Métodos de Simulación

Distribuciones probabilísticas
Parte I

Enrique E. Tarifa, Facultad de Ingeniería, UNJu

Probabilidad y estadística

Probabilidad y estadística

- Repaso de la materia “Probabilidades y estadística”
- 2º año
- Anual
- Programa disponible en www.fi.unju.edu.ar

Probabilidad

Probabilidad

- Probabilidad: $P \in [0,1]$
- Regla de Laplace:
  - Suceso *A* imposible, $P(A) = 0$.
  - Suceso *A* seguro, $P(A) = 1$.
  - Si todos los sucesos son equiprobables:

$$P(A) = \frac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}}$$

$P(3) = 1/6$

Definiciones

- Experimento: Un proceso cuyo resultado no es conocido con certeza.
- Espacio muestral S: Conjunto de resultados posibles.
- Puntos muestrales: Los resultados.
- Lanzar una moneda $\rightarrow$ S = {Cara, Seca}
- Cursada de una materia $\rightarrow$ S = {regular, desaprobado, ausente}

Definiciones

- Variable aleatoria X: Es una función o una regla que asigna un número real x (positivo o negativo) a cada punto muestral de S.
- Rango de X, R_X: Es el conjunto de valores que puede adoptar la variable X.
- Si Cara $\rightarrow$ 0 y Seca $\rightarrow$ 1, $R_X = \{0,1\}$.
- Estado académico, $R_X = \{1,2,3\}$.

Variables aleatorias discretas

Variables aleatorias discretas

- Variable aleatoria discreta X: Sólo puede adoptar una cantidad contable de valores, $R_X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$.
- Cantidad de clientes que atiende una oficina en una semana,

  $R_X = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Variables aleatorias discretas

- Función masa de probabilidad de X (*probability mass function —pmf—*).
- $p(x) = P(X = x)$
- Propiedades:

$$p(x_i) \geq 0 \quad \forall i$$

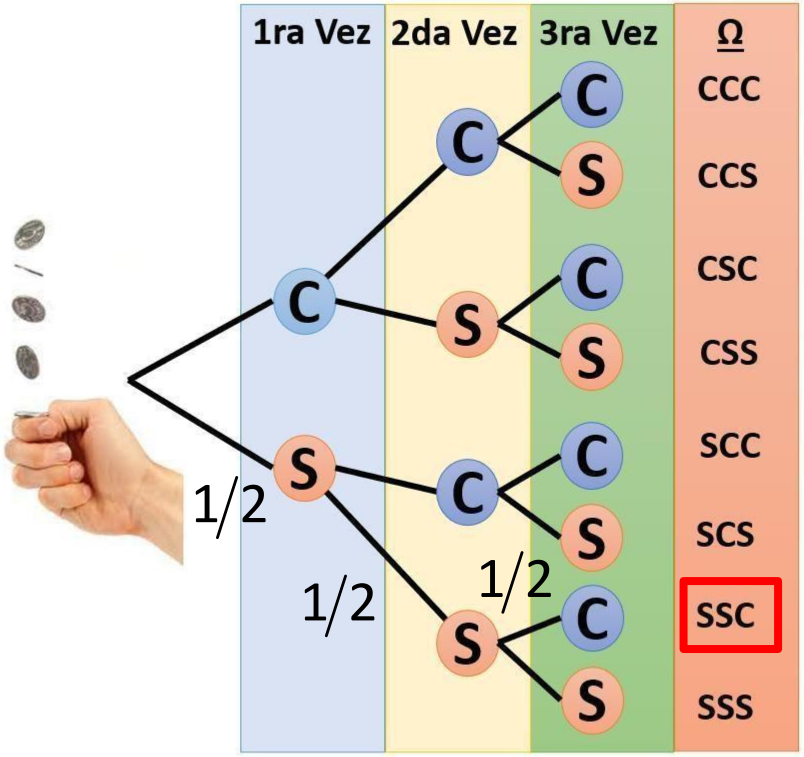
$$\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1$$

