Distribuciones probabilísticas
Parte II

Enrique E. Tarifa, Facultad de Ingeniería, UNJu

Variables aleatorias continuas

Variables aleatorias continuas

- Variable aleatoria continua X: Puede adoptar una cantidad no contable de valores, $R_X = [a,b]$.
- Peso de una manzana, $R_X = [170,250]$ g.
- $\mathrm{P}(X = x_0) = 0$

Función de densidad de probabilidad

- Función de densidad de probabilidad de *X* (*probability density function —pdf—*), *f*(x):

$$f(x) = \frac{d\mathrm{P}}{dx}$$

- Propiedades:

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathrm{R}_X$$

$$\int_{\mathrm{R}_X} f(x) = 1$$

$$f(x) = 0 \quad \forall x \notin \mathrm{R}_X$$

Función de distribución acumulada

- La función de distribución acumulada (*cumulative distribution function —cdf—*), *F*(x):

$$F(x) = \mathrm{P}(X \le x)$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

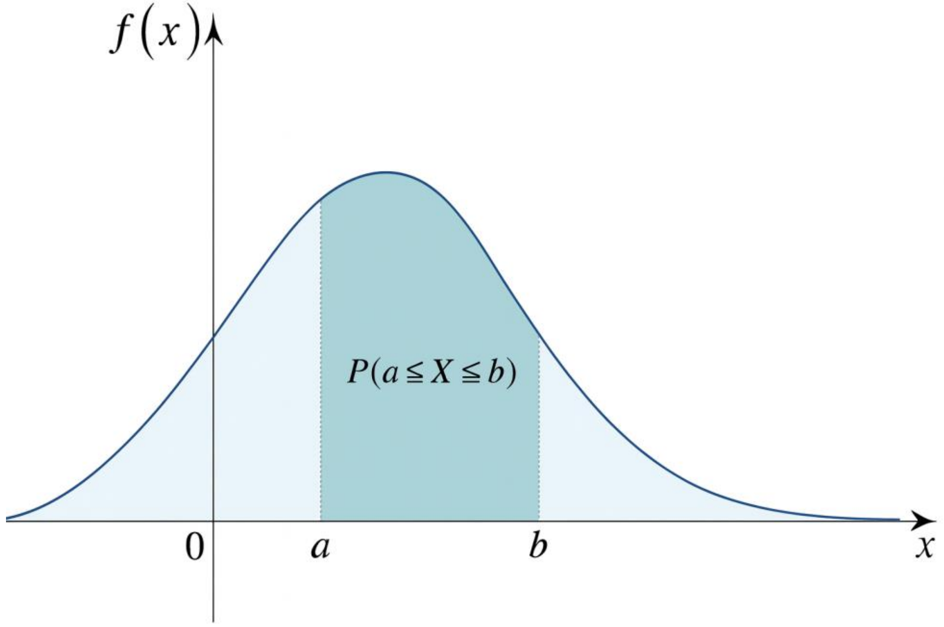
- Propiedades:
  - Debe ser no decreciente; esto es, si *a* < *b*, *F*(*a*) ≤ *F*(*b*).

$$\lim_{x \to \infty} F(x) = 1 \qquad \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$$

Probabilidad de un intervalo

- Probabilidad de un intervalo (*a*,*b*]:

$$\mathrm{P}(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \quad \forall a < b$$



$$\mathrm{P}(X = x_0) = 0$$

Probabilidad nula de un valor

INFOBAE

Gendarmería reveló la hora exacta en la que murió el fiscal Nisman

El informe asigna a ese horario un grado de "certeza" de un "98 por ciento"

17 de Octubre de 2017

Gendarmería asigna un grado de "certeza" a ese horario de la muerte de un "98 por ciento".

"Teniendo en cuenta estos valores en función al horario de la autopsia, la muerte debería haberse producido aproximadamente a las 02:46 del día 18 de enero del 2015", indica en cuatro oportunidades el documento.

Valor esperado

- Valor esperado o promedio de *X*:

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

- Propiedades:

$$\mathrm{E}(c\,X) = c\,\mathrm{E}(X)$$

$$\mathrm{E}\left(\sum_{j=1}^{m} c_j\, X_j\right) = \sum_{j=1}^{m} c_j\, \mathrm{E}(X_j)$$

Varianza

- La varianza de *X*:

$$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)$$

$$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}\left(X^2\right) - \mathrm{E}(X)^2$$

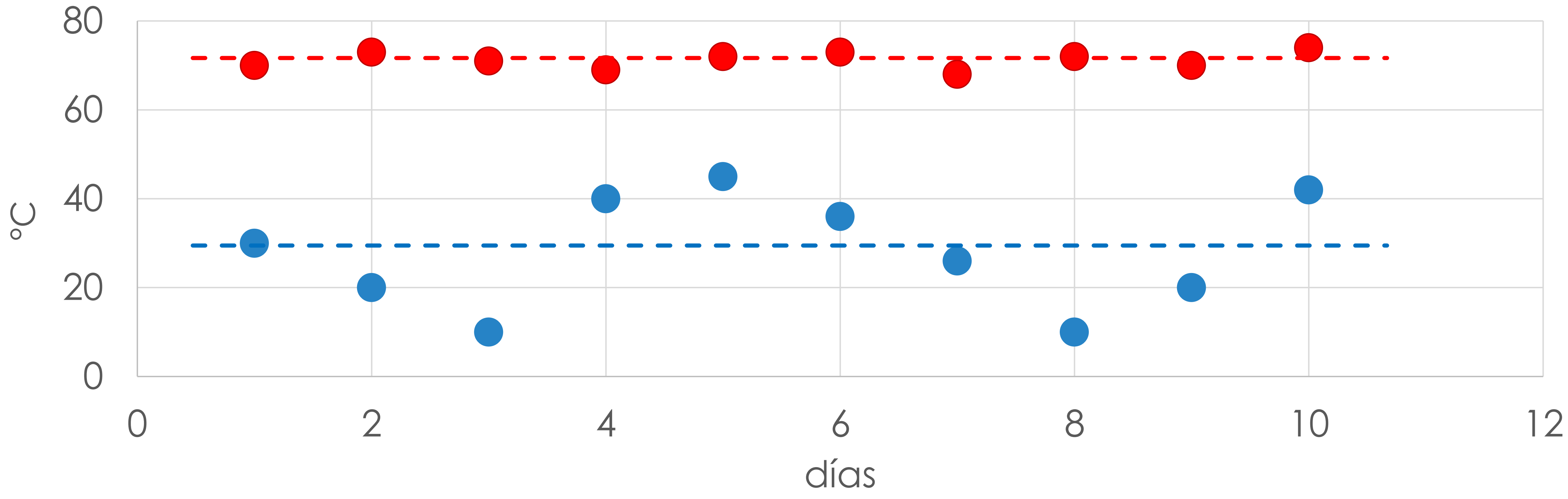
- Propiedades:

