



Distribuciones probabilísticas Parte I

Enrique E. Tarifa, Facultad de Ingeniería, UNJu

Probabilidad y estadística

Probabilidad y estadística

- Repaso de la materia “Probabilidades y estadística”
- 2° año
- Anual
- Programa disponible en www.fi.unju.edu.ar

Probabilidad

Probabilidad

- Probabilidad: $P \in [0,1]$
- Regla de Laplace:
 - Suceso A imposible, $P(A) = 0$.
 - Suceso A seguro, $P(A) = 1$.
 - Si todos los sucesos son equiprobables:

$$P(A) = \frac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}}$$



$$P(6) = 1/6$$

Definiciones

- Experimento: Un proceso cuyo resultado no es conocido con certeza.
- Espacio muestral S : Conjunto de resultados posibles.
- Puntos muestrales: Los resultados.
- Lanzar una moneda $\rightarrow S = \{\text{Cara, Cruz}\}$
- Cursada de una materia $\rightarrow S = \{\text{regular, desaprobado, ausente}\}$

Definiciones

- Variable aleatoria X : Es una función o una regla que asigna un número real x (positivo o negativo) a cada punto muestral de S .
- Rango de X , R_X : Es el conjunto de valores que puede adoptar la variable X .
- Si Cara $\rightarrow 0$ y Cruz $\rightarrow 1$, $R_X = \{0,1\}$.
- Estado académico, $R_X = \{1,2,3\}$.

Variables discretas

Variables aleatorias discretas

- Variable aleatoria discreta X : Sólo puede adoptar una cantidad contable de valores, $R_X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$.
- Cantidad de clientes que atiende una oficina en una semana, $R_X = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Variables aleatorias discretas

- Función masa de probabilidad de X (*probability mass function* —*pmf*—).
- $p(x) = P(X = x)$
- Propiedades:

$$p(x_i) \geq 0 \quad \forall i$$

$$\sum_{i=1}^n p(x_i) = 1$$

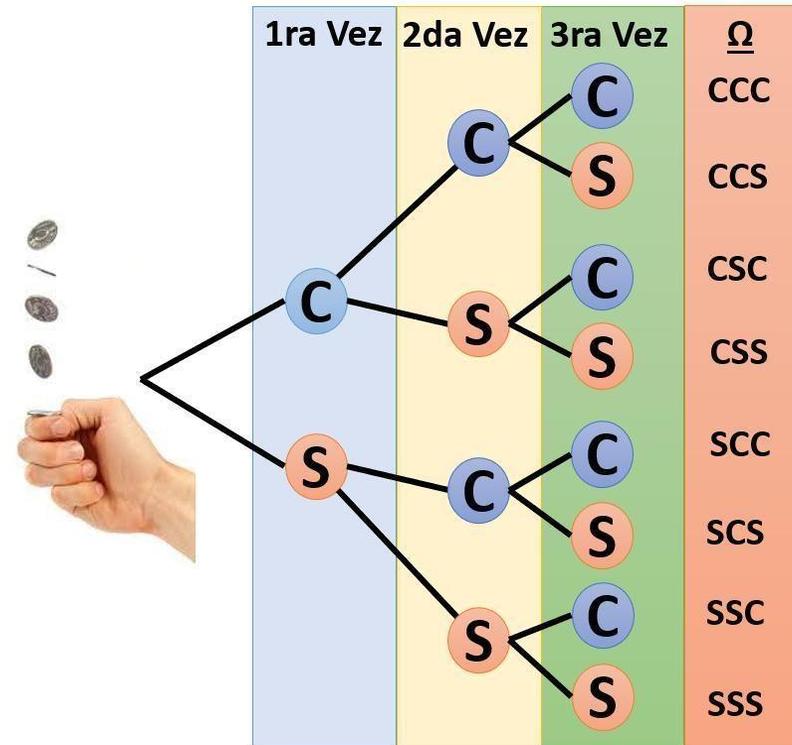
Variables aleatorias discretas

- Distribución de probabilidad de X : $(x_i, p(x_i))$ para todo i .
- Para el lanzamiento de una moneda: $\{(0,0.5), (1,0.5)\}$
- Tabla: i , x_i y $p(x_i)$



