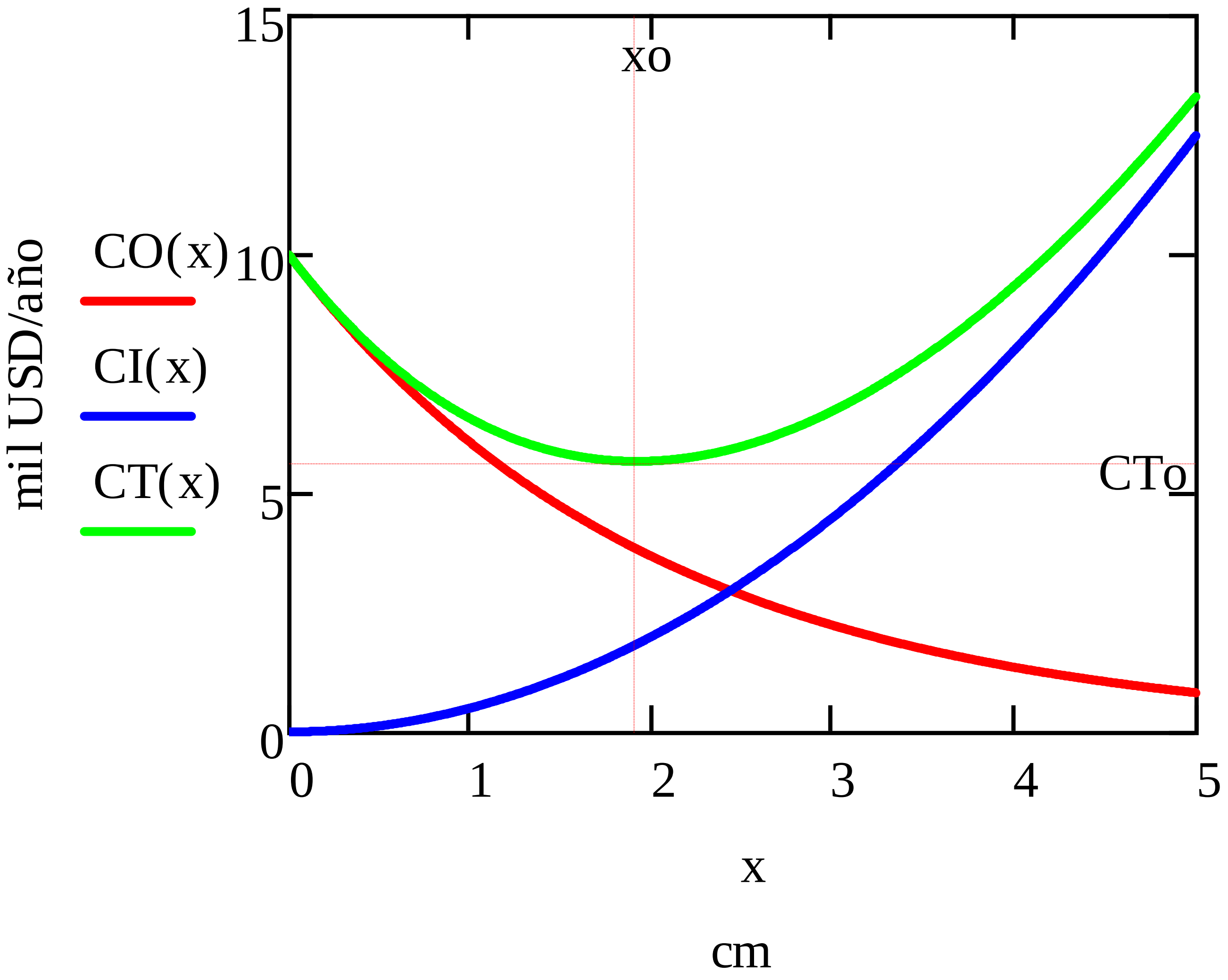
Región factible

Región factible

Es la región formada por todos los X que satisfacen a todas las restricciones.