$$\mathrm{V}(X) \geq 0$$

$$\mathrm{V}(c\,X) = c^2\,\mathrm{V}(X)$$

$$\mathrm{V}\left(\sum_{j=1}^{m} X_j\right) = \sum_{j=1}^{m} \mathrm{V}(X_j)$$

Temperaturas de equipos



E(A) > E(B)   V(A) < V(B)

Otras medidas

- La desviación estándar de *X*:

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{V}(X)}$$

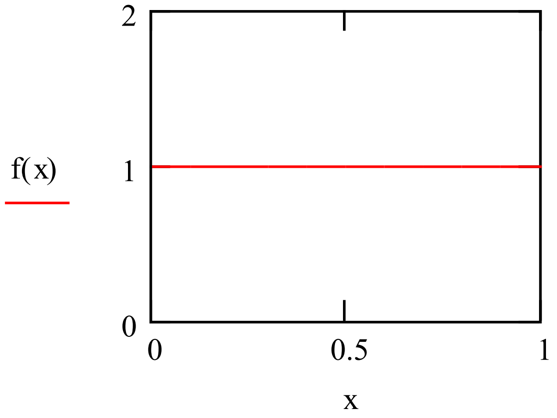
- Moda de *X*: hace máxima a $f(x)$.
- Mediana *X*: hace $F(x) = 0.5$. Significa que es igualmente probable observar valores de *X* menores que la mediana como observar valores de *X* mayores que la mediana.

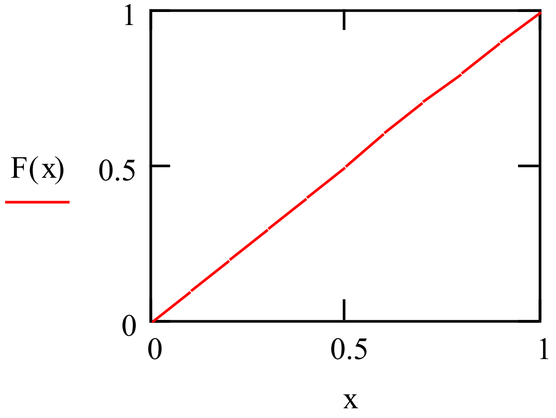
Distribuciones continuas

Distribución uniforme

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a\le x\le b\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a} & a\le x<b\\ 1 & x\ge b\end{cases}$$



