

Modelado de entradas
Parte II

Enrique E. Tarifa, Facultad de Ingeniería, UNJu

Mapa curricular de la materia

- Definiciones
- Sistemas determinísticos
- Sistemas estocásticos
- Sistemas continuos

Mapa curricular de la materia

- Definiciones
- Sistemas determinísticos
- **Sistemas estocásticos**
- Sistemas continuos

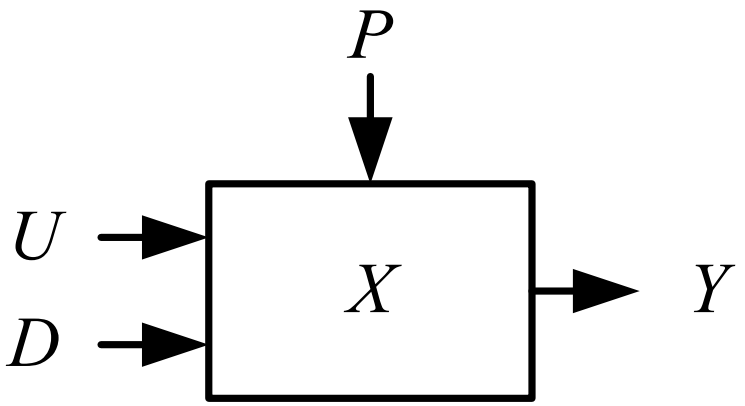
Mapa curricular de gráfico *q-q*

1. Clasificación de variables
2. Etapas del modelado de entradas
3. Evaluación de la distribución
4. Gráfico *q-q*
5. Interpretación
6. Aplicaciones

Modelado de entradas

Clasificación de variables

- Parámetros (*P*)
- Variables de entrada:
  - Manipulables (*U*)
  - Perturbación (*D*)
- Variables de salida (*Y*)
- Variables internas (*I*)
- Variables de estado ($X \subseteq I$)



Una variable es un símbolo que se usa para designar valores.

Cajero automático

- El usuario es el banco.
- Objetivo: Determinar cuándo se debe recargar.
- Variables tipo *D*:
  - Tiempo entre arribos de clientes
  - Tipo de operación
  - Monto de operación



Simulador de vuelo

- Los usuarios son los pilotos.
- Objetivo: Capacitar a los pilotos.
- Variables tipo *D*:
  - Cantidad de pasajeros
  - Peso de cada pasajero
  - Peso de cada equipaje



Etapas del modelado de entradas

1. Colección de datos
2. Identificación de la distribución
3. Determinación de parámetros
4. Evaluación

Resultados

Colección	• Tabla x
Identificación	• $f(x)$ o $p(x)$
Ajuste	• Parámetros
Evaluación	• Distribución

Resultados

Colección	• Tabla x
Identificación	• $f(x)$ o $p(x)$
Ajuste	• Parámetros
Evaluación	• Distribución

Evaluación del ajuste



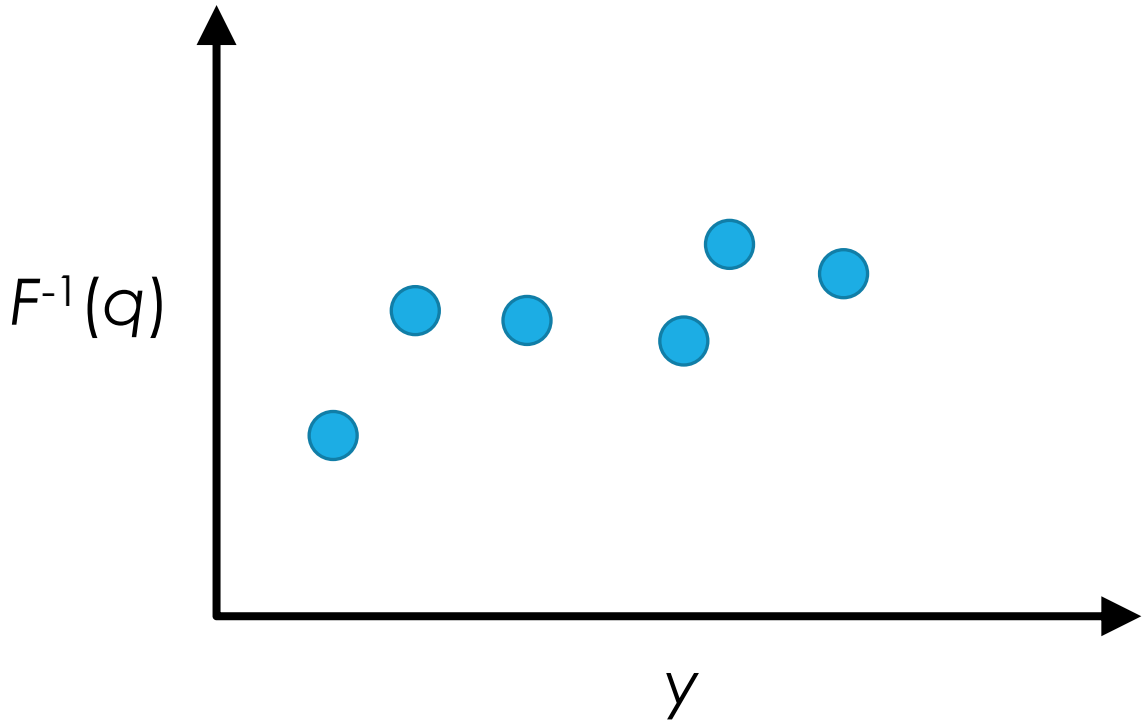
Gráfico *q-q*

Gráfico *q*-*q*

- Una alternativa al empleo de histogramas:
  - Se puede usar con pocos datos (menos de 30).
  - No depende de parámetros arbitrarios.
- El *q*-*quantile* de *X* es el valor γ tal que $F(\gamma) = P(X \leq \gamma) = q$.
- El *q*-*quantile* de *X* para $q = 0.5$ es la mediana.
- Cuando *F*(x) tiene inversa, el *quantile* es igual a $\gamma = F^{-1}(q)$.

