Distribuciones probabilísticas
Parte I

Enrique E. Tarifa, Facultad de Ingeniería, UNJu

Probabilidad y estadística

Probabilidad y estadística

- Repaso de la materia "Probabilidades y estadística"
- 2° año
- Anual
- Programa disponible en www.fi.unju.edu.ar

Probabilidad

Probabilidad

- Probabilidad: $P \in [0,1]$
- Regla de Laplace:
  - Suceso *A* imposible, $P(A) = 0$.
  - Suceso *A* seguro, $P(A) = 1$.
  - Si todos los sucesos son equiprobables:

$$P(A) = \frac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}}$$

P(3) = 1/6

Definiciones

- Experimento: Un proceso cuyo resultado no es conocido con certeza.
- Espacio muestral S: Conjunto de resultados posibles.
- Puntos muestrales: Los resultados.
- Lanzar una moneda $\rightarrow$ S = {Cara, Seca}
- Cursada de una materia $\rightarrow$ S = {regular, desaprobado, ausente}

Definiciones

- Variable aleatoria X: Es una función o una regla que asigna un número real x (positivo o negativo) a cada punto muestral de S.
- Rango de X, R_X: Es el conjunto de valores que puede adoptar la variable X.
- Si Cara $\rightarrow$ 0 y Seca $\rightarrow$ 1, $R_X = \{0,1\}$.
- Estado académico, $R_X = \{1,2,3\}$.

Variables aleatorias discretas

Variables aleatorias discretas

- Variable aleatoria discreta *X*: Sólo puede adoptar una cantidad contable de valores, $R_X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$.
- Cantidad de clientes que atiende una oficina en una semana,

  $R_X = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Función masa de probabilidad

- Función masa de probabilidad de *X* (*probability mass function —pmf—*).
- p(x) = P(*X* = x)
- Propiedades:

$$p(x_i) \geq 0 \quad \forall i$$

$$\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1$$

Para el lanzamiento de un dado:
p(1) = P(*X* = 1) = 1/6

$R_X = \{1,2,3,4,5,6\}$
p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) =
1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1

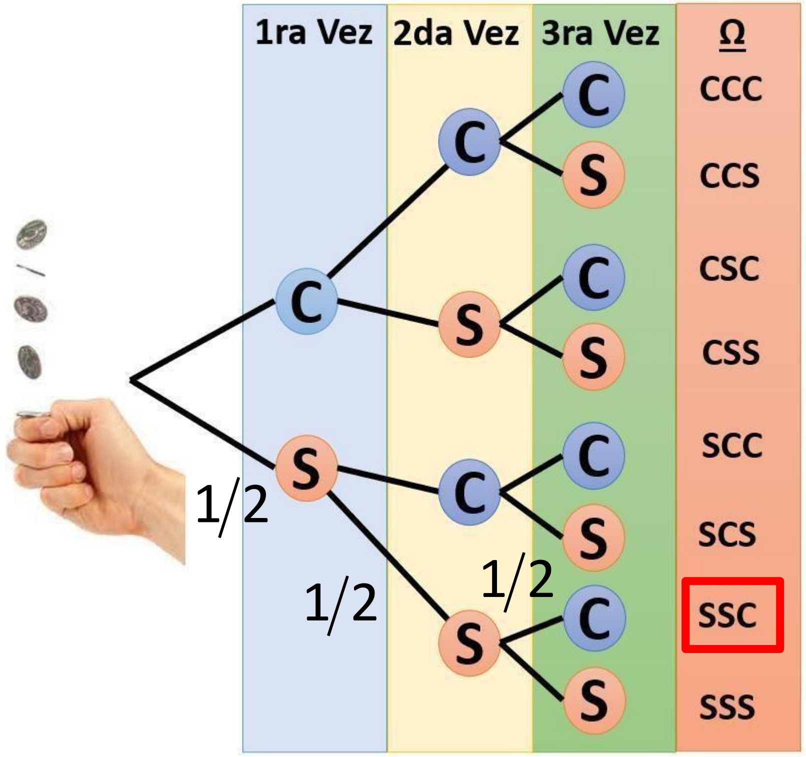
Distribución de probabilidad

- Distribución de probabilidad de X: $(x_i, p(x_i))$ para todo i.
- Para el lanzamiento de una moneda: {(0,0.5),(1,0.5)}
- Tabla: i, x_i y $p(x_i)$

i	x	p
1	0	0.5
2	1	0.5

Árbol de probabilidades

- También llamado diagrama de árbol.
- X: Cantidad de lanzamientos de una moneda hasta que salga Cara.
- $p(3) = \mathrm{P}(X = 3) = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0.125$