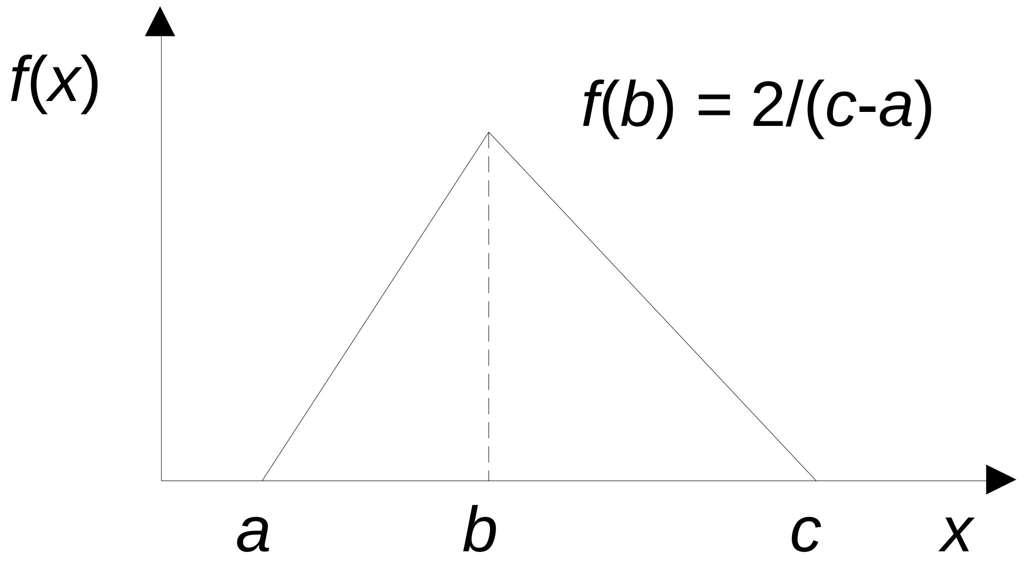


$$\mathrm{E}(X)=\frac{a+b}{2}$$

$$\mathrm{V}(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$$

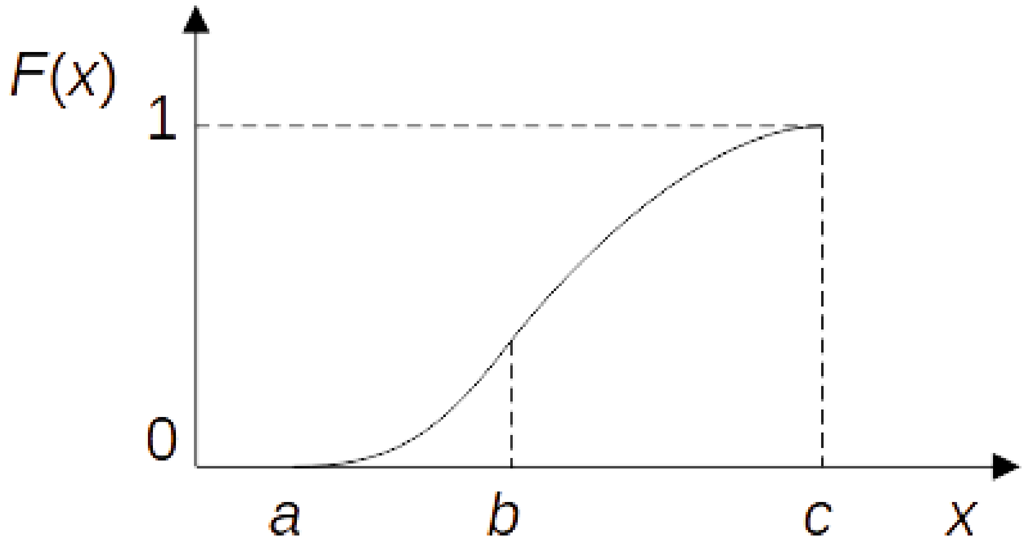
Distribución triangular

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)} & a\le x\le b\\[2ex] \dfrac{2(c-x)}{(c-b)(c-a)} & b<x\le c\\[2ex] 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$



Distribución triangular

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x\le a \\ \dfrac{(x-a)^2}{(b-a)(c-a)} & a<x\le b \\ 1-\dfrac{(c-x)^2}{(c-b)(c-a)} & b<x\le c \\ 1 & x>c \end{cases}$$



$$\mathrm{E}(X)=\frac{a+b+c}{3}$$

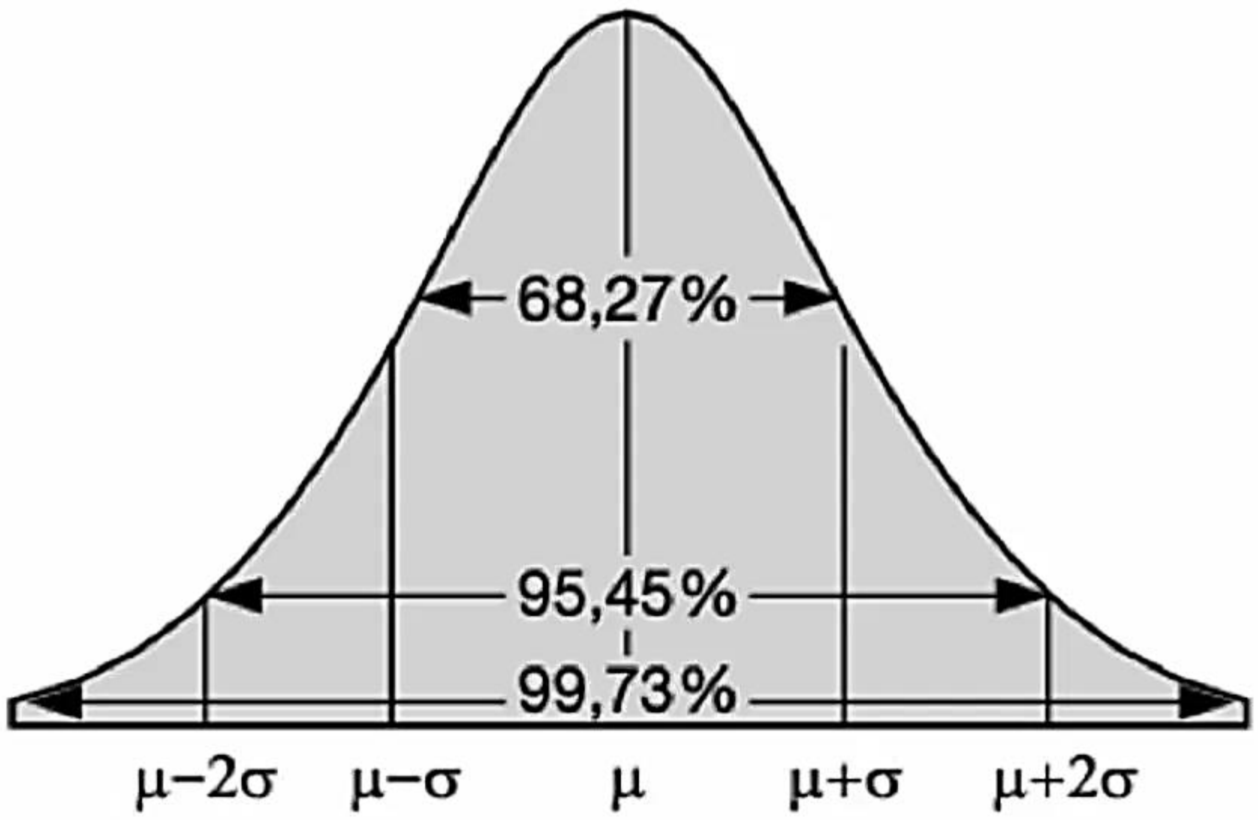
$$\mathrm{V}(X)=\frac{a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc}{18}$$