Variables aleatorias discretas

- Distribución de probabilidad de X: $(x_i, p(x_i))$ para todo i.
- Para el lanzamiento de una moneda: {(0,0.5),(1,0.5)}
- Tabla: i, x_i y $p(x_i)$

Árbol de probabilidades

- También llamado diagrama de árbol.
- X: Cantidad de lanzamientos de una moneda hasta que salga Cara.
- $p(3) = \mathrm{P}(X = 3) = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0.125$



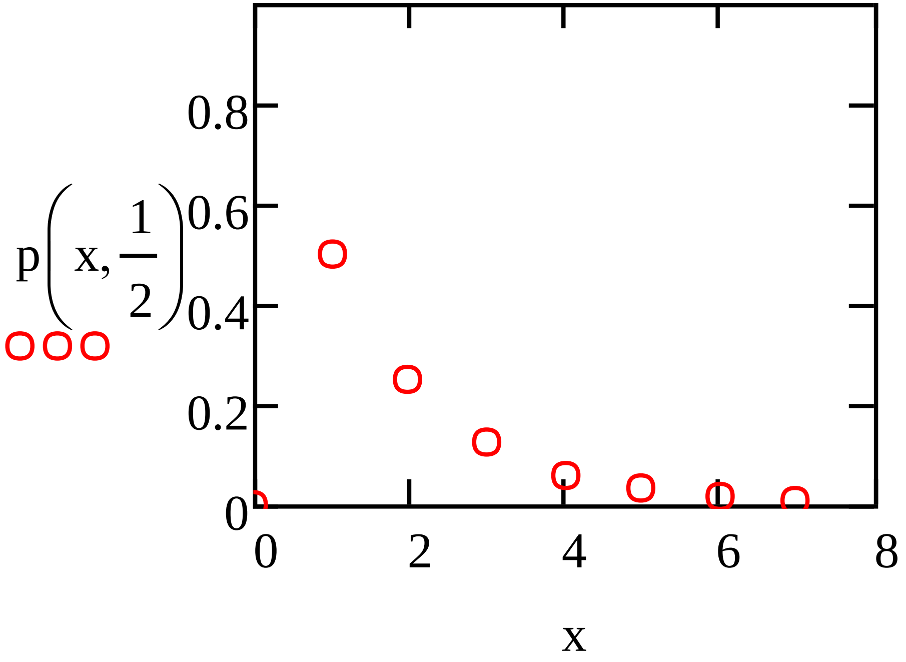
$$2 \times 2 \times 2 = 8$$

Variables aleatorias discretas

X: Cantidad de lanzamientos de una moneda hasta que salga Cara.