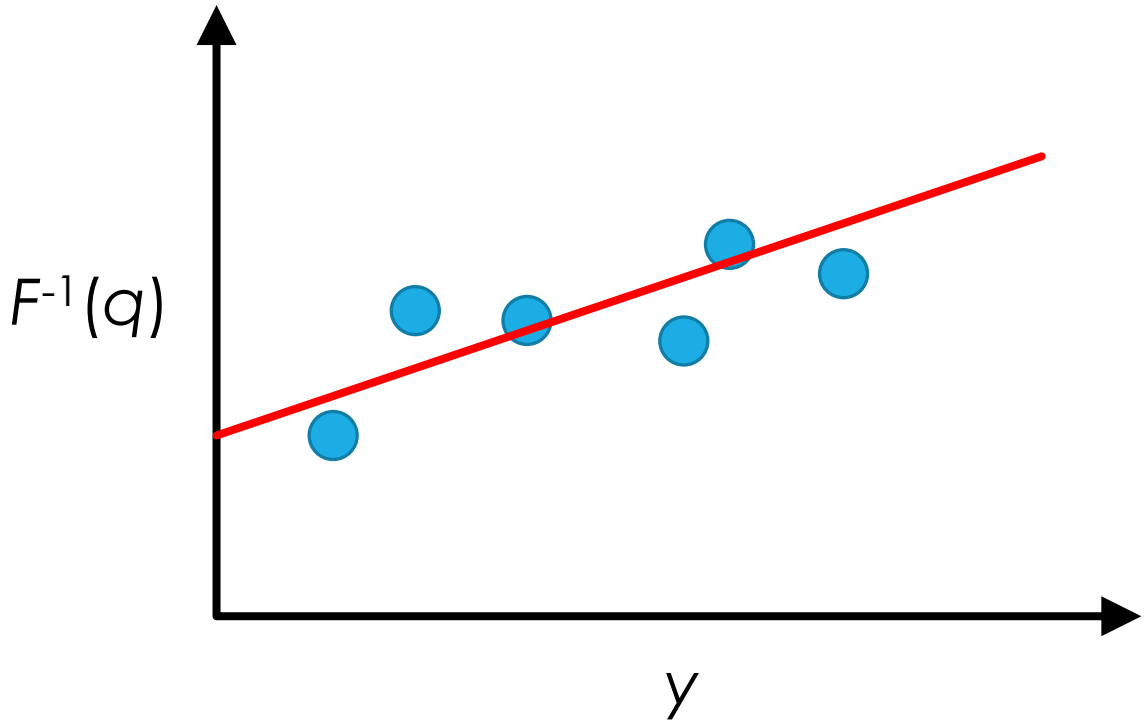
Construcción del gráfico *q-q*

1. Obtener $x_i, i = 1, 2, \ldots, n.$
2. Ordenar x_i de menor a mayor $\rightarrow y_j, j = 1, 2, \ldots, n.$
3. Calcular $q_j = (j - 0.5)/n.$
4. Graficar $F^{-1}(q_j)$ vs. $y_j.$



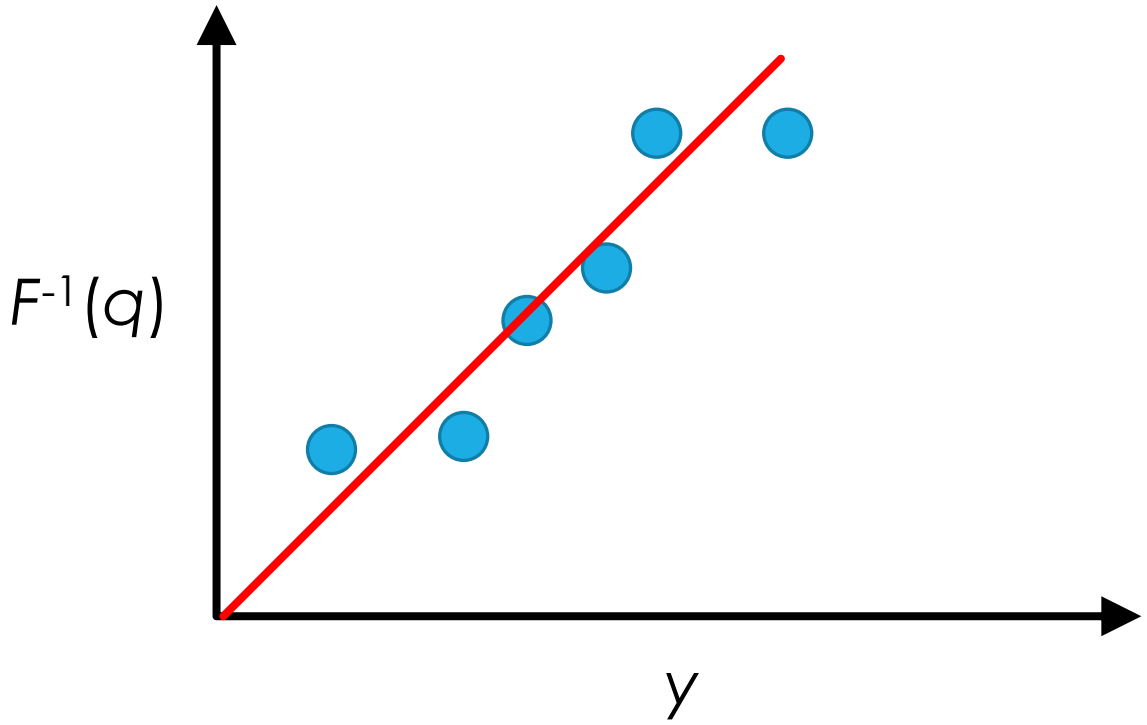
Interpretación del gráfico *q*-*q*

- Si $f(x)$ es de la familia de distribuciones adecuada, el gráfico $F^{-1}(q)$ vs. y será aproximadamente una línea recta.



Interpretación del gráfico *q*-*q*

- Si, además, los parámetros de *f*(x) tienen los valores adecuados, la línea recta tendrá pendiente 1 y pasará por el origen.



Tolerancia

- Se tiene un 5 % de tolerancia en la pendiente:
  - $[0.95, 1.05]$.
- Se tiene un 5 % de tolerancia en la distancia al origen respecto a *Xm*:
  - $[-0.05\ Xm,\ 0.05\ Xm]$.