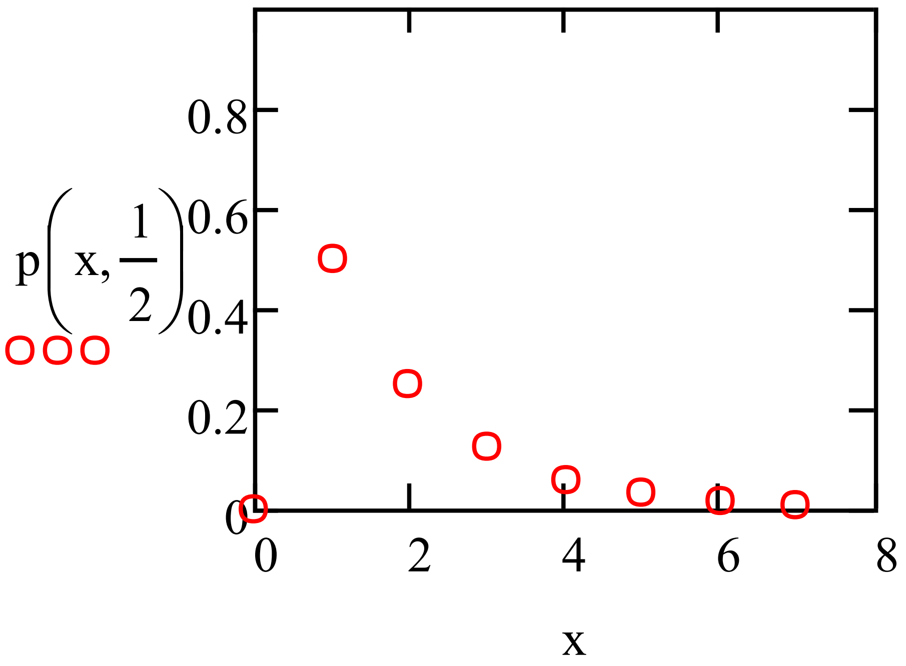
$2 \times 2 \times 2 = 8$

Lanzamientos de una moneda

X: Cantidad de lanzamientos de una moneda hasta que salga Cara.

i	x	*p*(x)
1	1	½
2	2	$\frac{1}{2}^2$
3	3	$\frac{1}{2}^3$
…	…	…
n	*n*	$\frac{1}{2}^n$

$$p(x) = \frac{1}{2^x}$$

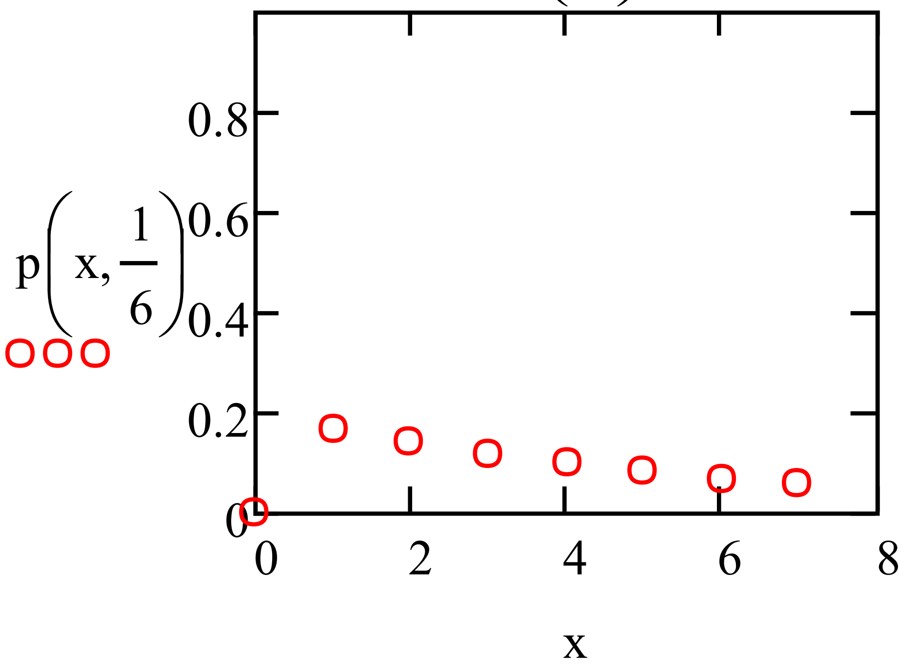


Lanzamientos de un dado

X: Cantidad de lanzamientos de un dado hasta que salga 1.

i	x	*p*(x)
1	1	1/6
2	2	5/6 1/6
3	3	$(5/6)^2$ 1/6
…	…	
n	*n*	$(5/6)^{n-1}$ 1/6

$$p(x) = \left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} \frac{1}{6}$$



Función de distribución acumulada

- La función de distribución acumulada (*cumulative distribution function —cdf—*), *F*(x):

$$F(x) = \mathrm{P}(X \le x)$$

$$F(x) = \sum_{\forall x_i \le x} p(x_i)$$

- Propiedades:
  - Debe ser no decreciente; esto es, si $a < b$, $F(a) \le F(b)$.