$$\text{Moda}=b=3\,\mathrm{E}(X)-(a+c)$$

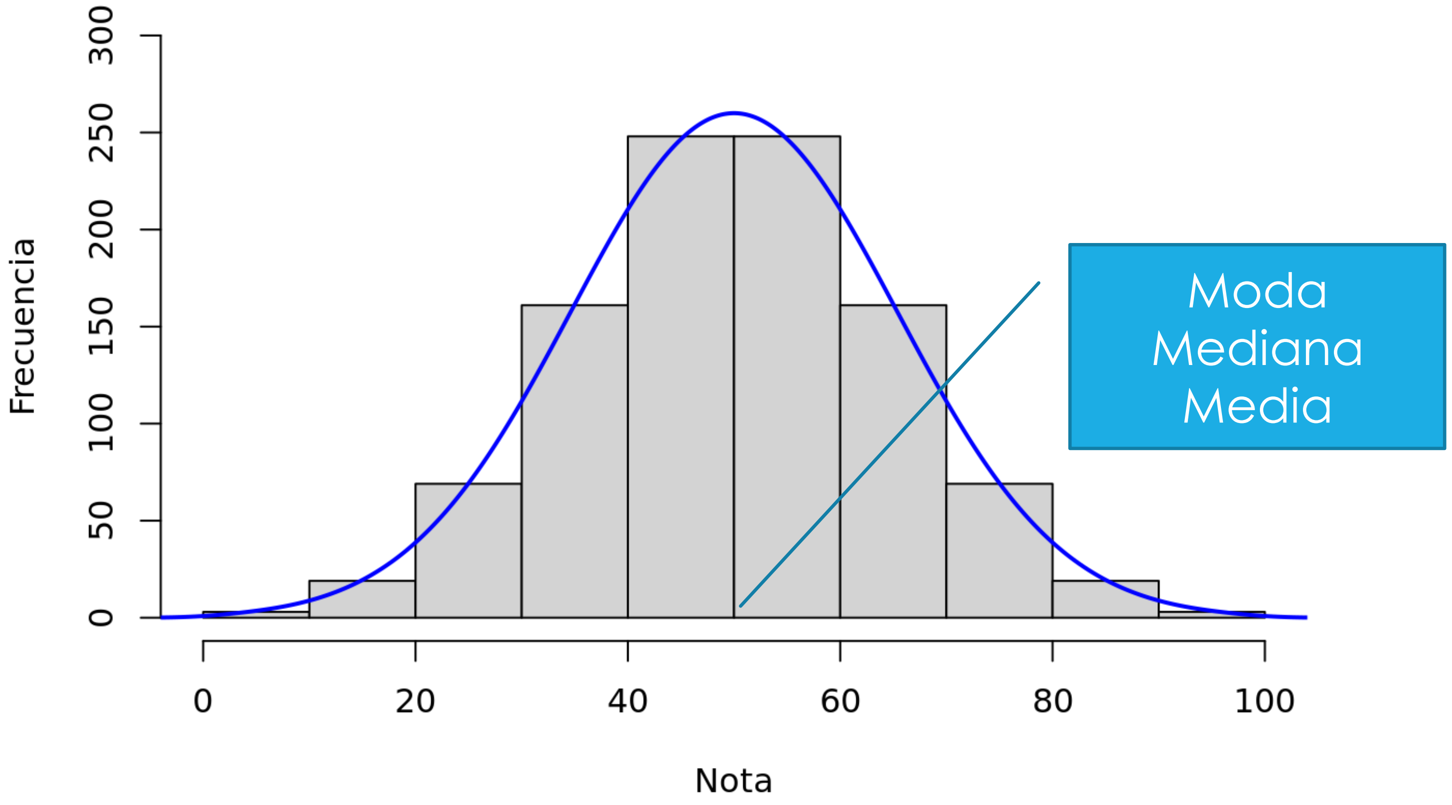
Distribución normal

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

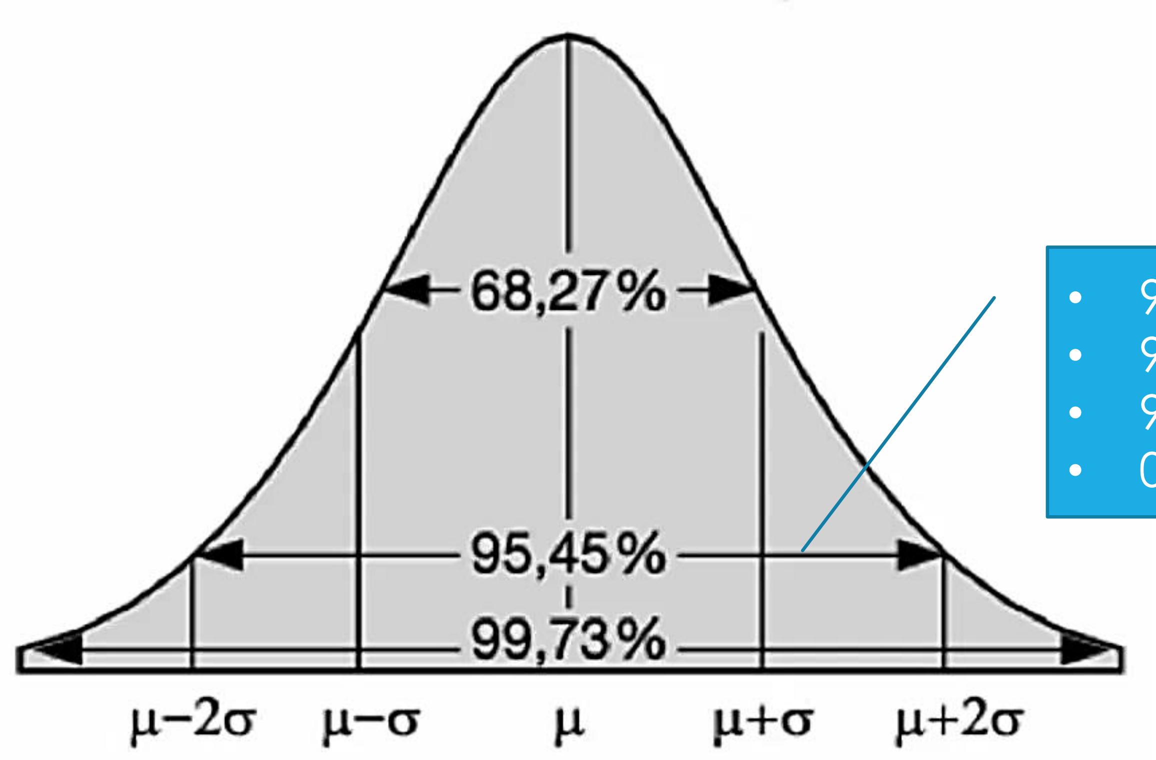
$$R_X=(-\infty,\infty)$$



Distribución normal