i	x	*p*(x)
1	1	½
2	2	$½^2$
3	3	$½^3$
…	…	…
n	*n*	$½^n$

$$p(x) = \frac{1}{2^x}$$

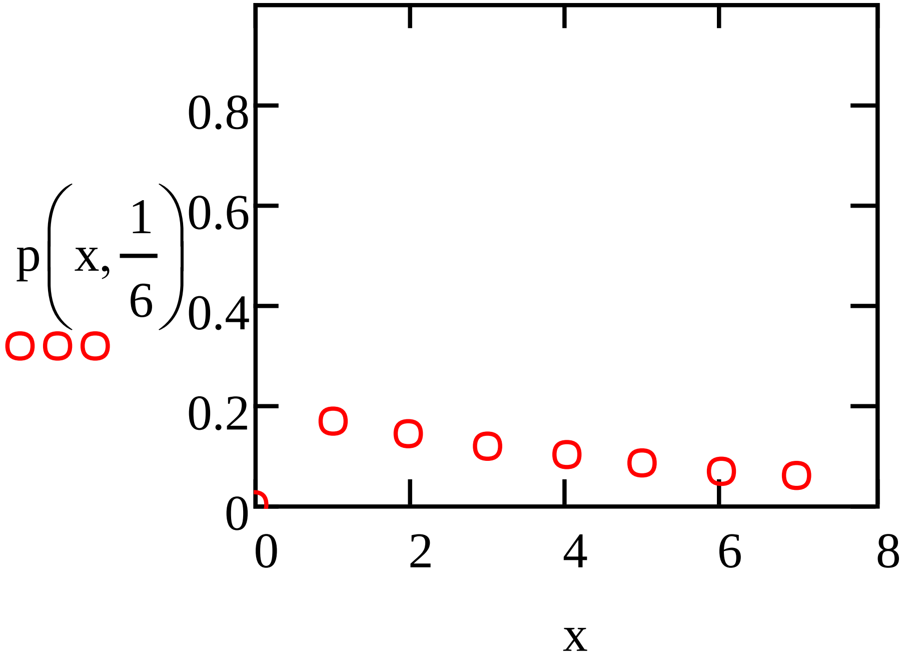


Variables aleatorias discretas

X: Cantidad de lanzamientos de un dado hasta que salga 1.

i	**x**	***p*(x)**
1	1	1/6
2	2	5/6 1/6
3	3	$(5/6)^2$ 1/6
…	…	
n	*n*	$(5/6)^{n-1}$ 1/6

$$p(x) = \left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} \frac{1}{6}$$



Variables aleatorias discretas

- La función de distribución acumulada (*cumulative distribution function —cdf—*), *F*(x):

$$F(x) = \mathrm{P}(X \le x)$$

$$F(x) = \sum_{\forall x_i \le x} p(x_i)$$

- Propiedades:
  - Debe ser no decreciente; esto es, si *a* < *b*, *F*(*a*) ≤ *F*(*b*).

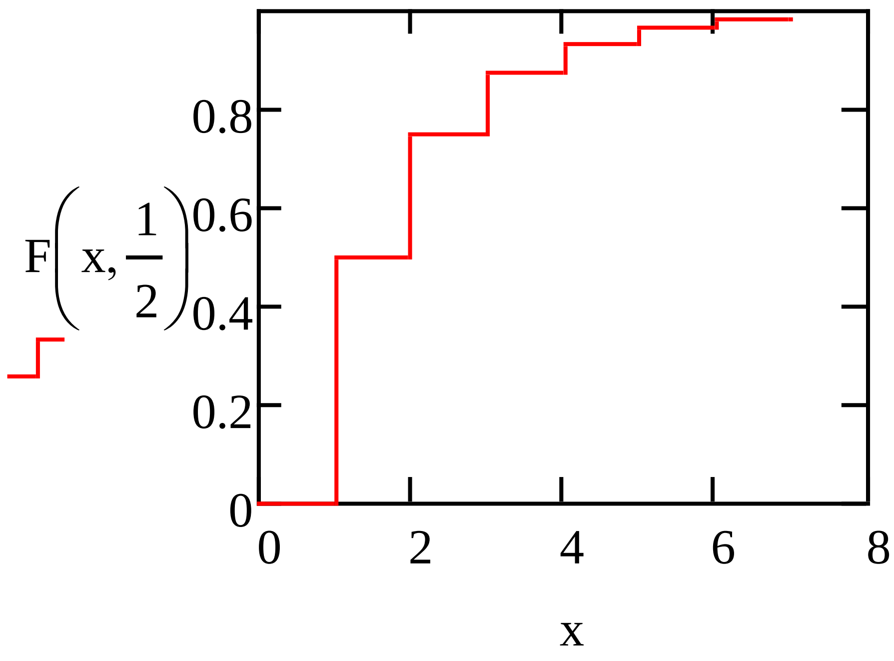
$$\lim_{x \to x_n} F(x) = 1 \qquad \lim_{x \to x_1} F(x) = p(x_1) \qquad F(x_i) = F(x_{i-1}) + p(x_i)$$

Variables aleatorias discretas

X: Cantidad de lanzamientos de una moneda hasta que salga Cara.