Espesor de capa aislante

Espesor de capa aislante



$x^{O} = 1.92$ cm y $CT^{O} = 5.67$ mil USD/año

Modelo de optimización

$$\underset{X}{\text{Max}}\, FO(X)$$

s. a:

$$H(X) = 0$$

$$G(X) \leq 0$$

$$\underset{x}{\text{Min}}\, CT(x)$$

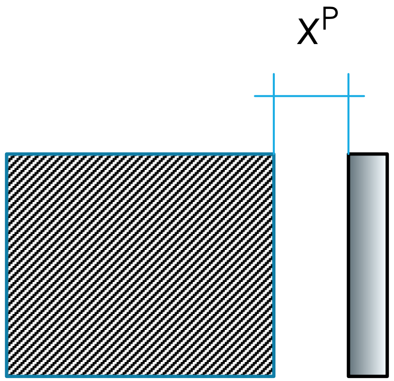
s. a:

$$x \geq 0$$

$\Rightarrow$ x^{opt}, $CT(x^{opt})$

Restricciones

- La temperatura externa debe ser mínima.
- La temperatura externa debe ser menor que 60 °C $\Rightarrow x^T$.
- Distancia mínima a la pared $\Rightarrow x^P$.



$$\underset{x}{\mathrm{Min}}\, CT(x)$$

$$\underset{x}{\mathrm{Min}}\, T(x)$$

s. a:

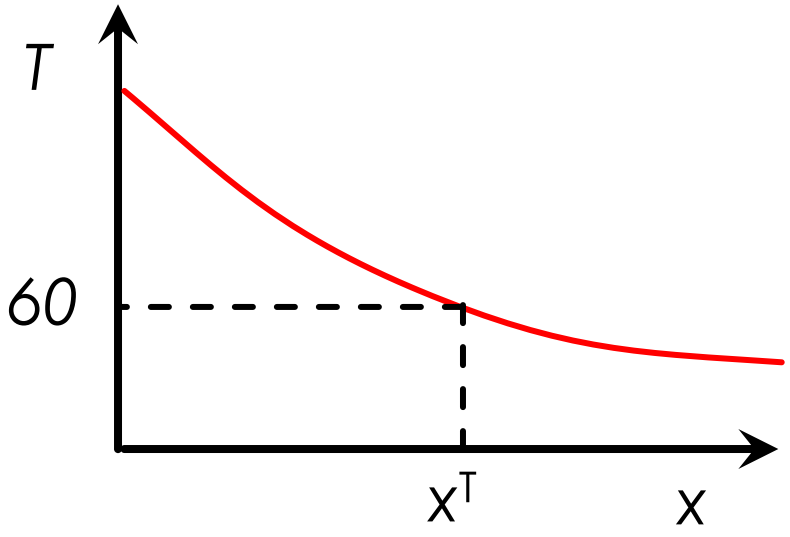
$$x \geq 0$$

$$\underset{x}{\mathrm{Min}}\, CT(x)$$

s. a:

$$x \geq 0$$

$$\cancel{T(x) \leq 60}$$



$$x \geq x^T$$

$$x \leq x^P$$

Modelo de optimización

$$\underset{x}{\text{Min}}\, CT(x)$$

s. a:

$$x \geq x^{\text{T}}$$

$$x \leq x^{\text{P}}$$

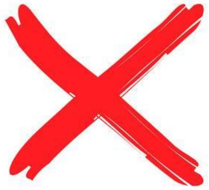
La región factible es el intervalo $[x^T, x^P]$.