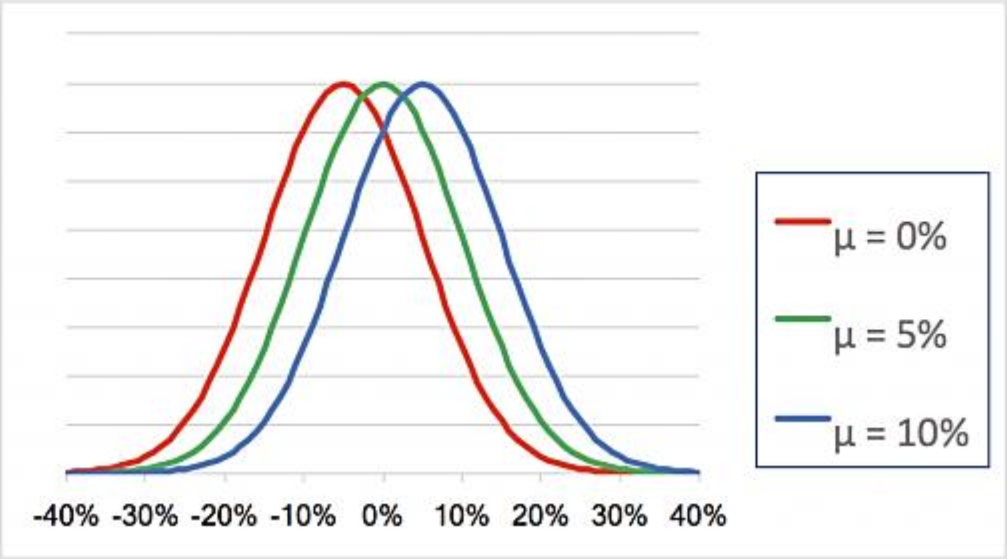


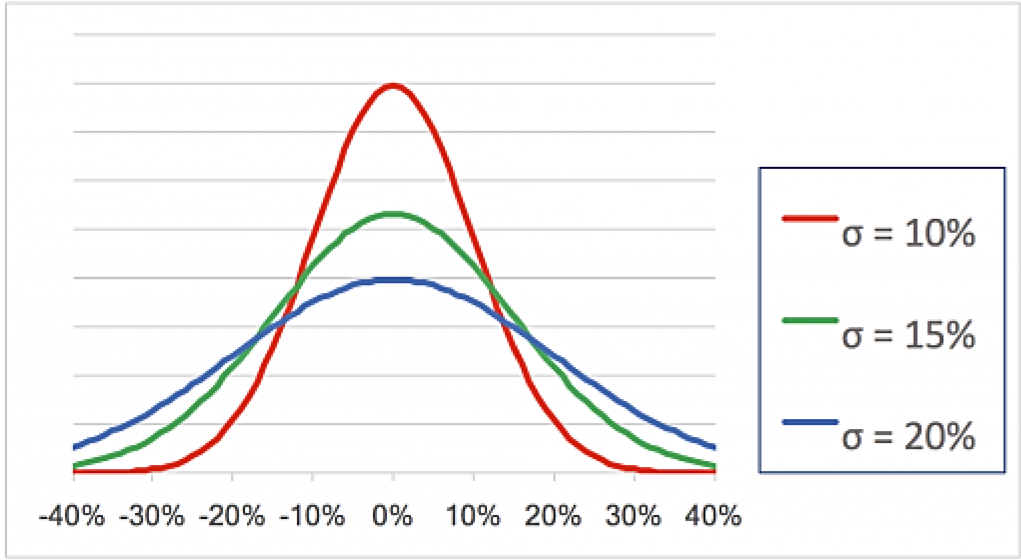
Distribución normal



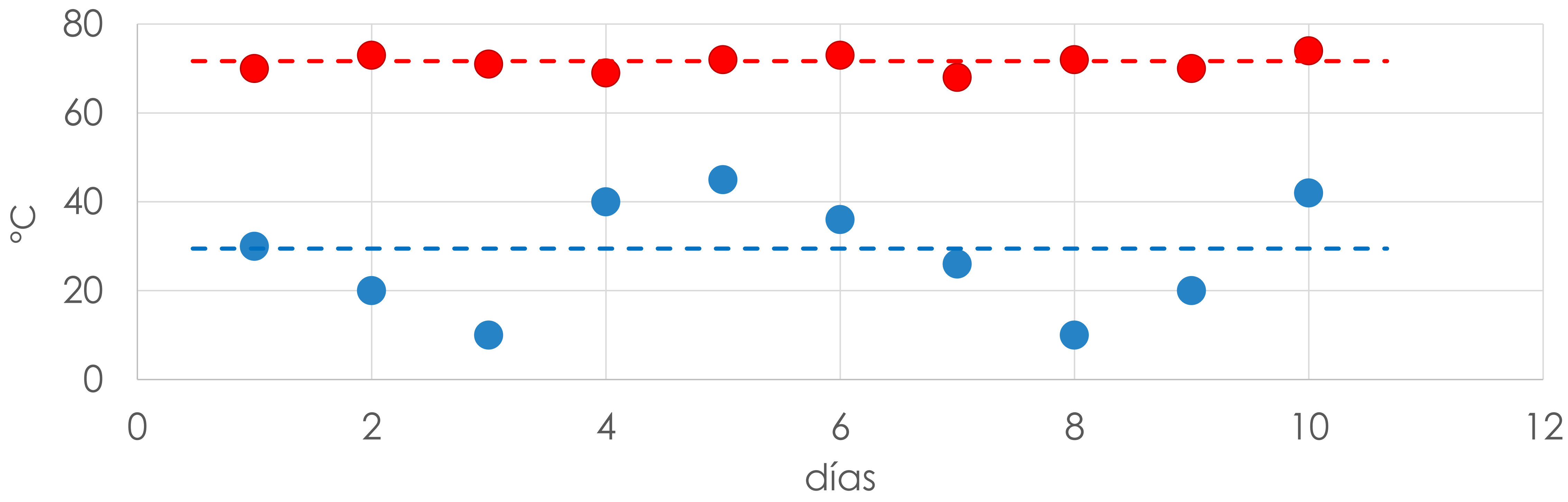
- 95.45 % del área
- 95.45 % de casos
- 95.45 % de certeza
- 0.95 de probabilidad