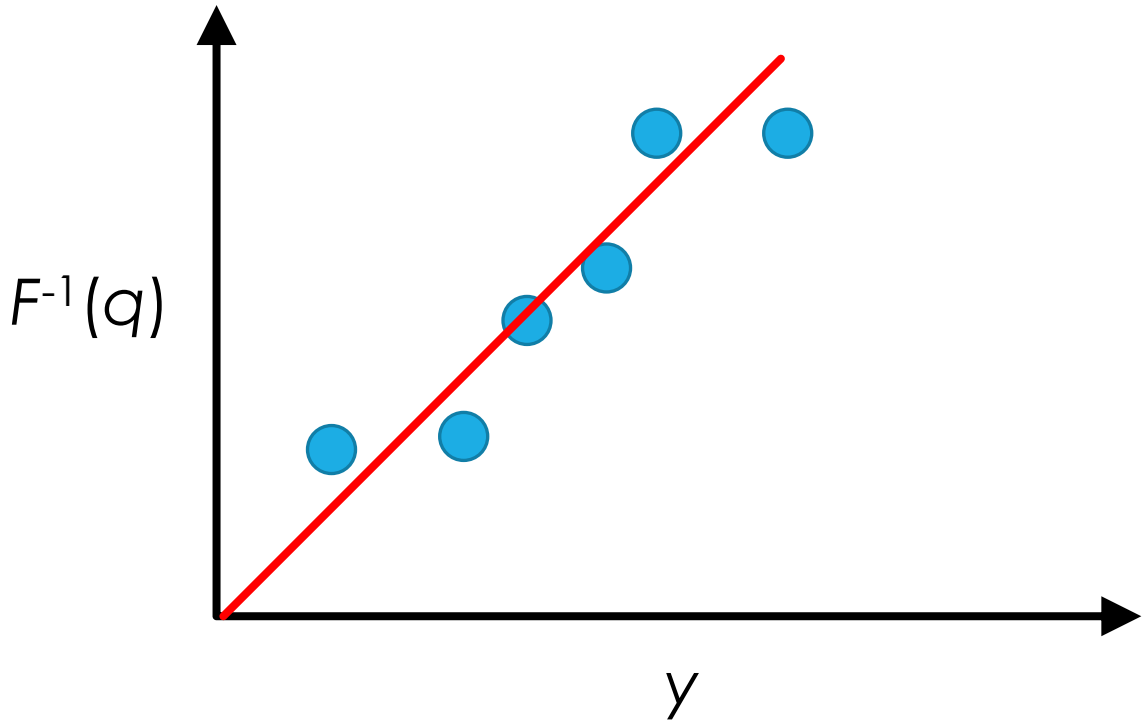


Tabla de mediciones de *X*

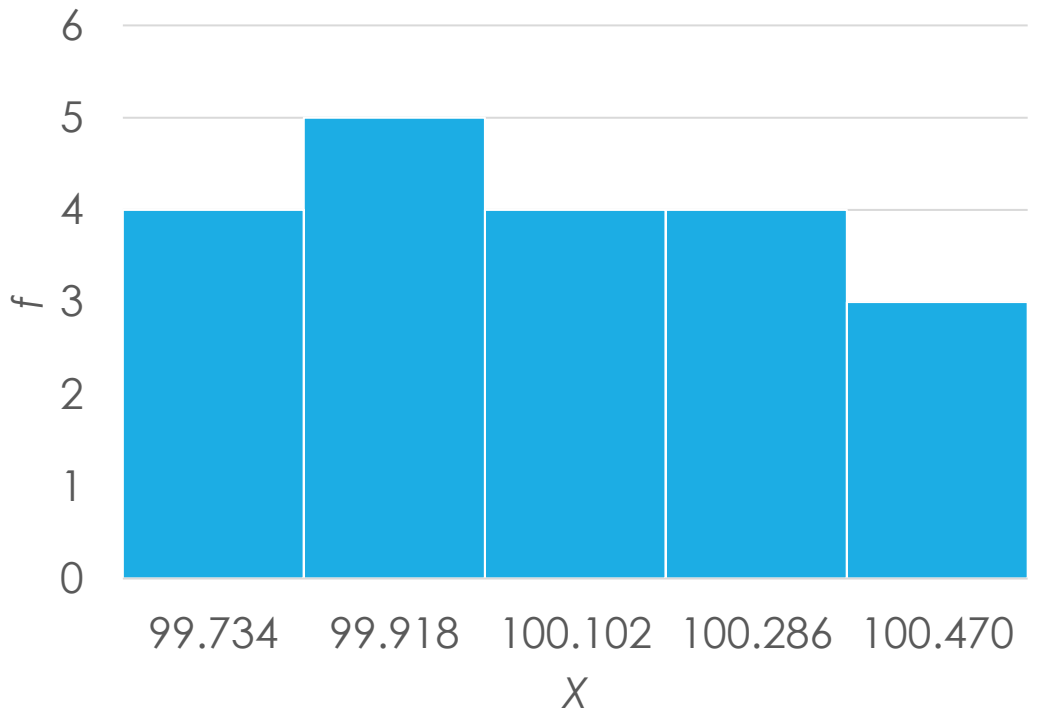
99.79	99.56	100.17	100.33
100.26	100.41	99.98	99.83
100.23	100.27	100.02	100.47
99.55	99.62	99.65	99.82
99.96	99.90	100.06	99.85

$n = 20$, $Xm = 99.99$ y $S^2 = 0.2832^2$

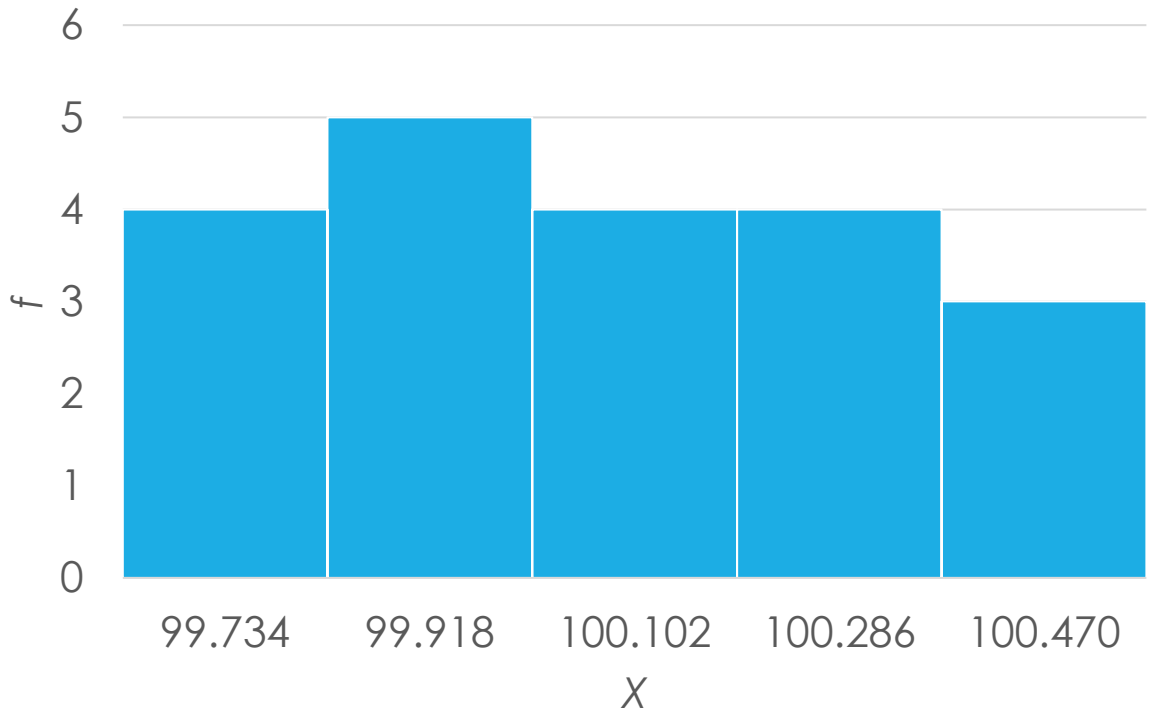
Gráfico q-q paso a paso. xlsx

Identificación de la distribución

1. Crear histograma.
2. Proponer $f(x)$ o $p(x)$.
3. Determinar parámetros.



Identificación de *f*(x)



Se propone una distribución normal.