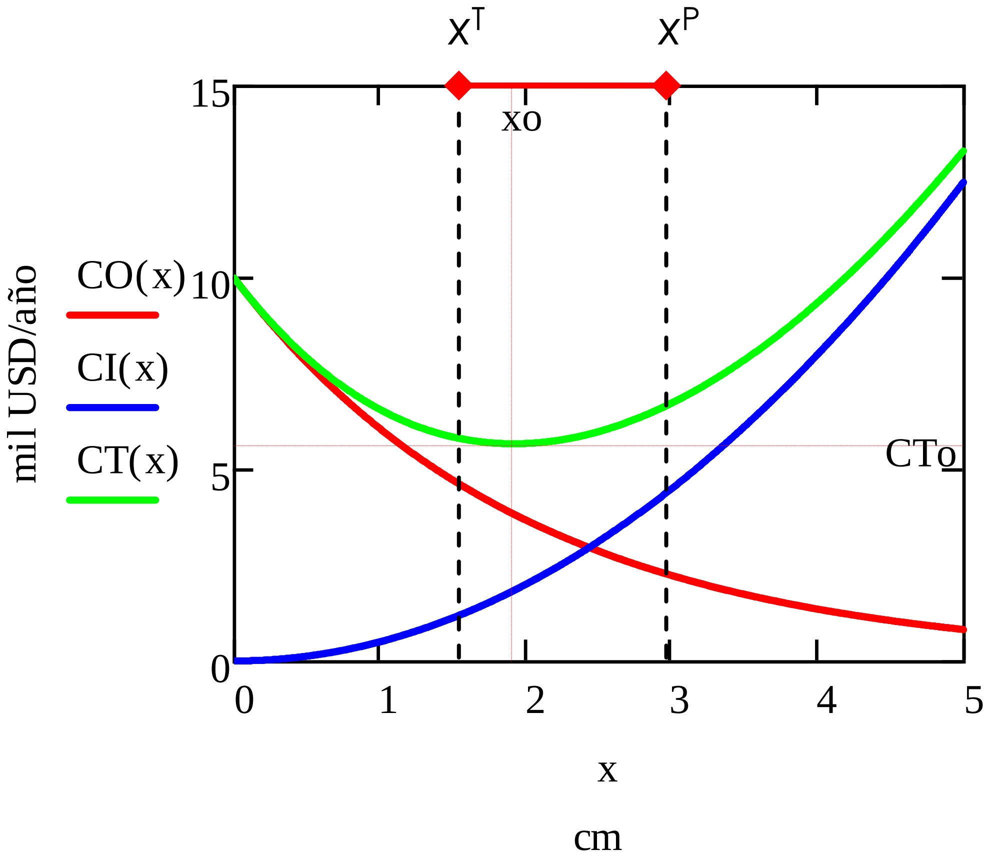
Efectos de las restricciones

- $x^T < x^O < x^P$: el óptimo sigue siendo x^O.
- $x^P < x^O$: el óptimo es x^P.
- $x^O < x^T$: el óptimo es x^T.
- $x^P < x^T$: no tiene región factible.