Distribución normal



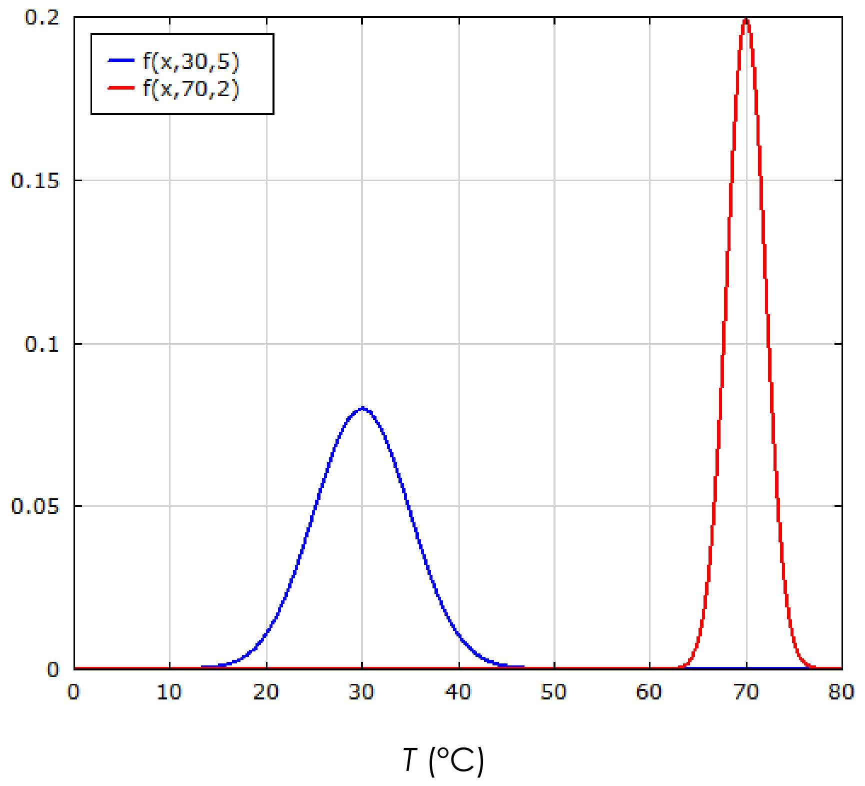


Temperaturas de equipos



E(A) > E(B)   V(A) < V(B)

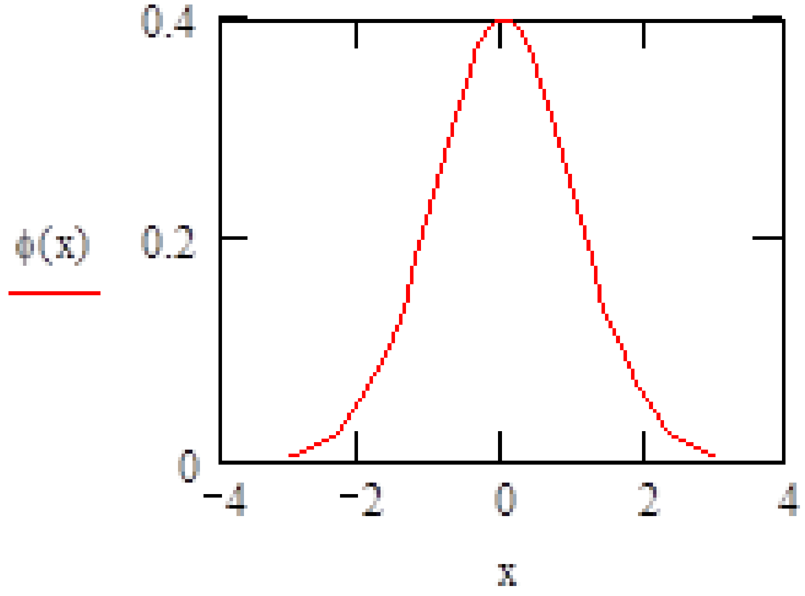
Distribución normal



Distribución normal estándar

- $\mu = 0$
- $\sigma = 1$

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right)$$

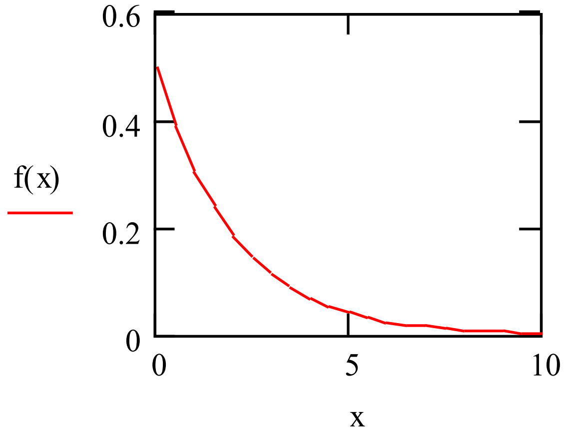


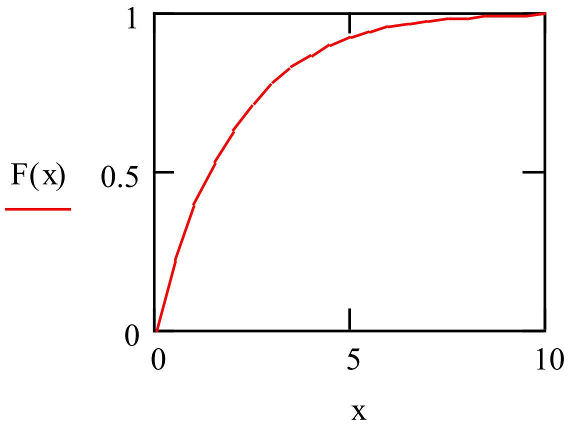
$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} \qquad x = \mu + \sigma z$$