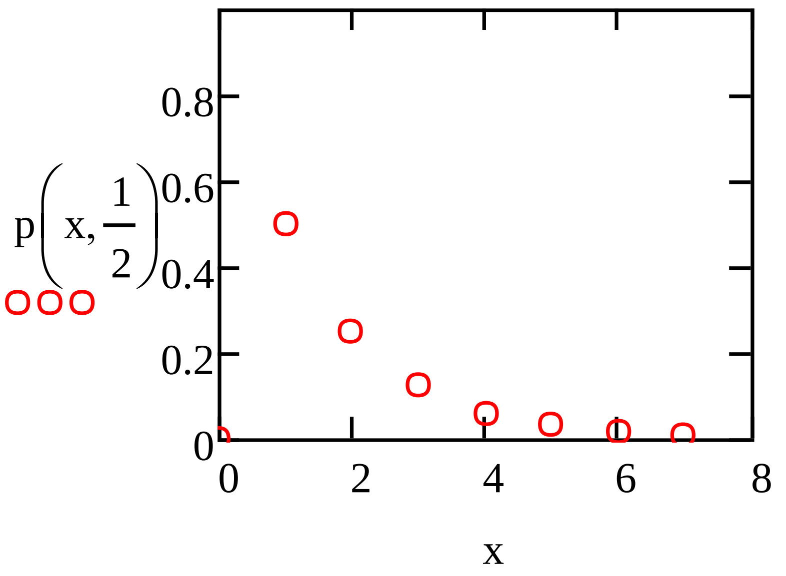
i	x	$p(x)$	$F(x)$
1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
2	2	$\frac{1}{2}^2$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}^2$
3	3	$\frac{1}{2}^3$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}^2+\frac{1}{2}^3$
…	…	…	
n	n	$\frac{1}{2}^n$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}^2+\frac{1}{2}^3+\ldots+\frac{1}{2}^n$

$$F(x) = 1 - \frac{1}{2^x}$$



Variables aleatorias discretas

Distribución de probabilidad



Distribución acumulada

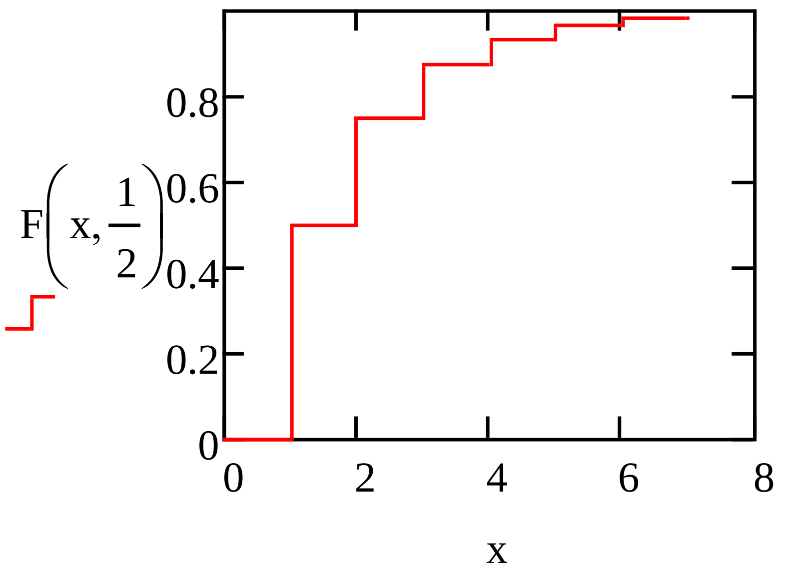


Gráfico para "lanzar la moneda hasta que salga cara".