$$x \geq x^T = 5$$

$$x \leq x^P = 2$$





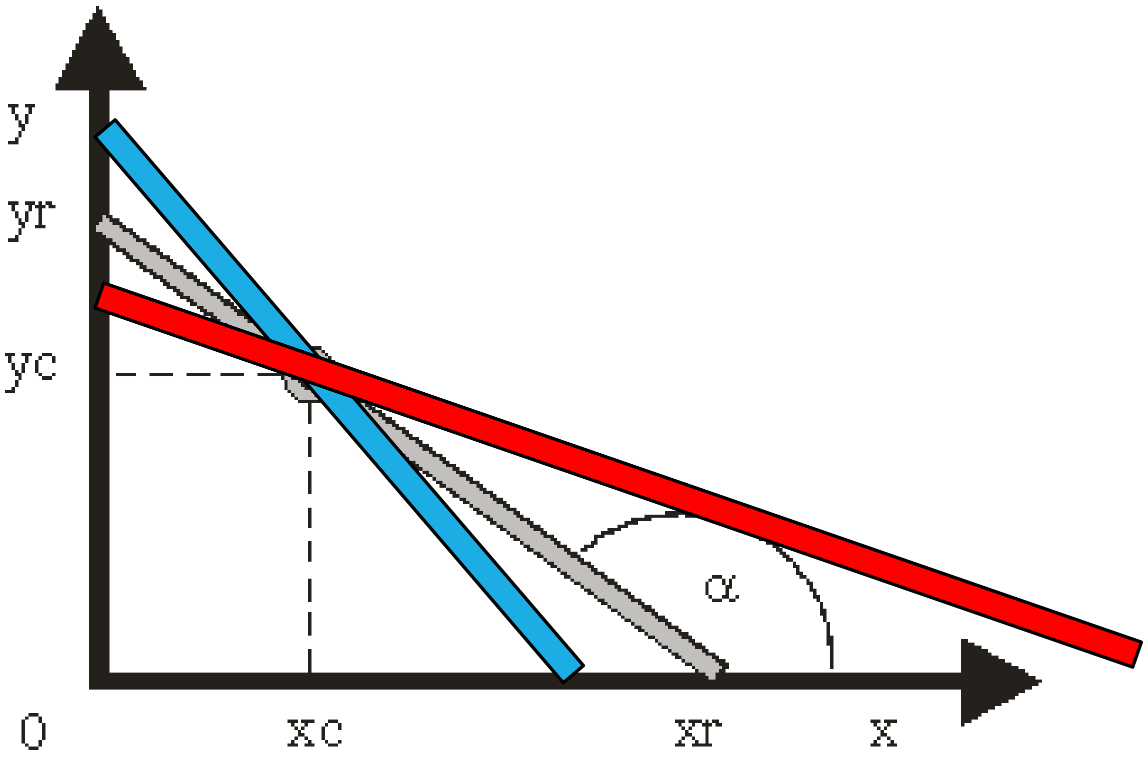
Efectos de las restricciones

Al agregar una restricción, la solución óptima no cambia o empeora.

Instalación de una viga

Problema de la viga

Determinar la viga de longitud mínima que pase por el punto de carga (2 m, 3 m).



Modelo de optimización

$$\underset{xr,yr,l}{\text{Min}}\; l$$

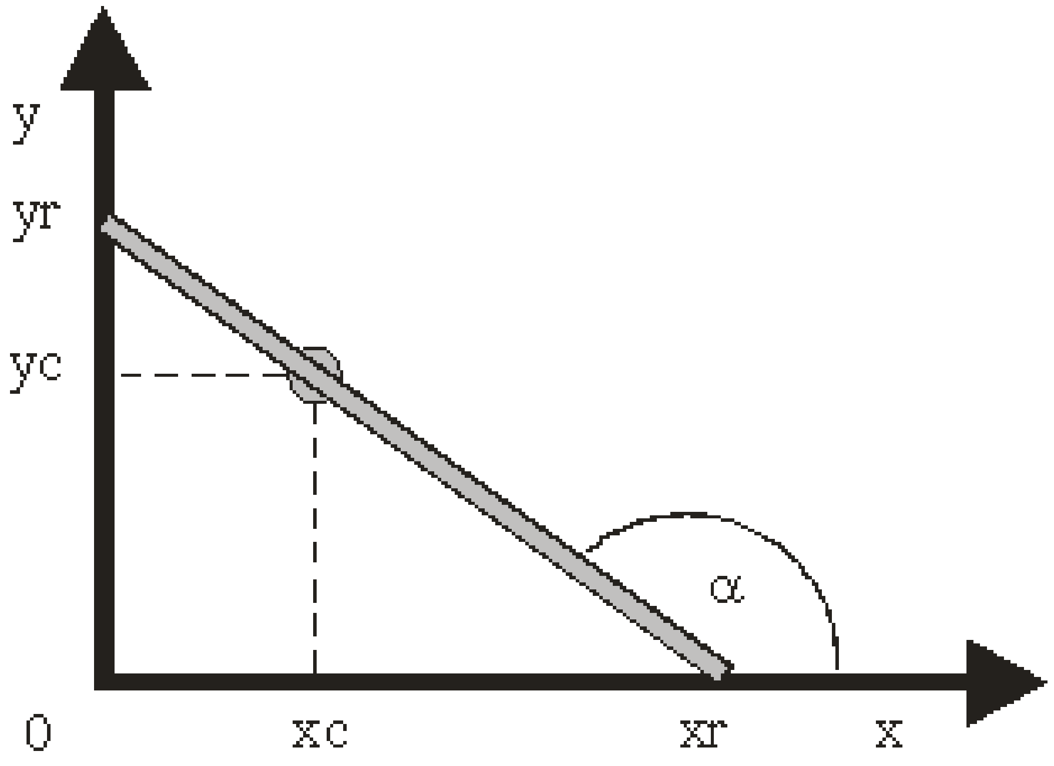
s. a:

$$\frac{yr}{xr} = \frac{yc}{xr - xc}$$

$$l = \sqrt{xr^2 + yr^2}$$

$$xc \leq xr$$

$$yc \leq yr$$



Instalación de una viga con xr.xlsx

Modelo estándar

Modelo estándar de la instalación de una viga

FO		Variables			Parámetros	
5		xr	3		xc	2
		yr	4		yc	3
		l	5			

MI	Tipo	MD
1.3333333	=	3
5	=	5
2	<=	3
3	<=	4

$$\min_{xr,yr,l} l$$

s. a:

$$\frac{yr}{xr} = \frac{yc}{xr - xc}$$

$$l = \sqrt{xr^2 + yr^2}$$

$$xc \le xr$$

$$yc \le yr$$

Modelo estándar

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Modelo estándar**							
2								
3	**FO**		**Variables**			**Parámetros**		
4	=D6		xr	3		xc	2	
5			yr	4		yc	3	
6			l	5				
7								
8	**MI**	**Tipo**	**MD**					
9	=D5/D4	=	=G5/(D4-G4)					
10	=D6	=	=RAIZ(D4^2+D5^2)					
11	=G4	<=	=D4					
12	=G5	<=	=D5					
13								
14								
15								
16								
17								
18								

$$\min_{xr,yr,l} l$$

s. a:

$$\frac{yr}{xr} = \frac{yc}{xr - xc}$$

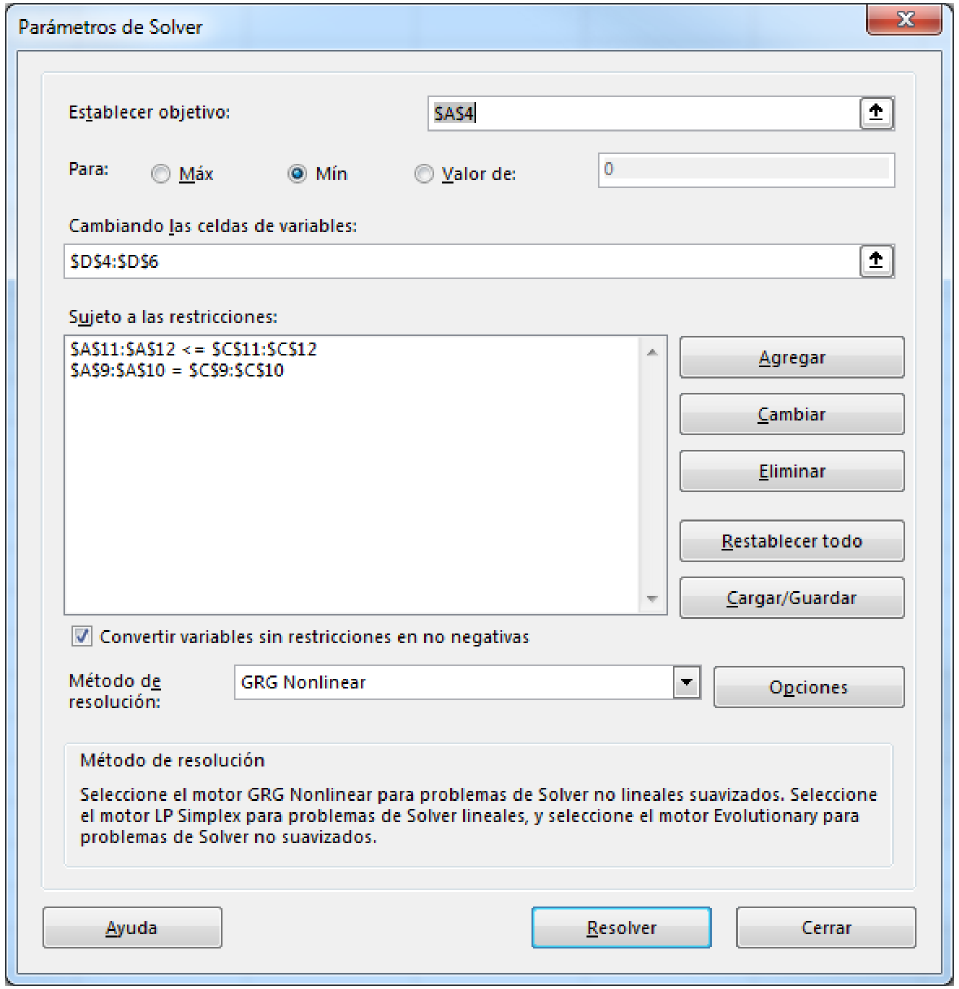
$$l = \sqrt{xr^2 + yr^2}$$

$$xc \leq xr$$

$$yc \leq yr$$

Modelo estándar | Modelo estándar var | Modelo de estado

Solver para el modelo estándar



Modelo estándar

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Modelo estándar (**							
2								
3	**FO**		**Variables**			**Parámetros**		
4	=l		xr	4.61966221013412		xc	2	
5			yr	5.29037123114334		yc	3	
6			l	7.02348236768968				
7								
8	**MI**	**Tipo**	**MD**					
9	=yr/xr	=	=yc/(xr-xc)					
10	=l	=	=RAIZ(xr^2+yr^2)					
11	=xc	<=	=xr					
12	=yc	<=	=yr					
13								
14								
15								
16								
17								
18								

$$\min_{xr,yr,l} l$$

s. a:

$$\frac{yr}{xr} = \frac{yc}{xr - xc}$$

$$l = \sqrt{xr^2 + yr^2}$$

$$xc \leq xr$$

$$yc \leq yr$$

Modelo estándar | Modelo estándar var | Modelo de estado

Modelo estándar

- n = 3 (xr, yr, l)
- Solo las igualdades.
- m = 2
- GL debe ser positivo.
- GL = n-m = 3-2 = 1

$$\underset{xr,yr,l}{\mathrm{Min}}\; l$$

s. a:

$$\frac{yr}{xr}-\frac{yc}{xr-xc}=0$$

$$l^2-xr^2-yr^2=0$$

$$xc-xr\leq 0$$

$$yc-yr\leq 0$$

Implementación en Mathcad

$$\min_{xr,yr,l} l$$

s. a:

$$\frac{yr}{xr} - \frac{yc}{xr - xc} = 0$$

$$l^2 - xr^2 - yr^2 = 0$$

$$xc - xr \le 0$$

$$yc - yr \le 0$$

Datos:

$xc := 2 \cdot m$

$yc := 3 \cdot m$

$lmax := 10 \cdot m$

Función objetivo:

$fo(xr, yr, l) := l$

Inicialización:

$xr := 1.1xc$

$yr := 1.1yc$

$l := \sqrt{xr^2 + yr^2}$

Restricciones:

Given

$\frac{yr}{xr} - \frac{yc}{xr - xc} = 0$

$l^2 - xr^2 - yr^2 = 0$

$xc - xr \le 0$

$yc - yr \le 0$

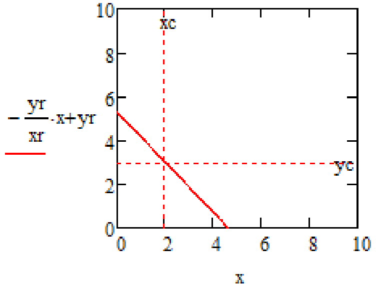
$\begin{pmatrix} xr \\ yr \\ l \end{pmatrix} := \mathrm{Minimize}(fo, xr, yr, l)$