Distribución exponencial

$$f(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \lambda \exp(-\lambda x) & x \geq 0 \end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 1-\exp(-\lambda x) & x \geq 0 \end{cases}$$





$$\mathrm{E}(X)=\frac{1}{\lambda}$$

$$\mathrm{V}(X)=\frac{1}{\lambda^2}$$

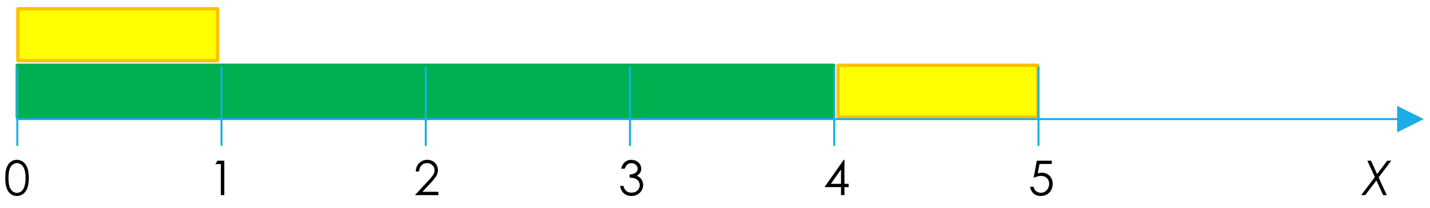
Distribución exponencial

- Falta de memoria:

$$\mathrm{P}\left(X > s+t \mid X > s\right) = \mathrm{P}\left(X > t\right)$$

- Probabilidad de que un equipo no falle entre el año 4 y el 5, no habiéndolo hecho anteriormente:
  - X es el tiempo entre fallas, λ = ½, s = 4, t = 1

$$\mathrm{P}\left(X > 5 \mid X > 4\right) = \mathrm{P}\left(X > 1\right) = 1 - \mathrm{P}\left(X \le 1\right) = 1 - \left(1 - \exp\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = 0.61$$



Distribución exponencial

Probabilidad de que un equipo falle entre el año 4 y el 5, no habiéndolo hecho anteriormente.

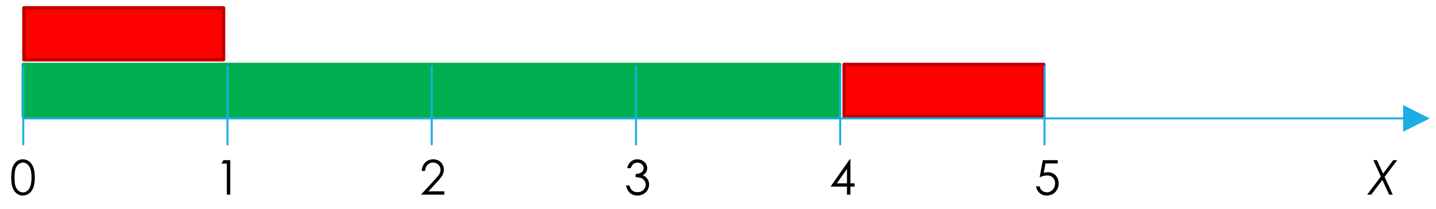
$$P\left(X \leq s+t \mid X > s\right) = ¿?$$

$$P\left(X > s+t \mid X > s\right) = P\left(X > t\right)$$

$$P\left(\overline{A} \mid B\right) = 1 - P\left(A \mid B\right)$$

$$P\left(X \leq s+t \mid X > s\right) = 1 - P\left(X > t\right)$$

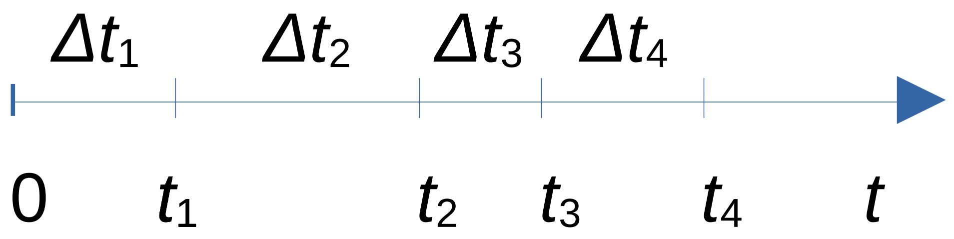
$$\Rightarrow P\left(X \leq s+t \mid X > s\right) = P\left(X \leq t\right)$$