$\mu = 99.99$ y $\sigma = 0.2832$

Creación de la tabla del gráfico q-q

1. Obtener $F(x)$.
2. Obtener $F^{-1}(q)$:
   1. $F(y) = q$
   2. $y = F^{-1}(q)$
3. Ordenar x de menor a mayor para obtener y.

- Calcular $q_j = (j - 0.5)/n$.

j	y	q	$F^{-1}(q)$
1	99.55	0.025	99.43
2	99.56	0.075	99.58
3	99.62	0.125	99.66
4	99.65	0.175	99.72
5	99.79	0.225	99.77
6	99.82	0.275	99.82
7	99.83	0.325	99.86
8	99.85	0.375	99.90
9	99.90	0.425	99.93
10	99.96	0.475	99.97
…	…	…	…

Tabla q-q

j	y	q	$F^{-1}(q)$
1	99.55	0.025	99.43
2	99.56	0.075	99.58
3	99.62	0.125	99.66
4	99.65	0.175	99.72
5	99.79	0.225	99.77
6	99.82	0.275	99.82
7	99.83	0.325	99.86
8	99.85	0.375	99.90
9	99.90	0.425	99.93
10	99.96	0.475	99.97
11	99.98	0.525	100.00
12	100.02	0.575	100.04
13	100.06	0.625	100.08
14	100.17	0.675	100.11
15	100.23	0.725	100.16
16	100.26	0.775	100.20
17	100.27	0.825	100.25
18	100.33	0.875	100.31
19	100.41	0.925	100.39
20	100.47	0.975	100.54

Obtención de y

	A	B	C	D
1	**Tabla de datos**			
2	99.79	99.56	100.17	100.33
3	100.26	100.41	99.98	99.83
4	100.23	100.27	100.02	100.47
5	99.55	99.62	99.65	99.82
6	99.96	99.90	100.06	99.85

Ordenar x de menor a mayor.

8	j	y_j
9	1	99.55
10	2	99.56
11	3	99.62
12	4	99.65
13	5	99.79
14	6	99.82
15	7	99.83
16	8	99.85
17	9	99.90
18	10	99.96
19	11	99.98
20	12	100.02
21	13	100.06

Datos | Histograma

Cálculo de q

- Calcular $q_j = (j - 0.5)/n$.

8	j	y_j	$q_j = (j\text{-}0.5)/n$
9	1	99.55	0.025
10	2	99.56	0.075
11	3	99.62	0.125
12	4	99.65	0.175
13	5	99.79	0.225
14	6	99.82	0.275
15	7	99.83	0.325
16	8	99.85	0.375
17	9	99.90	0.425
18	10	99.96	0.475
19	11	99.98	0.525
20	12	100.02	0.575
21	13	100.06	0.625

Datos | Histograma | q vs q | q vs q fig.

Cálculo de $F^{-1}(q)$

- Se evalúa la distribución normal con $\mu = 99.99$ y $\sigma = 0.2832$.
- Como no tiene inversa, se emplea:
  `= DISTR.NORM.INV(q, μ, σ)`

8	j	y_j	$q_j = (j-0.5)/n$	$F^{-1}(q_j)$
9	1	99.55	0.025	99.43
10	2	99.56	0.075	99.58
11	3	99.62	0.125	99.66
12	4	99.65	0.175	99.72
13	5	99.79	0.225	99.77
14	6	99.82	0.275	99.82
15	7	99.83	0.325	99.86
16	8	99.85	0.375	99.90
17	9	99.90	0.425	99.93
18	10	99.96	0.475	99.97
19	11	99.98	0.525	100.00
20	12	100.02	0.575	100.04
21	13	100.06	0.625	100.08

Datos | Histograma | q vs q | q vs q fig. | q vs q exp | q

Listo | Accesibilidad: es necesario investigar

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	**Tabla de datos**											
2	99.79	99.56	100.17	100.33		**Xm =**	99.99					
3	100.26	100.41	99.98	99.83		**Varianza =**	0.08018184					
4	100.23	100.27	100.02	100.47								
5	99.55	99.62	99.65	99.82								
6	99.96	99.90	100.06	99.85								
7												
8	***j***	y_j	$q_j = (j-0.5)/n$	$F^{-1}(q_j)$								
9	1	99.55	0.025	99.43								
10	2	99.56	0.075	99.58								
11	3	99.62	0.125	99.66								
12	4	99.65	0.175	99.72								
13	5	99.79	0.225	99.77								
14	6	99.82	0.275	99.82								
15	7	99.83	0.325	99.86								
16	8	99.85	0.375	99.90								
17	9	99.90	0.425	99.93								
18	10	99.96	0.475	99.97								
19	11	99.98	0.525	100.00								
20	12	100.02	0.575	100.04								
21	13	100.06	0.625	100.08								