Árbol de probabilidades

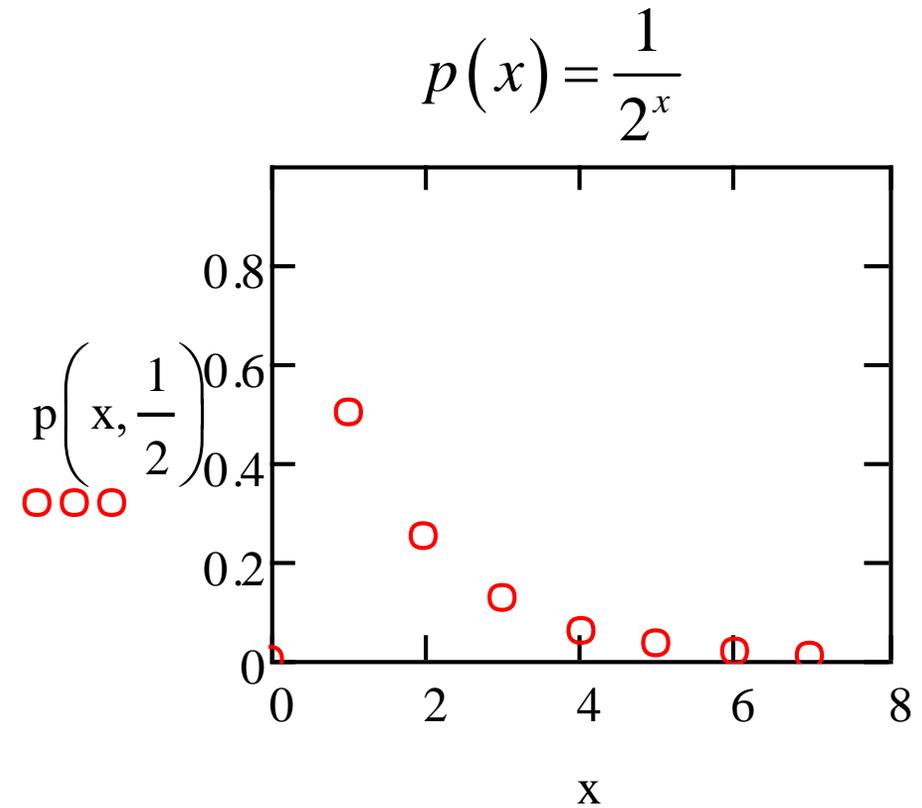
- También llamado diagrama de árbol.
- X : Cantidad de lanzamientos de una moneda hasta que salga Cara.



Variables aleatorias discretas

X : Cantidad de lanzamientos de una moneda hasta que salga Cara.