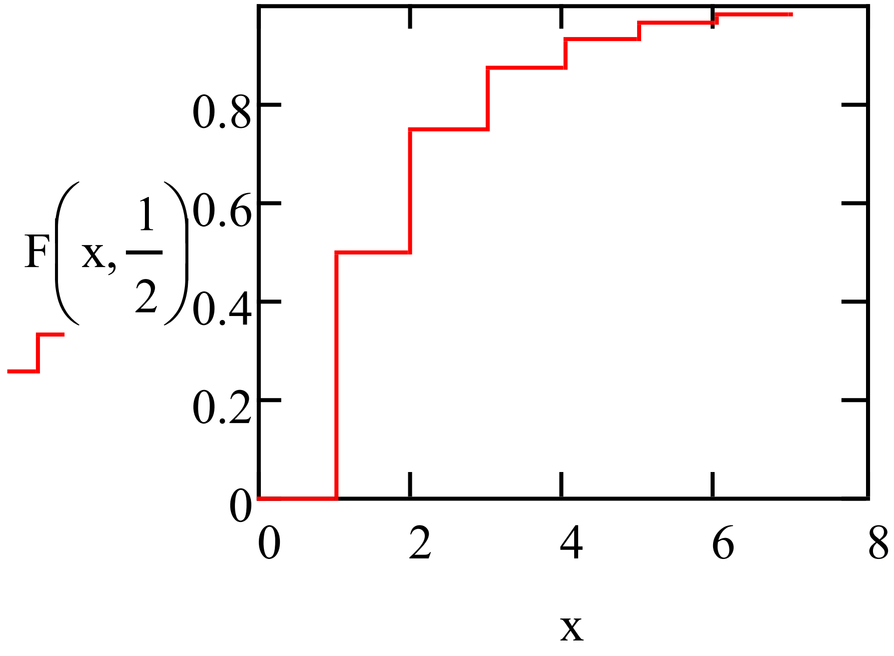
$$\lim_{x \to x_n} F(x) = 1 \qquad \lim_{x \to x_1} F(x) = p(x_1) \qquad F(x_i) = F(x_{i-1}) + p(x_i)$$

Lanzamientos de una moneda

X: Cantidad de lanzamientos de una moneda hasta que salga Cara.

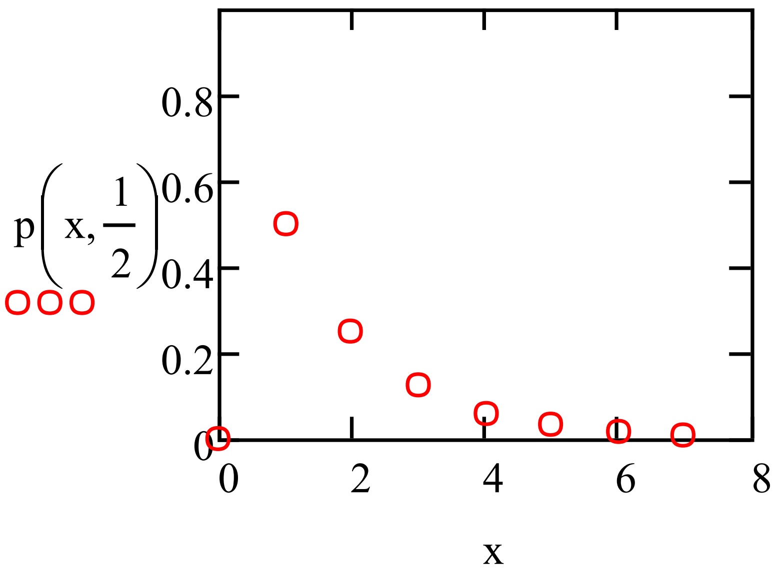
i	x	*p*(x)	*F*(x)
1	1	½	½
2	2	½^2	½+½^2
3	3	½^3	½+½^2+½^3
…	…	…	
n	*n*	½^n	½+½^2+½^3+…+½^n

$$F(x) = 1 - \frac{1}{2^x}$$



Lanzamientos de una moneda

Distribución de probabilidad



Distribución acumulada

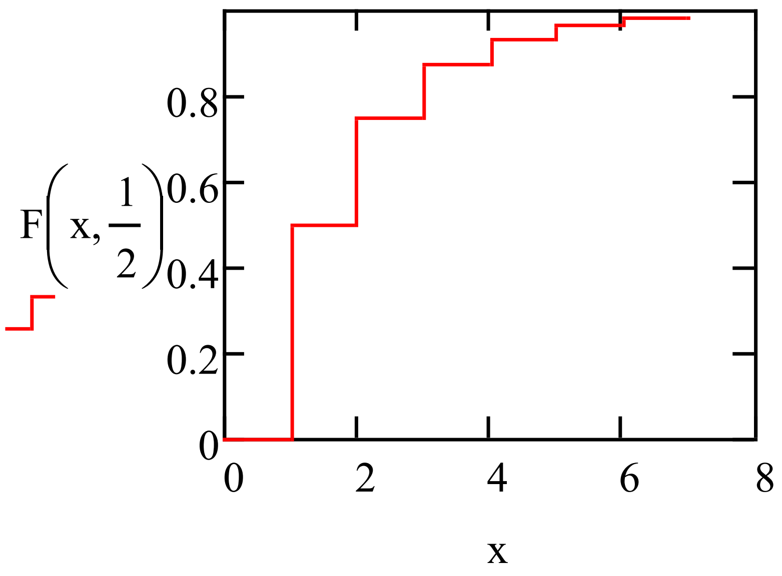


Gráfico para “lanzar la moneda hasta que salga cara”.