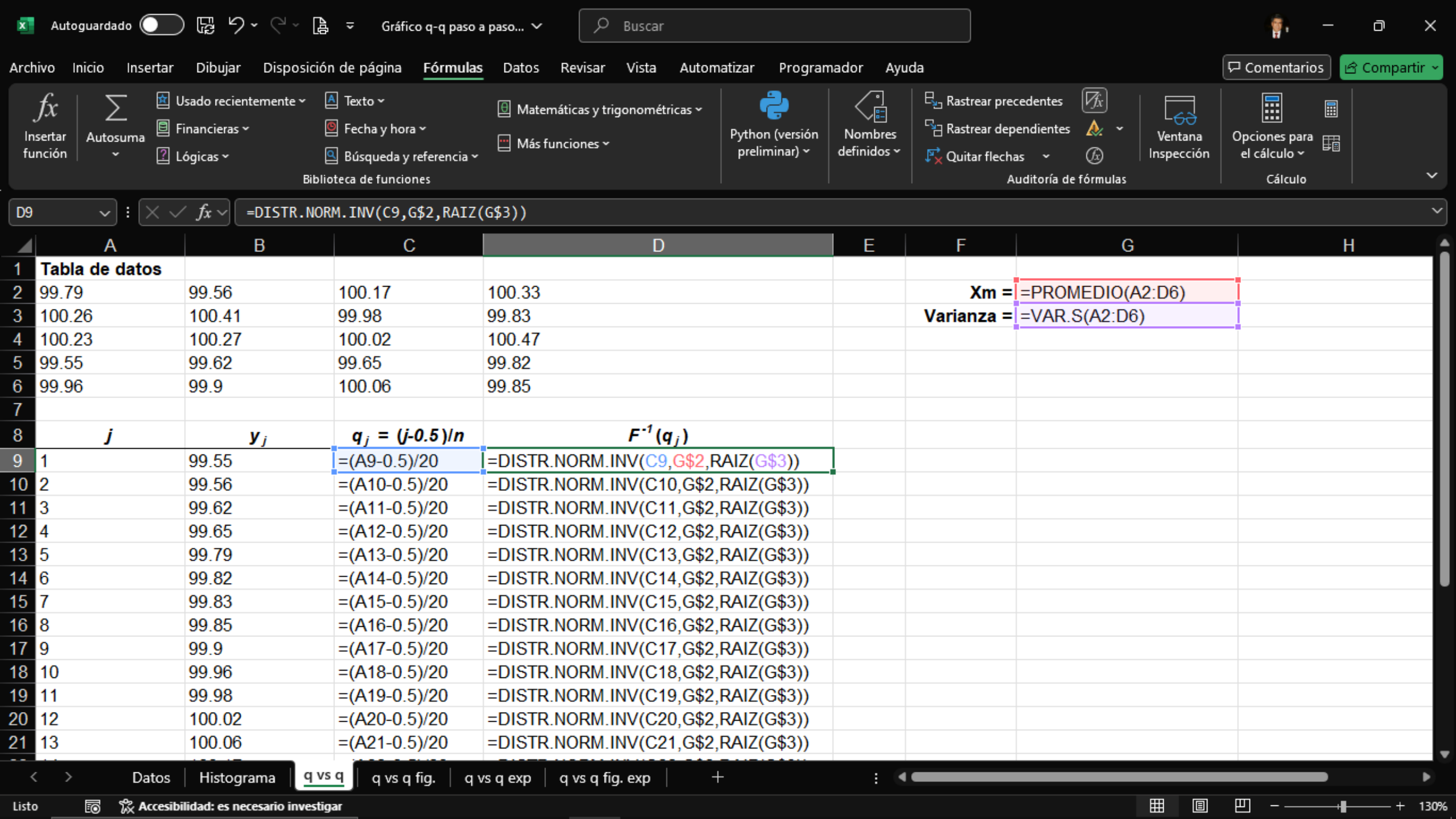
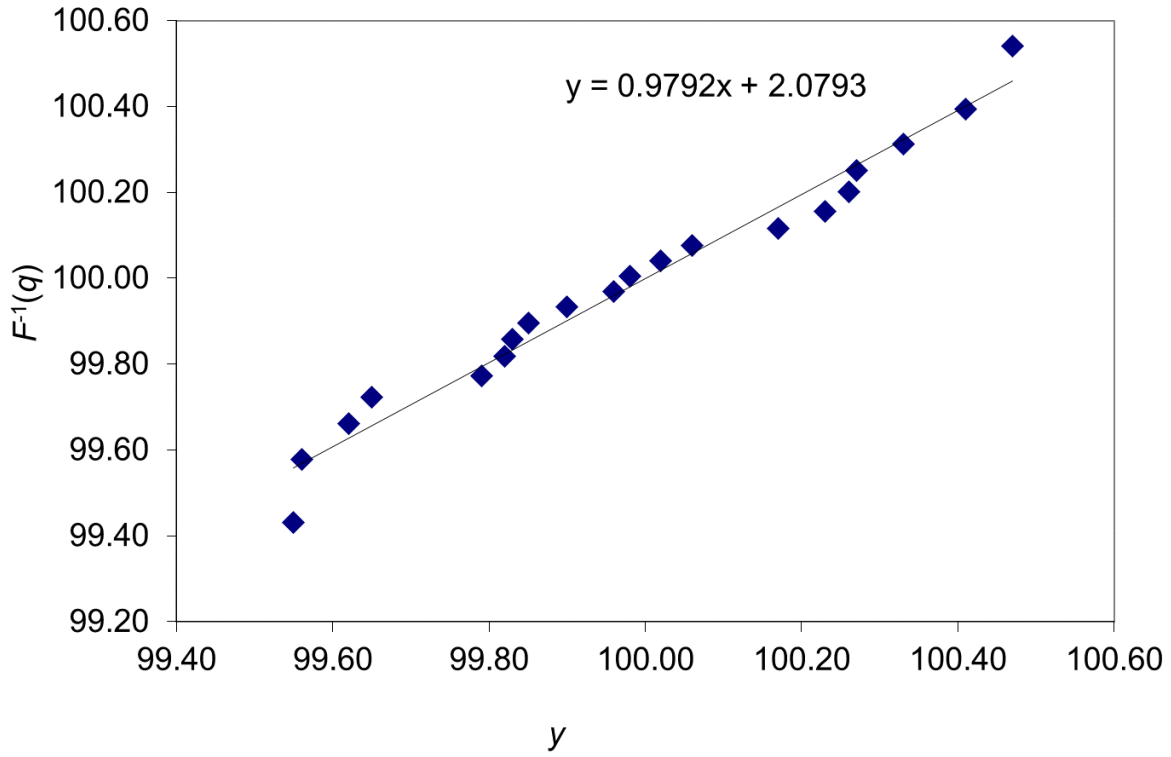

Autoguardado
Gráfico q-q paso a paso...
Buscar
Archivo Inicio Insertar Dibujar Disposición de página Fórmulas Datos Revisar Vista Automatizar Programador Ayuda
Comentarios
Compartir
Insertar función
Autosuma
Usado recientemente
Financieras
Lógicas
Texto
Fecha y hora
Búsqueda y referencia
Matemáticas y trigonométricas
Más funciones
Biblioteca de funciones
Python (versión preliminar)
Nombres definidos
Rastrear precedentes
Rastrear dependientes
Quitar flechas
Auditoría de fórmulas
Ventana Inspección
Opciones para el cálculo
Cálculo
D9
=DISTR.NORM.INV(C9,G$2,RAIZ(G$3))
Tabla de datos
99.79 99.56 100.17 100.33
100.26 100.41 99.98 99.83
100.23 100.27 100.02 100.47
99.55 99.62 99.65 99.82
99.96 99.9 100.06 99.85
j
y_j
q_j = (j-0.5)/n
F^-1(q_j)
Xm = =PROMEDIO(A2:D6)
Varianza = =VAR.S(A2:D6)
1 99.55 =(A9-0.5)/20 =DISTR.NORM.INV(C9,G$2,RAIZ(G$3))
2 99.56 =(A10-0.5)/20 =DISTR.NORM.INV(C10,G$2,RAIZ(G$3))
3 99.62 =(A11-0.5)/20 =DISTR.NORM.INV(C11,G$2,RAIZ(G$3))
4 99.65 =(A12-0.5)/20 =DISTR.NORM.INV(C12,G$2,RAIZ(G$3))
5 99.79 =(A13-0.5)/20 =DISTR.NORM.INV(C13,G$2,RAIZ(G$3))
6 99.82 =(A14-0.5)/20 =DISTR.NORM.INV(C14,G$2,RAIZ(G$3))
7 99.83 =(A15-0.5)/20 =DISTR.NORM.INV(C15,G$2,RAIZ(G$3))
8 99.85 =(A16-0.5)/20 =DISTR.NORM.INV(C16,G$2,RAIZ(G$3))
9 99.9 =(A17-0.5)/20 =DISTR.NORM.INV(C17,G$2,RAIZ(G$3))
10 99.96 =(A18-0.5)/20 =DISTR.NORM.INV(C18,G$2,RAIZ(G$3))
11 99.98 =(A19-0.5)/20 =DISTR.NORM.INV(C19,G$2,RAIZ(G$3))
12 100.02 =(A20-0.5)/20 =DISTR.NORM.INV(C20,G$2,RAIZ(G$3))
13 100.06 =(A21-0.5)/20 =DISTR.NORM.INV(C21,G$2,RAIZ(G$3))
Datos Histograma q vs q q vs q fig. q vs q exp q vs q fig. exp
Listo
Accesibilidad: es necesario investigar
130%