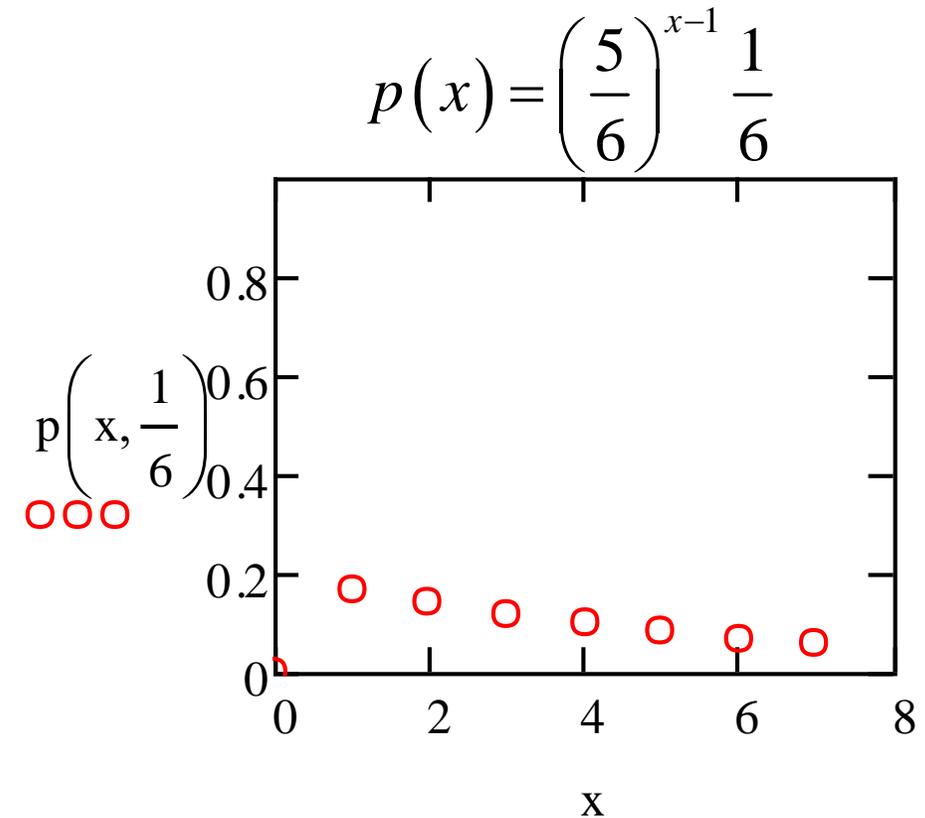
i	x	$p(x)$
1	1	$\frac{1}{2}$
2	2	$\frac{1}{2^2}$
3	3	$\frac{1}{2^3}$
...
n	n	$\frac{1}{2^n}$



Variables aleatorias discretas

X : Cantidad de lanzamientos de un dado hasta que salga 1.

i	x	$p(x)$
1	1	$1/6$
2	2	$5/6 \cdot 1/6$
3	3	$(5/6)^2 \cdot 1/6$
...	...	
n	n	$(5/6)^{n-1} \cdot 1/6$



Variables aleatorias discretas

- La función de distribución acumulada (*cumulative distribution function* —cdf—), $F(x)$:

$$F(x) = P(X \leq x)$$

$$F(x) = \sum_{\forall x_i \leq x} p(x_i)$$

- Propiedades:

- Debe ser no decreciente; esto es, si $a < b$, $F(a) \leq F(b)$.

$$\lim_{x \rightarrow x_n} F(x) = 1$$

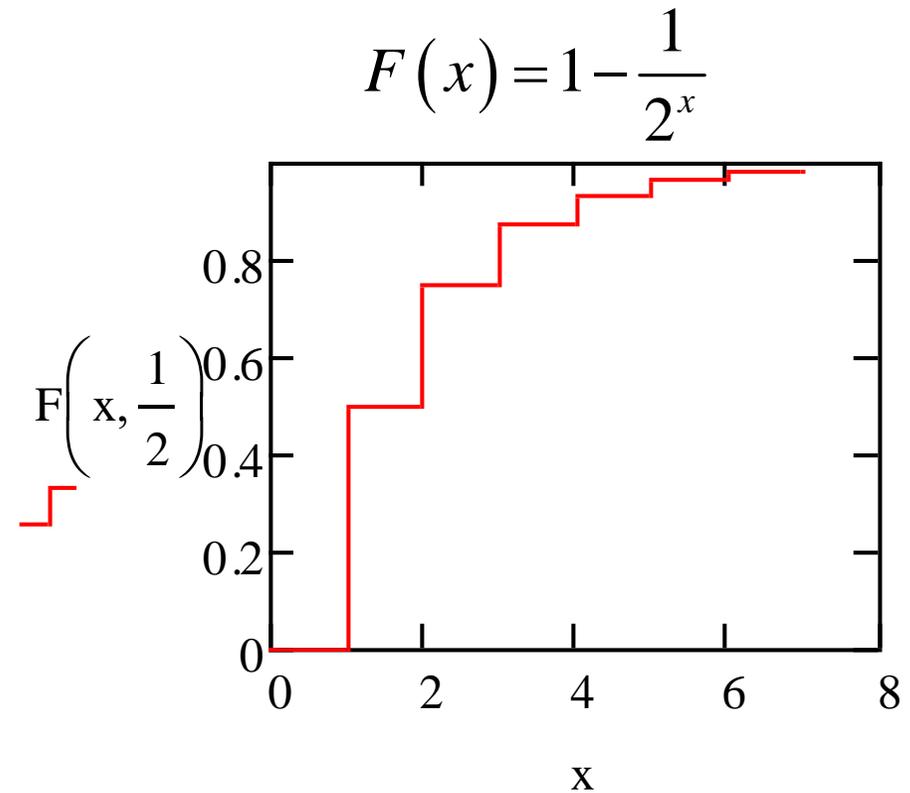
$$\lim_{x \rightarrow x_1} F(x) = p(x_1)$$