Probabilidad de un intervalo

- Probabilidad de un intervalo (*a*,*b*]:

$$\mathrm{P}\left(a < X \leq b\right) = F\left(b\right) - F\left(a\right) \quad \forall a < b$$

- La probabilidad de que salga Cara entre el 3° y 5° lanzamiento:

$$F\left(5\right) - F\left(2\right) = \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^3} = \frac{7}{32}$$

Valor esperado

- Valor esperado o promedio de *X*:

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, p(x_i)$$

- Propiedades:

$$\mathrm{E}(c\,X) = c\,\mathrm{E}(X)$$

$$\mathrm{E}\left(\sum_{j=1}^{m} c_j \, X_j\right) = \sum_{j=1}^{m} c_j \, \mathrm{E}(X_j)$$

Varianza

- La varianza de *X*:

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}\left(\left(X-E(X)\right)^2\right)$$

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}\left(X^2\right)-\mathrm{E}(X)^2$$

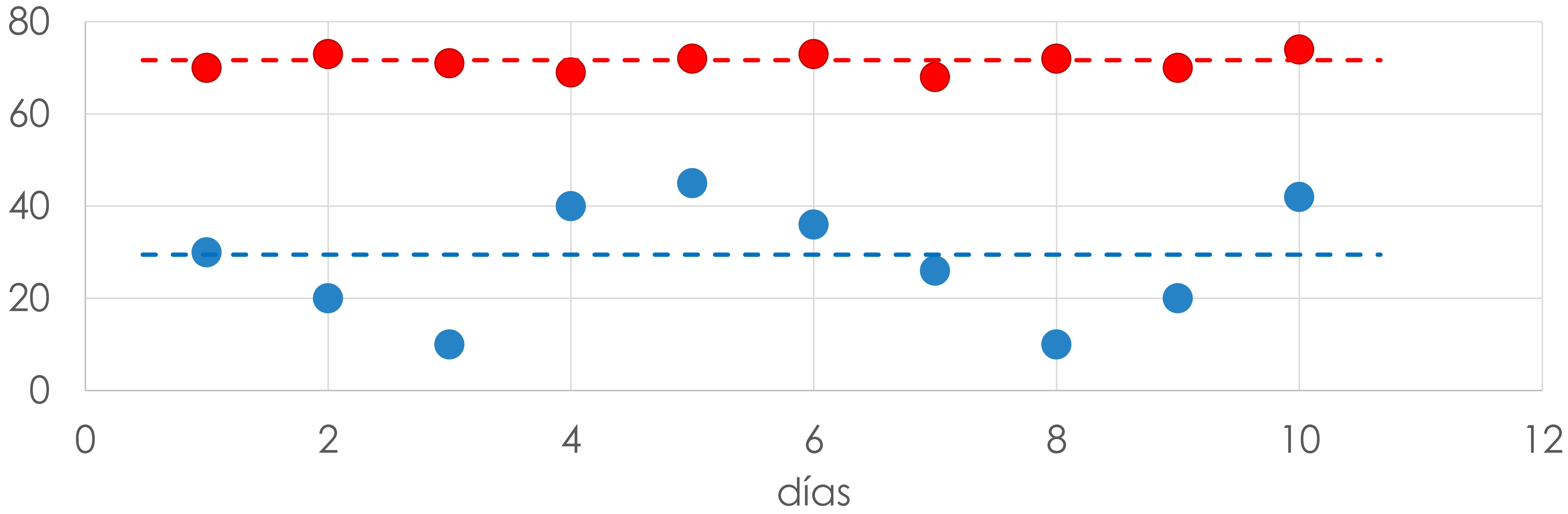
- Propiedades:

$$\mathrm{V}(X)\geq 0$$

$$\mathrm{V}(c\,X)=c^2\,\mathrm{V}(X)$$

$$\mathrm{V}\left(\sum_{j=1}^{m}X_j\right)=\sum_{j=1}^{m}\mathrm{V}(X_j)$$

Cantidades de productos vendidos



$E(A) > E(B)$ $\quad\quad V(A) < V(B)$

Otras medidas

- La desviación estándar de X:

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{V}(X)}$$

- Moda de X: Hace máxima a $p(x)$.
- Mediana X: Hace $F(x) = 0.5$. Significa que es igualmente probable observar valores de X menores que la mediana como observar valores de X mayores que la mediana.