Solución:

$xr = 4.621\,m$

$yr = 5.29\,m$

$l = 7.023\,m$



Instalación de una viga xr.xmcd

Modelo de estado

$$\underset{xr}{\mathrm{Min}}\, l$$

$$yr \leftarrow \frac{yc}{xr - xc}\, xr$$

$$l \leftarrow \sqrt{xr^2 + yr^2}$$

s. a:

$$xc \leq xr$$

$$yc \leq yr$$

Instalación de una viga con xr.xlsx

Modelo de estado

Modelo de estado de la instalación de una viga

FO		Variables			Parámetros	
33.073252		xr	2.2		xc	2
		yr	33		yc	3
		l	33.073252			

MI	Tipo	MD
2	<=	2.2
3	<=	33

$$\operatorname*{Min}_{xr} l$$

$$yr \leftarrow \frac{yc}{xr - xc} xr$$

$$l \leftarrow \sqrt{xr^2 + yr^2}$$

s. a:

$$xc \leq xr$$

$$yc \leq yr$$

Modelo estándar | Modelo estándar var | Modelo de estado

Modelo de estado

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Modelo de estado**							
2								
3	**FO**		**Variables**			**Parámetros**		
4	=D6		xr	2.2		xc	2	
5			yr	=G5/(D4-G4)*D4		yc	3	
6			l	=RAIZ(D4^2+D5^2)				
7								
8	**MI**	**Tipo**	**MD**					
9								
10								
11	=G4	<=	=D4					
12	=G5	<=	=D5					
13								
14								
15								
16								
17								
18								

$$\operatorname*{Min}_{xr} l$$

$$yr \leftarrow \frac{yc}{xr - xc} xr$$

$$l \leftarrow \sqrt{xr^2 + yr^2}$$

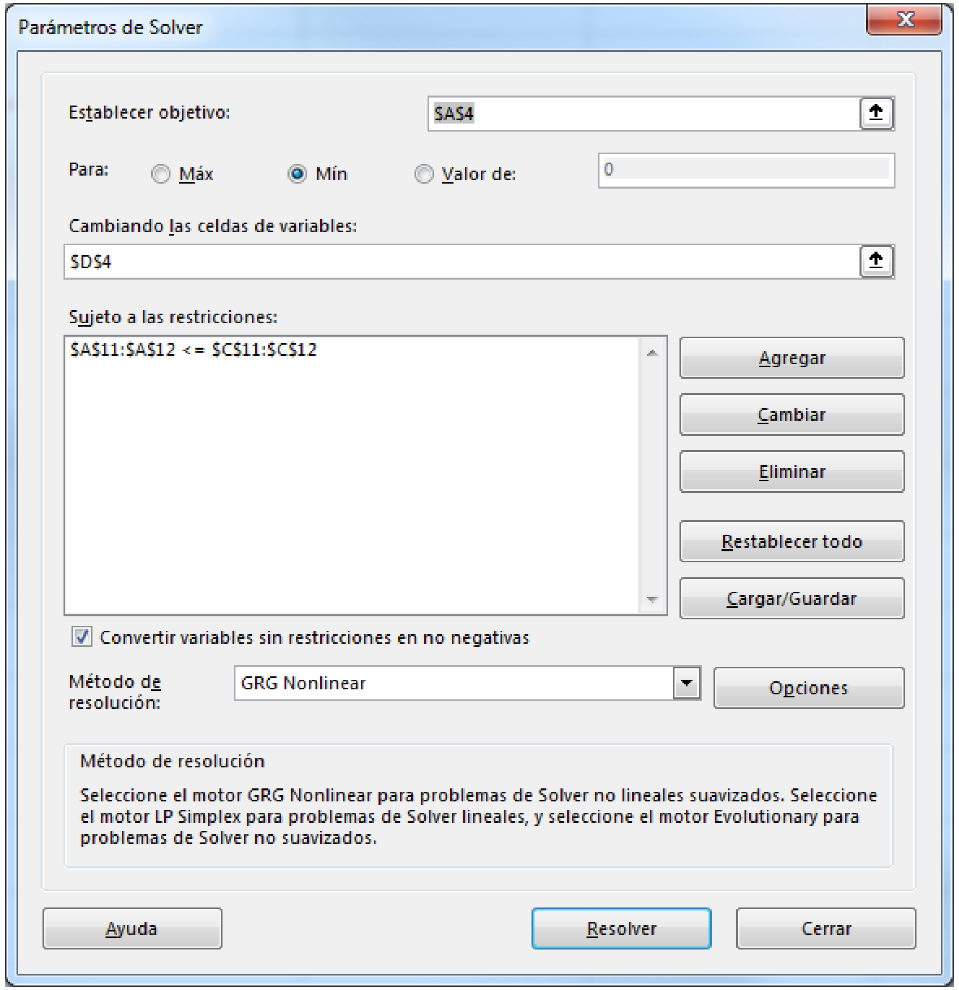
s. a:

$$xc \leq xr$$

$$yc \leq yr$$

Modelo estándar | Modelo estándar var | Modelo de estado

Solver para el modelo de estado



Implementación en Mathcad

$$\underset{xr}{\mathrm{Min}}\, l$$

$$yr \leftarrow \frac{yc}{xr - xc} xr$$

$$l \leftarrow \sqrt{xr^2 + yr^2}$$

s. a:

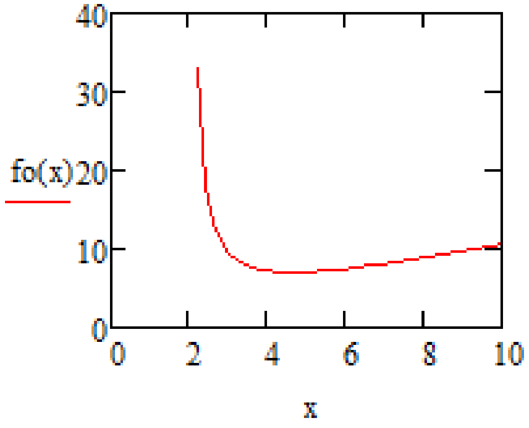
$$xc \le xr$$

$$yc \le yr$$

Instalación de una viga xr.xmcd

$$fo(xr) := \left| \begin{array}{l} yr \leftarrow \dfrac{yc}{xr - xc} \cdot xr \\ l \leftarrow \sqrt{xr^2 + yr^2} \end{array} \right.$$

$x := 1.1 \cdot xc, 1.2 \cdot xc .. 5 \cdot xc$



$xr := 1.2 \cdot xc$

Given

$xc \le xr$

$yc \le \dfrac{yc}{xr - xc} \cdot xr$

$xr := \mathrm{Minimize}(fo, xr)$

$xr = 4.621\,\mathrm{m}$

Modelo de sustitución

$$\operatorname*{Min}_{xr} \sqrt{xr^2 + \left(\frac{yc}{xr - xc} xr\right)^2}$$

s. a:

$$xc \leq xr$$

$$yc \leq \frac{yc}{xr - xc} xr$$

Formas de modelos

Modelo estándar

$$\underset{xr,yr,l}{\text{Min}}\, l$$

s. a:

$$\frac{yr}{xr} - \frac{yc}{xr - xc} = 0$$

$$l^2 - xr^2 - yr^2 = 0$$

$$xc - xr \leq 0$$

$$yc - yr \leq 0$$

Modelo de estado

$$\underset{xr}{\text{Min}}\, l$$

$$yr \leftarrow \frac{yc}{xr - xc} xr$$

$$l \leftarrow \sqrt{xr^2 + yr^2}$$

s. a:

$$xc \leq xr$$

$$yc \leq yr$$

Modelo de sustitución

$$\underset{xr}{\text{Min}} \sqrt{xr^2 + \left(\frac{yc}{xr - xc} xr \right)^2}$$

s. a:

$$xc \leq xr$$

$$yc \leq \frac{yc}{xr - xc} xr$$