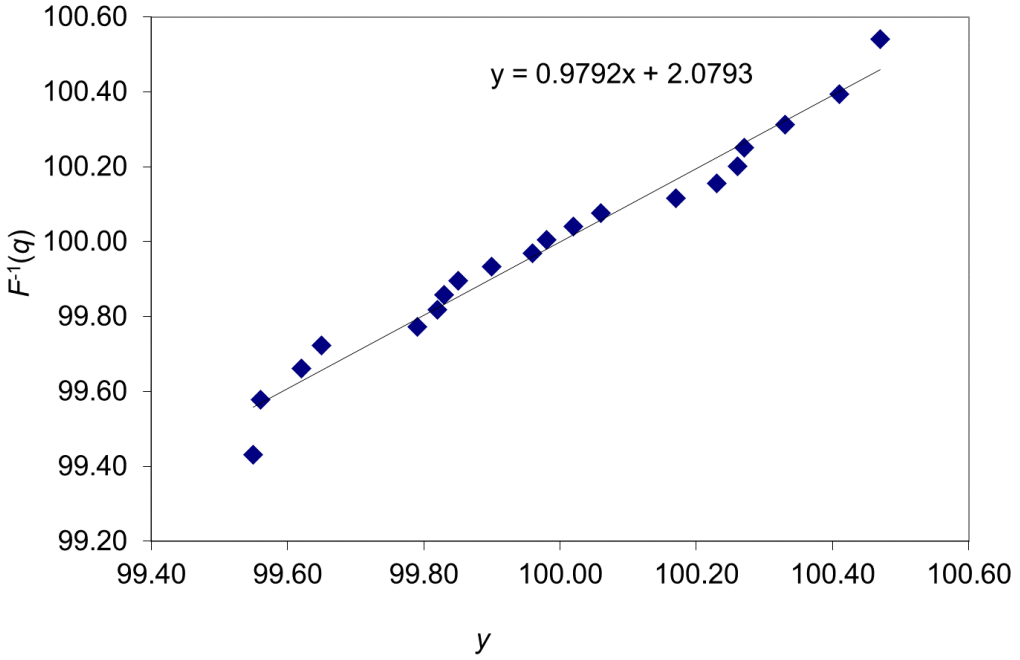
Gráfico q-q



Distribución normal Gráfico q-q paso a paso.xlsx

Análisis de la distribución normal

- Recta:
  - $y = 0.9792x + 2.0793$
- Pendiente:
  - $0.9792 \in [0.95, 1.05]$
- Distancia al origen:
  - $2.0793 \in [-0.05 \times 99.99, 0.05 \times 99.99]$
- Se acepta la distribución.



Distribución exponencial

- Para ver cómo da el gráfico para una distribución que no es la correcta, se prueba con una exponencial.
- $\lambda = \frac{1}{Xm} = \frac{1}{99.99} = 0.01$

Distribución exponencial

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$F(y) = 1 - e^{-\lambda y}$$

$$1 - e^{-\lambda y} = q$$

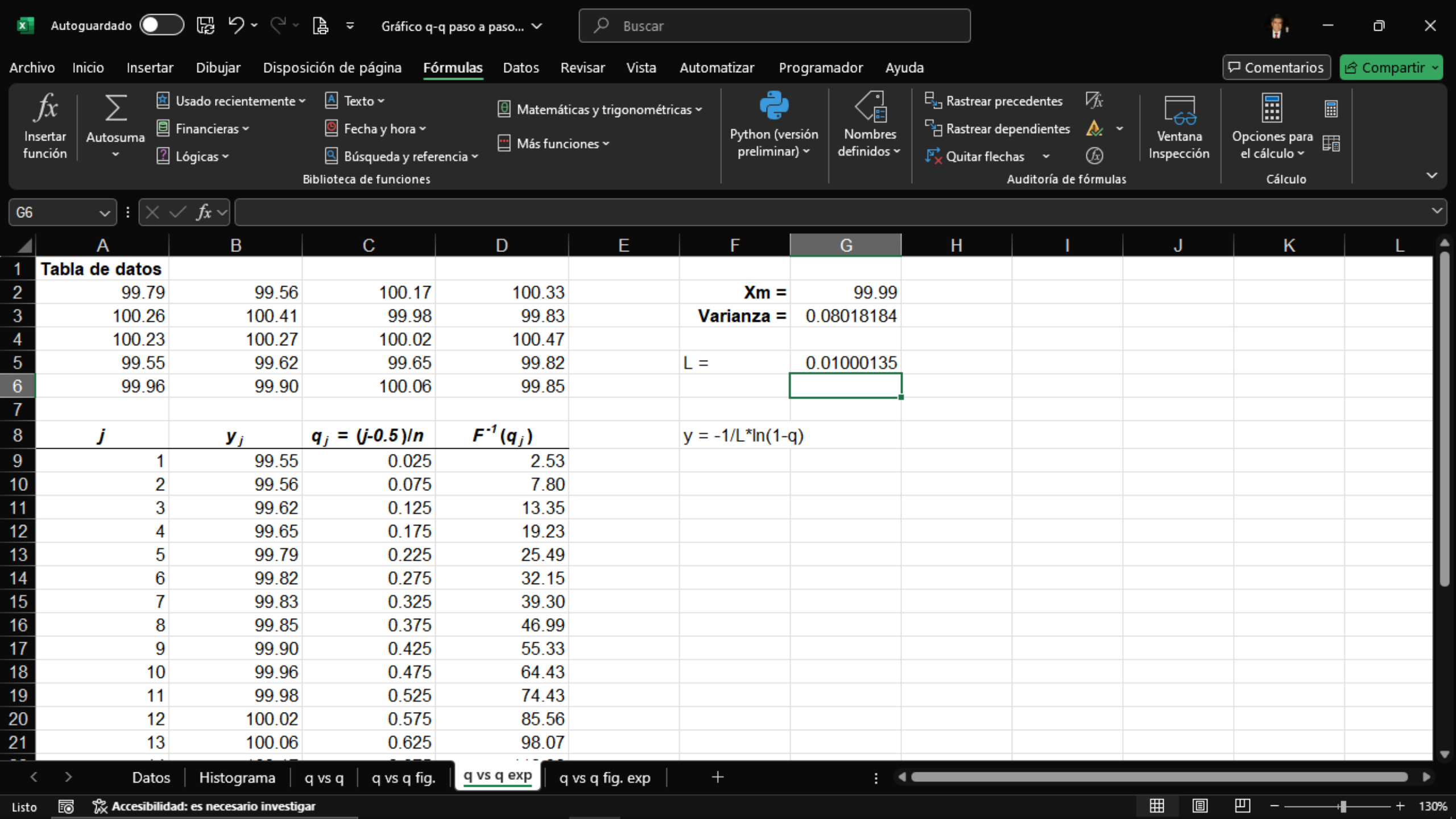
$$-e^{-\lambda y} = q - 1$$

$$e^{-\lambda y} = 1 - q$$

$$-\lambda y = \ln(1 - q)$$

$$y = -\frac{1}{\lambda}\ln(1 - q)$$

$$F^{-1}(q) = -\frac{1}{\lambda}\ln(1 - q)$$



Autoguardado | Gráfico q-q paso a paso... | Buscar

Archivo Inicio Insertar Dibujar Disposición de página Fórmulas Datos Revisar Vista Automatizar Programador Ayuda | Comentarios | Compartir