Proceso Bernoulli

Proceso de Bernoulli

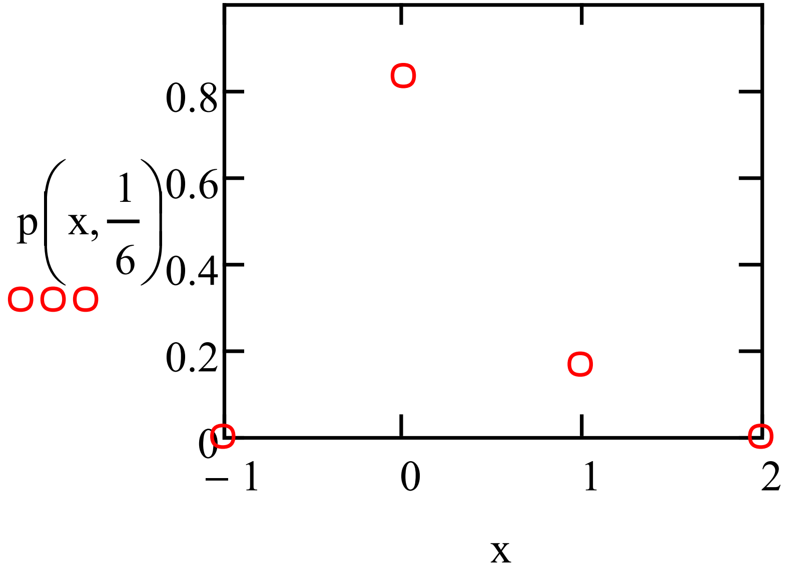
- Es un experimento consistente de *n* ensayos independientes, cada uno de los cuales puede ser un éxito o un fracaso. La probabilidad de éxito permanece constante de ensayo a ensayo y es igual a *p*.
- Ejemplos:
  - Lanzar una moneda y ver si sale Cara o no, $n = 1, p = \frac{1}{2}$.
  - Lanzar un dado hasta que salga el 1, $n \geq 1, p = \frac{1}{6}$.

Distribución de Bernoulli

- X es el resultado de un ensayo.
- S = {fracaso, éxito}
- $R_X = \{0,1\}$

$p = 1/6$

$$p(x) = \begin{cases} p & x = 1 \\ 1 - p = q & x = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

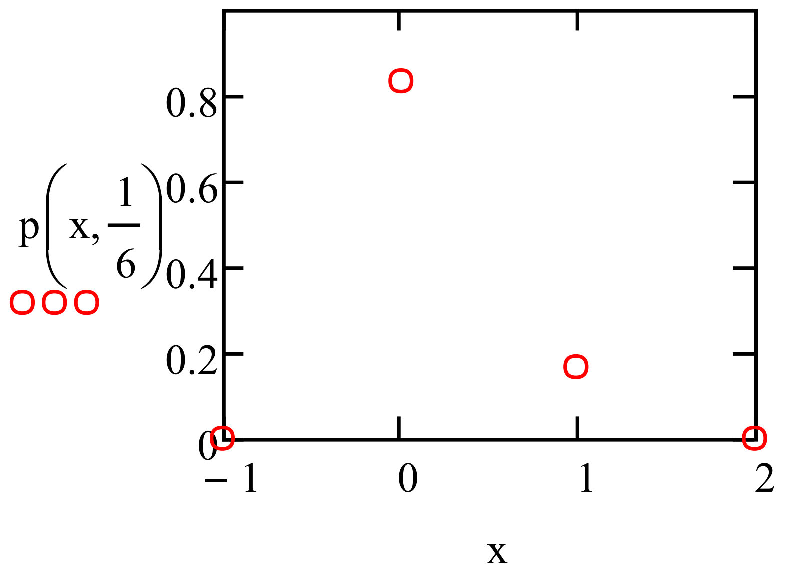


$$\mathrm{E}(X) = 0q + 1p = p$$

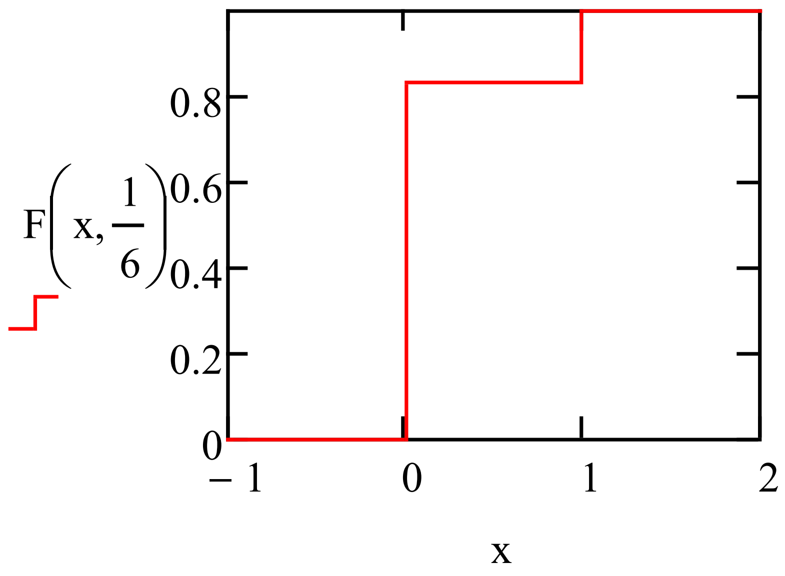
$$\mathrm{V}(X) = \left(0^2 q + 1^2 p\right) - p^2 = p(1 - p) = pq$$