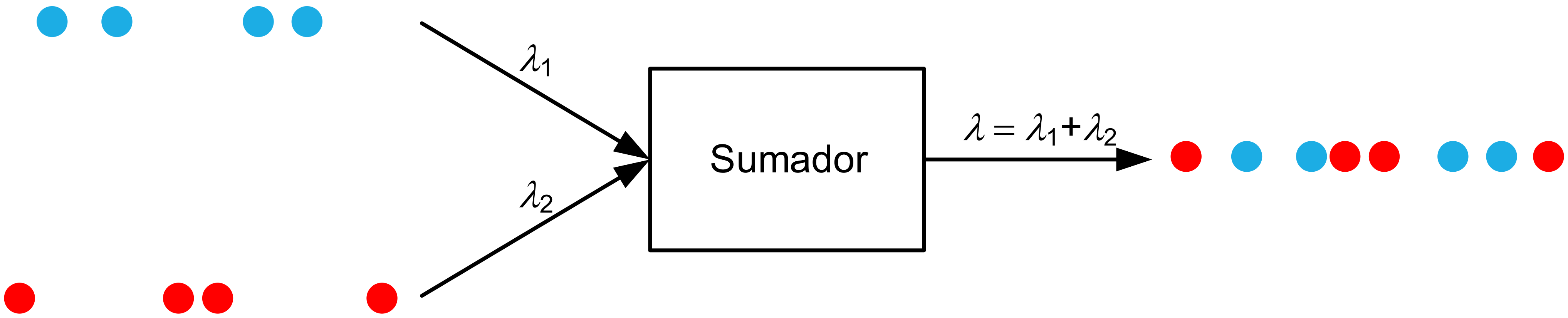
Proceso Poisson

Proceso de Poisson

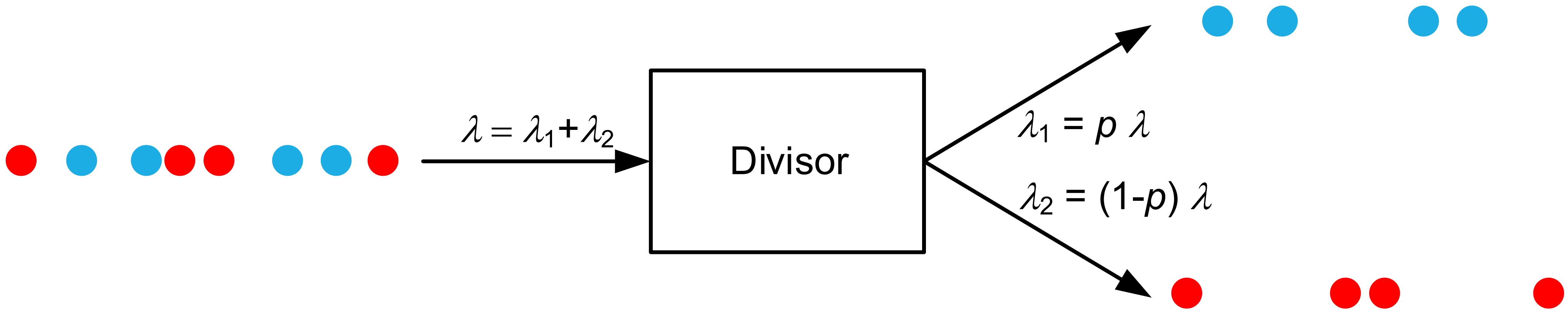
- Secuencia de eventos que cumplen con las siguientes condiciones:
  - Ocurren uno a la vez.
  - Los tiempos Δt obedecen una distribución exponencial.
  - La velocidad de ocurrencia de los eventos es λ.
  - El tiempo medio entre eventos es $1/\lambda$.



Sumador



Divisor



$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$
Divisor
$\lambda_1 = p\ \lambda$
$\lambda_2 = (1\text{-}p)\ \lambda$

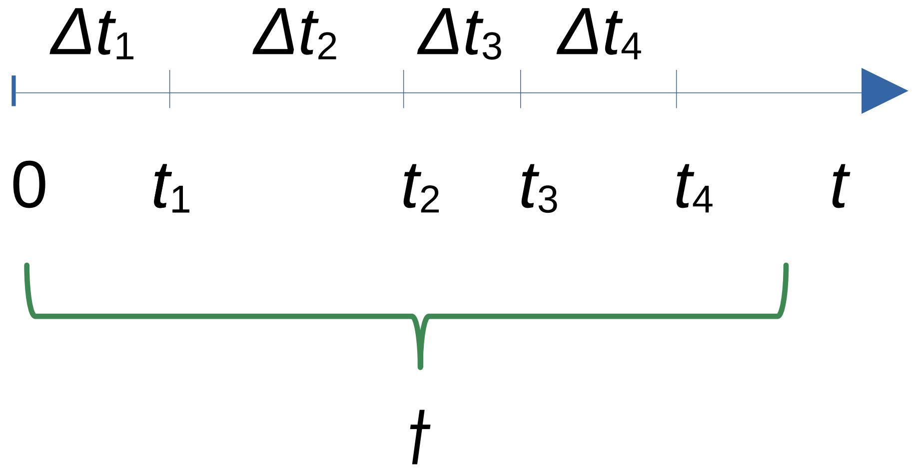
Distribución de Poisson

- X es la cantidad de eventos durante un tiempo t.
- X = N(t)

$$P\left(N(t)=x\right)=\frac{\alpha^{x}\exp(-\alpha)}{x!}\qquad t\geq 0, x=0,1,2,\ldots$$

$$\alpha=\lambda t$$

$$E\left(N(t)\right)=V\left(N(t)\right)=\alpha$$



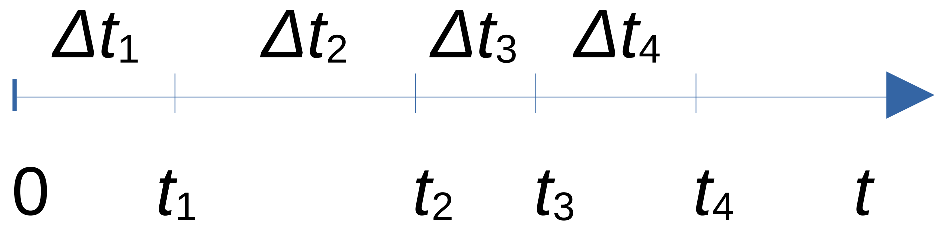
Cajero

- En un cajero, los clientes arriban cada 10 min en promedio. Calcular la probabilidad de que, en 15 min, arriben exactamente 5 clientes.
- t = 15 min, λ = 1/10 min^{-1} $\rightarrow$ α = 1/10 15 = 1.5
- x = 5
- P(N(15) = 5) = 0.01412

Distribución de Erlang de orden *k*

- *X* es el tiempo de ocurrencia t_k del evento *k*.

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_k$$



$$g\left(x_j\right) = \begin{cases} 0 & x_j \leq 0 \\ \lambda \exp\left(-\lambda\, x_j\right) & x_j > 0 \end{cases}$$

$$\lambda = k\,\theta$$

Distribución de Erlang de orden *k*

$$\mathrm{E}(X)=\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}+\ldots+\frac{1}{\lambda}=\frac{k}{\lambda}=\frac{1}{\theta}$$

$$Moda=\frac{k-1}{\lambda}=\frac{k-1}{k\,\theta}$$

$$\mathrm{V}(X)=\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^2}+\ldots+\frac{1}{\lambda^2}=\frac{k}{\lambda^2}=\frac{1}{k\,\theta^2}$$

$$F(x)=\begin{cases}1-\exp(-\lambda\,x)\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(\lambda\,x)^i}{i!} & x>0\\ 0 & x\leq 0\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}1-\exp(-k\,\theta\,x)\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(k\,\theta\,x)^i}{i!} & x>0\\ 0 & x\leq 0\end{cases}$$

Examen médico

- Un examen médico está compuesto por tres etapas. La duración de cada una de ellas está exponencialmente distribuida con tiempo medio de 20 min. Determine la probabilidad de que el examen tome 50 min o menos.
- $k = 3$, $\lambda = 1/20\ \mathrm{min}^{-1}$, $X = t_4$
- $\mathrm{P}(X \leq 50) = F(50) = 0.457$