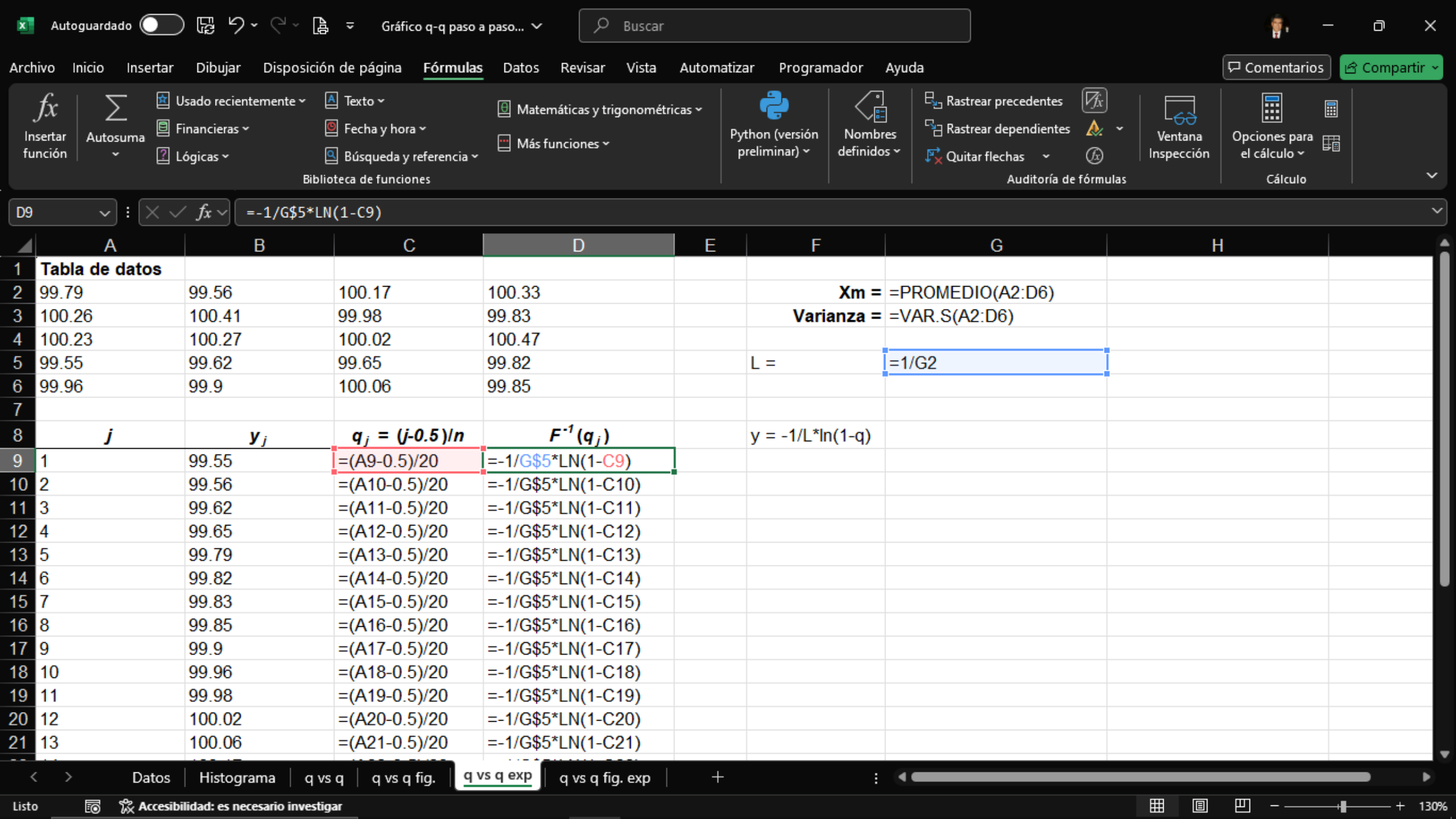
Insertar función | Autosuma | Usado recientemente | Financieras | Lógicas | Texto | Fecha y hora | Búsqueda y referencia | Matemáticas y trigonométricas | Más funciones | Biblioteca de funciones | Python (versión preliminar) | Nombres definidos | Rastrear precedentes | Rastrear dependientes | Quitar flechas | Auditoría de fórmulas | Ventana Inspección | Opciones para el cálculo | Cálculo

G6

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	**Tabla de datos**											
2	99.79	99.56	100.17	100.33		**Xm =**	99.99					
3	100.26	100.41	99.98	99.83		**Varianza =**	0.08018184					
4	100.23	100.27	100.02	100.47								
5	99.55	99.62	99.65	99.82		L =	0.01000135					
6	99.96	99.90	100.06	99.85								
7												
8	***j***	y_j	$q_j = (j-0.5)/n$	$F^{-1}(q_j)$		y = -1/L*ln(1-q)						
9	1	99.55	0.025	2.53								
10	2	99.56	0.075	7.80								
11	3	99.62	0.125	13.35								
12	4	99.65	0.175	19.23								
13	5	99.79	0.225	25.49								
14	6	99.82	0.275	32.15								
15	7	99.83	0.325	39.30								
16	8	99.85	0.375	46.99								
17	9	99.90	0.425	55.33								
18	10	99.96	0.475	64.43								
19	11	99.98	0.525	74.43								
20	12	100.02	0.575	85.56								
21	13	100.06	0.625	98.07								