Distribución de Bernoulli

$p(x)$



$F(x)$



Distribución binomial

- X es el número de éxitos en un proceso Bernoulli.
- $S = \{0,1,2,\ldots,n\}$
- $R_X = \{0,1,2,\ldots,n\}$

1	4	5	1	2

$n = 5$, $p = 1/6$, $X = 2$

$$p(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} & x = 0,1,2,\ldots,n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

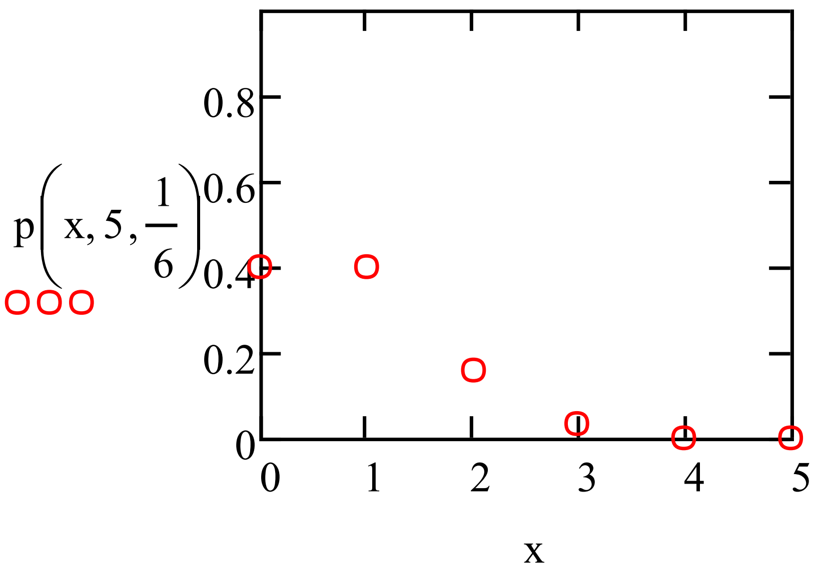
$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

$$E(X) = p + p + \ldots + p = n\,p$$

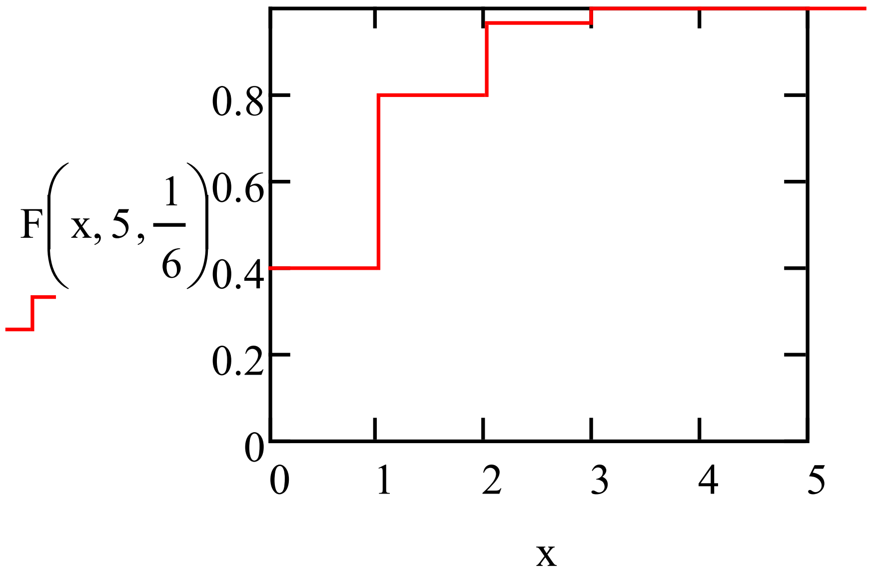
$$V(X) = p\,q + p\,q + \ldots + p\,q = n\,p\,q$$