$$F(x_i) = F(x_{i-1}) + p(x_i)$$

Variables aleatorias discretas

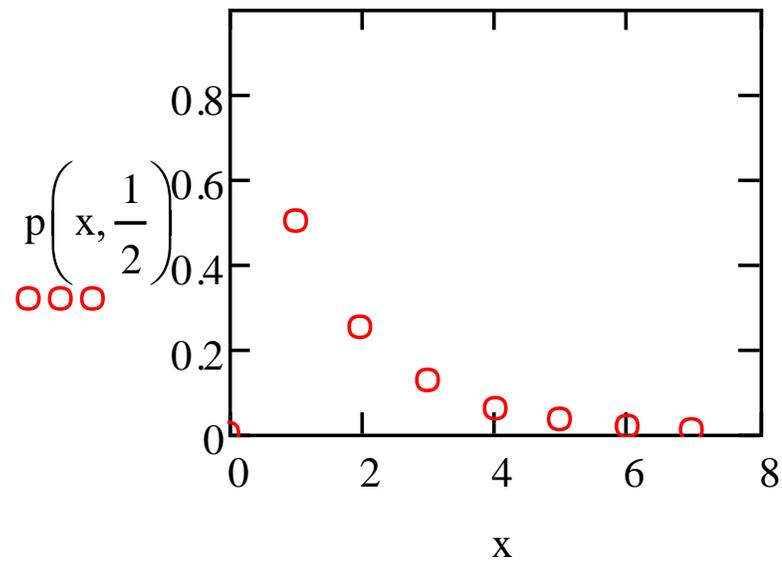
X : Cantidad de lanzamientos de una moneda hasta que salga Cara.

i	x	$p(x)$	$F(x)$
1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
2	2	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}$
3	3	$\frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}$
...
n	n	$\frac{1}{2^n}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n}$



Variables aleatorias discretas

Distribución de probabilidad



Distribución acumulada

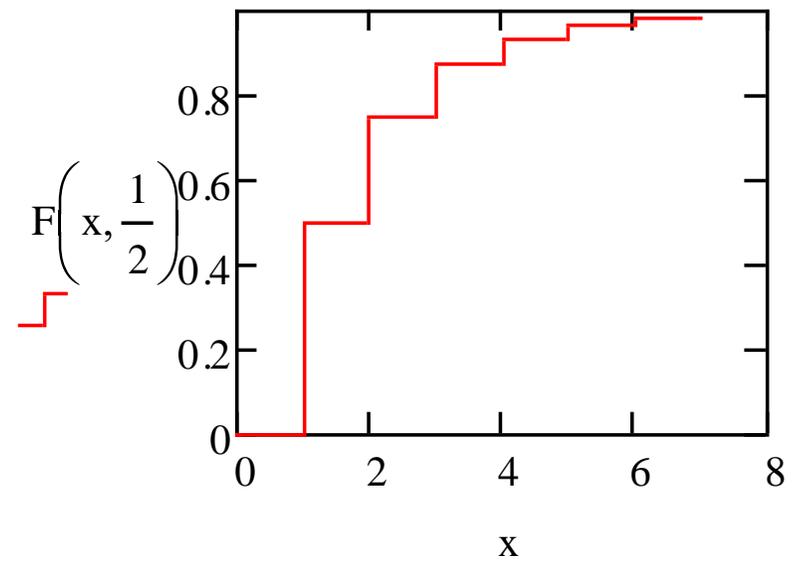


Gráfico para “lanzar la moneda hasta que salga cara”.