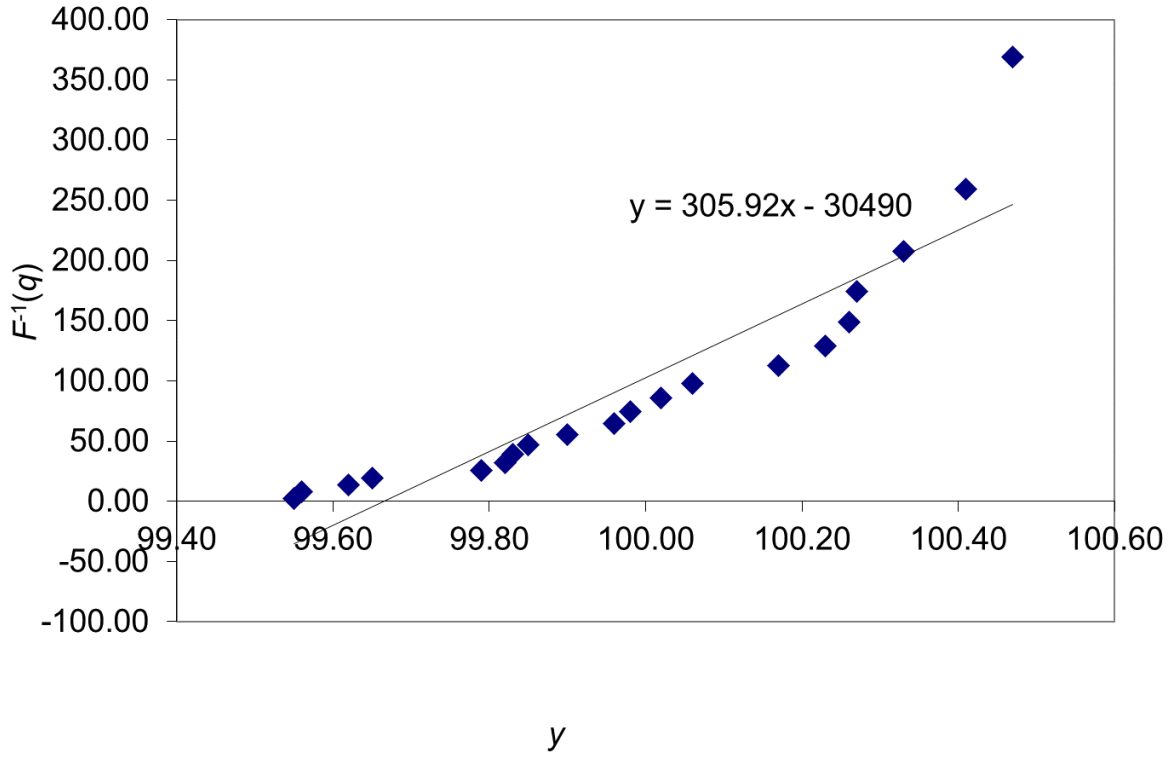
Datos | Histograma | q vs q | q vs q fig. | q vs q exp | q vs q fig. exp

Listo | Accesibilidad: es necesario investigar | 130%



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Tabla de datos**							
2	99.79	99.56	100.17	100.33		**Xm =**	=PROMEDIO(A2:D6)	
3	100.26	100.41	99.98	99.83		**Varianza =**	=VAR.S(A2:D6)	
4	100.23	100.27	100.02	100.47				
5	99.55	99.62	99.65	99.82		L =	=1/G2	
6	99.96	99.9	100.06	99.85				
7								
8	***j***	y_j	$q_j = (j-0.5)/n$	$F^{-1}(q_j)$		y = -1/L*ln(1-q)		
9	1	99.55	=(A9-0.5)/20	=-1/G$5*LN(1-C9)				
10	2	99.56	=(A10-0.5)/20	=-1/G$5*LN(1-C10)				
11	3	99.62	=(A11-0.5)/20	=-1/G$5*LN(1-C11)				
12	4	99.65	=(A12-0.5)/20	=-1/G$5*LN(1-C12)				
13	5	99.79	=(A13-0.5)/20	=-1/G$5*LN(1-C13)				
14	6	99.82	=(A14-0.5)/20	=-1/G$5*LN(1-C14)				
15	7	99.83	=(A15-0.5)/20	=-1/G$5*LN(1-C15)				
16	8	99.85	=(A16-0.5)/20	=-1/G$5*LN(1-C16)				
17	9	99.9	=(A17-0.5)/20	=-1/G$5*LN(1-C17)				
18	10	99.96	=(A18-0.5)/20	=-1/G$5*LN(1-C18)				
19	11	99.98	=(A19-0.5)/20	=-1/G$5*LN(1-C19)				
20	12	100.02	=(A20-0.5)/20	=-1/G$5*LN(1-C20)				
21	13	100.06	=(A21-0.5)/20	=-1/G$5*LN(1-C21)				

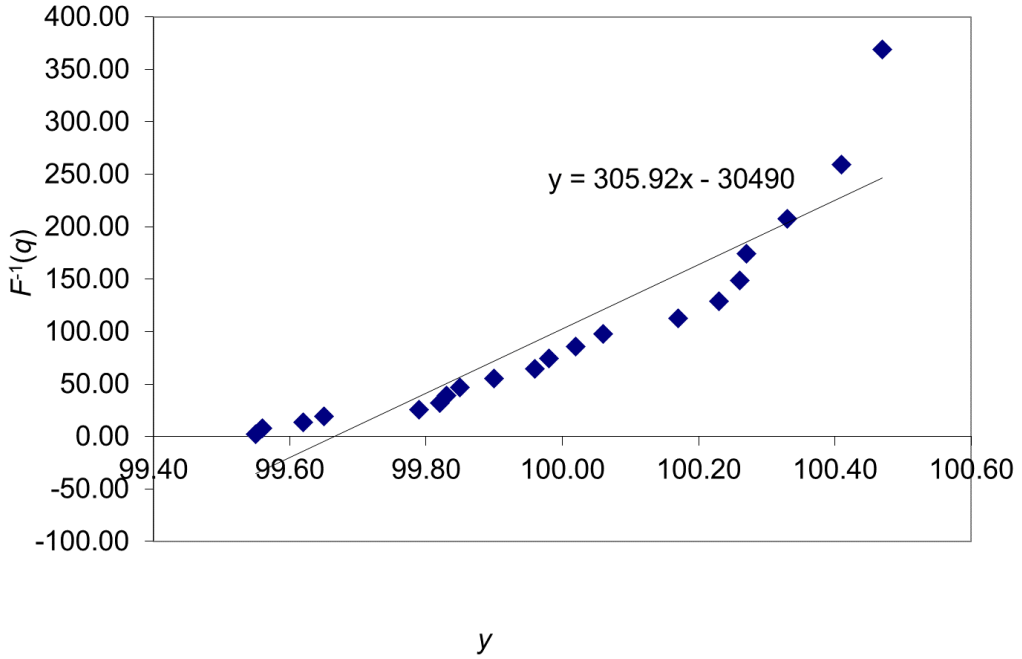
Gráfico q-q



Distribución exponencial

Análisis de la distribución exponencial

- Recta:
  - $y = 305.92x + 30490$
- Pendiente:
  - $305.92 \notin [0.95, 1.05]$
- Distancia al origen:
  - $30490 \notin [-0.05 \times 99.99,\ 0.05 \times 99.99]$
- Se rechaza la distribución.



Mapa curricular de gráfico *q-q*

1. Clasificación de variables
2. Etapas del modelado de entradas
3. Evaluación de la distribución
4. Gráfico *q-q*
5. Interpretación
6. Aplicaciones