Distribución binomial

$p(x)$

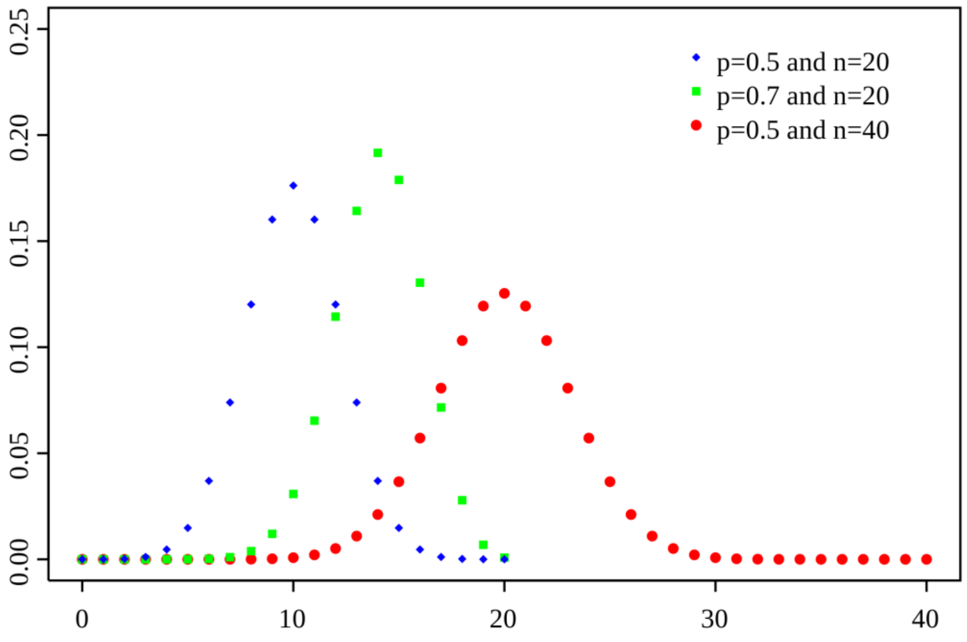


$F(x)$

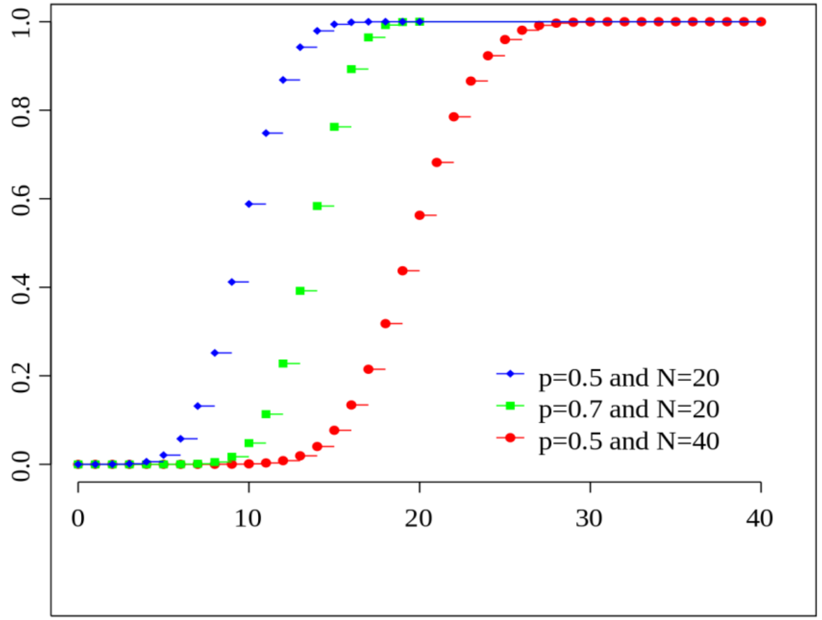


Distribución binomial

$p(x)$



$F(x)$



Fábrica de chips

Una fábrica de chips para computadoras tiene un promedio de producción defectuosa del 2 %. Todos los días se toma una muestra de 50 chips en forma aleatoria. Si la cantidad de chips defectuosos en la muestra es mayor que dos, el proceso se detiene para su revisión completa. Determine la probabilidad de detención del proceso debido a este esquema de control.

Fábrica de chips

- X es la cantidad de chips defectuosos.
- "Éxito": Un chip defectuoso.
- n = 50
- p = 0.02
- P(detención) = P(X > 2)
- P(X > 2) = 1-P($X \leq$ 2)

$$\mathrm{P}(X \leq 2) = \sum_{x=0}^{2} \binom{50}{x} 0.02^{x}\, 0.98^{50-x} = 0.92$$