Variables aleatorias discretas

- Probabilidad de un intervalo (*a*,*b*]:

$$\mathrm{P}\left(a < X \leq b\right) = F\left(b\right) - F\left(a\right) \quad \forall a < b$$

- La probabilidad de que salga Cara entre el 3° y 5° lanzamiento:

$$F\left(5\right) - F\left(2\right) = \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^3} = \frac{7}{32}$$

Variables aleatorias discretas

- Valor esperado o promedio de *X*:

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, p(x_i)$$

- Propiedades:

$$\mathrm{E}(c\,X) = c\,\mathrm{E}(X)$$

$$\mathrm{E}\left(\sum_{j=1}^{m} c_j \, X_j\right) = \sum_{j=1}^{m} c_j \, \mathrm{E}(X_j)$$

Variables aleatorias discretas

- La varianza de X:

$$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)$$

$$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}\left(X^2\right) - \mathrm{E}(X)^2$$

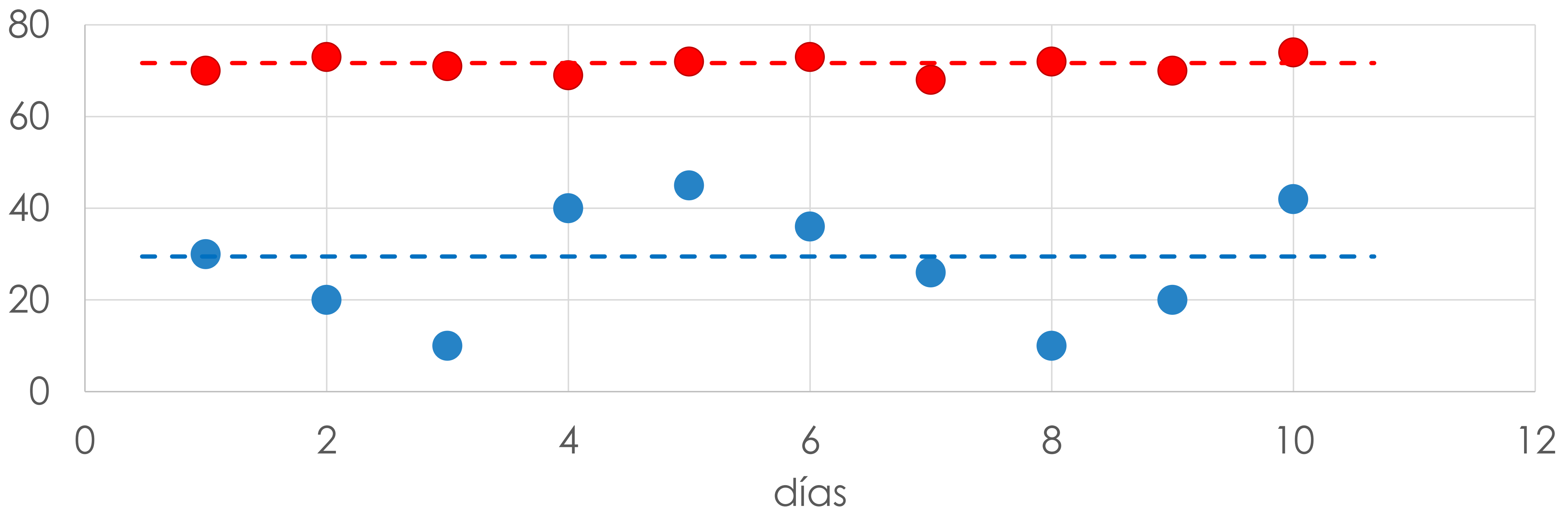
- Propiedades:

$$\mathrm{V}(X) \geq 0$$

$$\mathrm{V}(cX) = c^2\,\mathrm{V}(X)$$

$$\mathrm{V}\left(\sum_{j=1}^{m} X_j\right) = \sum_{j=1}^{m} \mathrm{V}(X_j)$$

Cantidades de productos vendidos



$E(A) > E(B)$ $V(A) < V(B)$

Variables aleatorias discretas

- La desviación estándar de *X*:

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{V}(X)}$$

- Moda de *X*: Hace máxima a $p(x)$.
- Mediana *X*: Hace $F(x) = 0.5$. Significa que es igualmente probable observar valores de *X* menores que la mediana como observar valores de *X* mayores que la mediana.

Variables aleatorias discretas