$$\mathrm{P}(X > 2) = 1 - 0.92 = 0.08$$

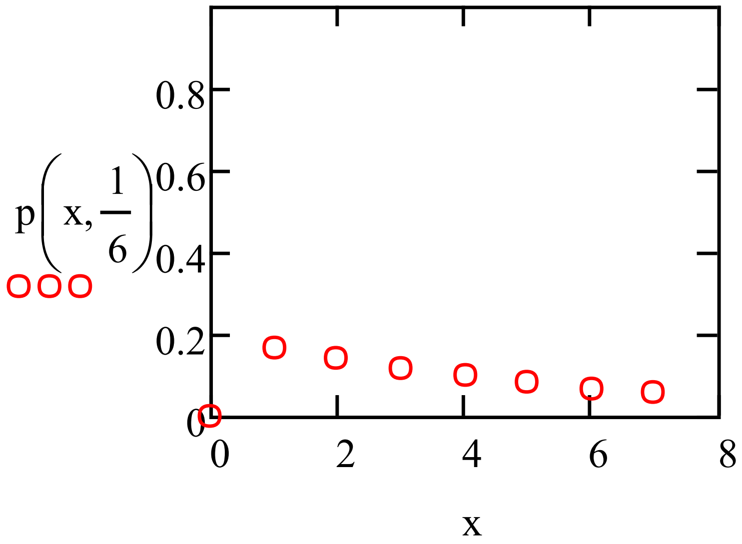
Distribución geométrica

- X es el orden del primer éxito en un proceso Bernoulli.
- $S = \{1,2,3,\ldots\}$
- $R_X = \{1,2,3,\ldots\}$

4	6	3	1	...

$p = 1/6$, $X = 4$

$$p(x) = \begin{cases} q^{x-1}\,p & x = 1,2,\ldots \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

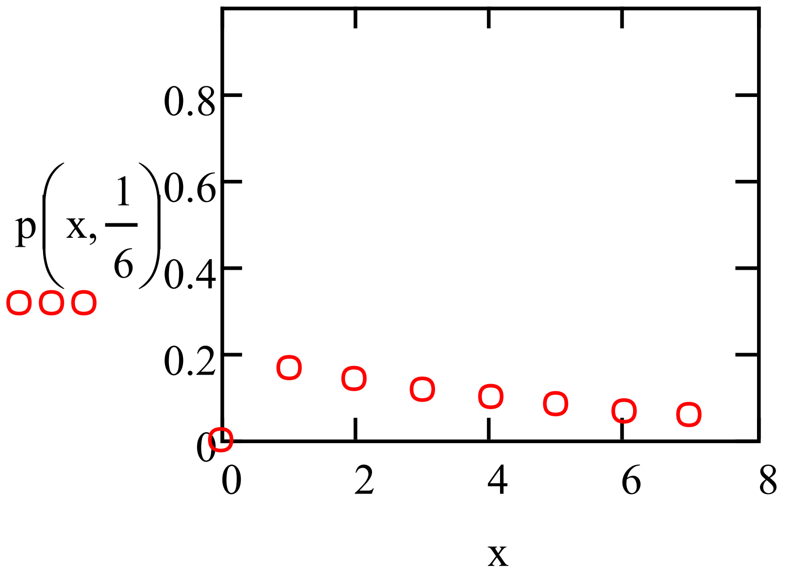


$$E(X) = \frac{1}{p}$$

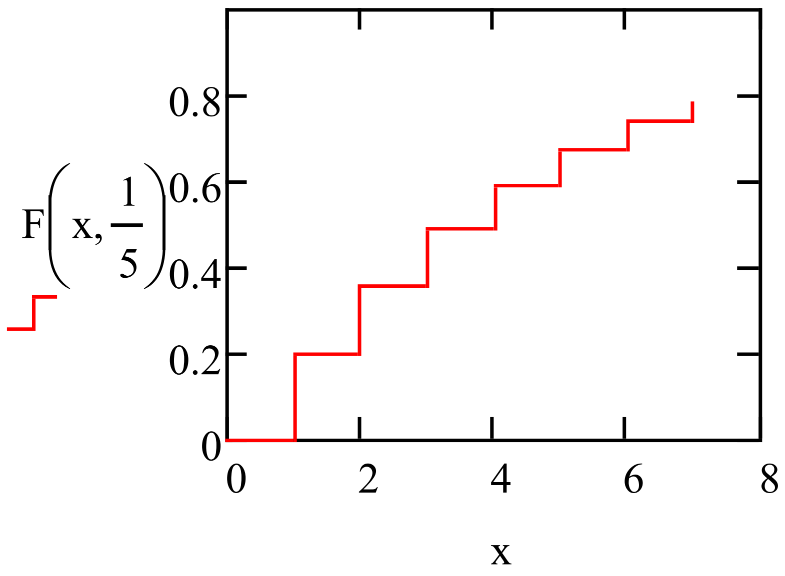
$$V(X) = \frac{q}{p^2}$$

Distribución geométrica

$p(x)$



$F(x)$



Fábrica de impresoras

- Una fábrica de impresoras rechaza el 40 % en la estación de inspección. Determine la probabilidad de que la primera impresora aceptada sea la tercera en ser inspeccionada.
- “Éxito”: impresora aceptada.
- $q = 0.4$ y $p = 0.6$
- $p(3) = 0.4^2\, 0.6 = 0.096$