Variables aleatorias discretas

- Probabilidad de un intervalo $(a,b]$:

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) \quad \forall a < b$$

- La probabilidad de que salga Cara entre el 3° y 5° lanzamiento:

$$F(5) - F(2) = \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^3} = \frac{7}{32}$$



Variables aleatorias discretas

- Valor esperado o promedio de X :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p(x_i)$$

- Propiedades:

$$E(cX) = cE(X)$$

$$E\left(\sum_{j=1}^m c_j X_j\right) = \sum_{j=1}^m c_j E(X_j)$$

Variables aleatorias discretas

- La varianza de X :

$$V(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

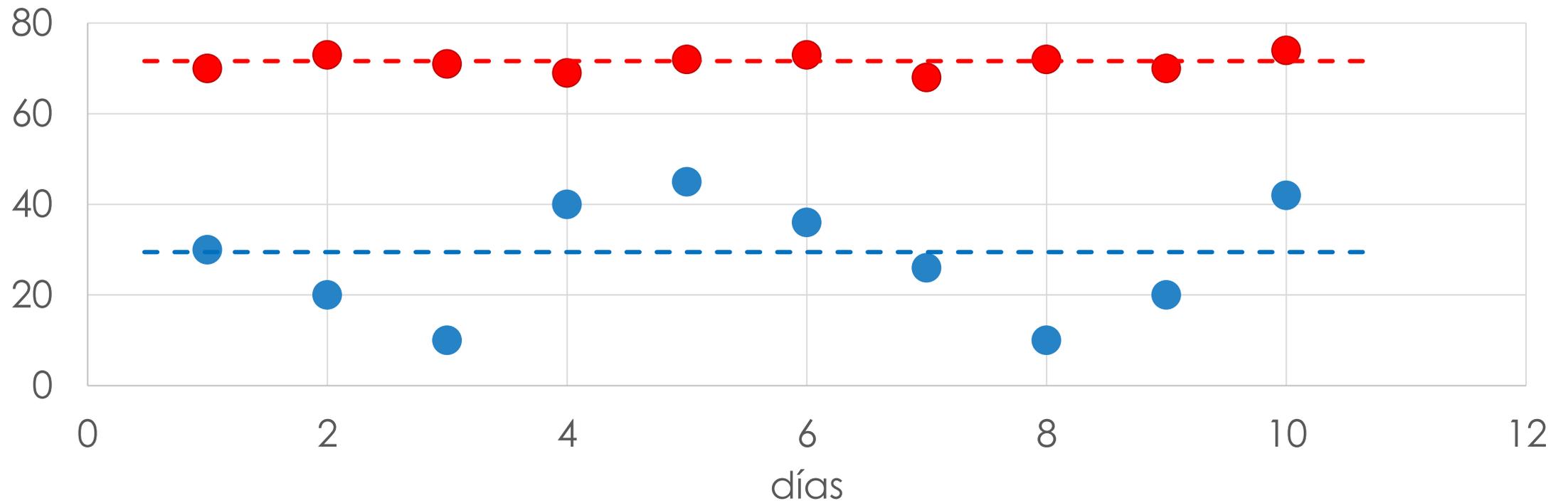
- Propiedades:

$$V(X) \geq 0$$

$$V(cX) = c^2 V(X)$$

$$V\left(\sum_{j=1}^m X_j\right) = \sum_{j=1}^m V(X_j)$$

Cantidades de productos vendidos



$$E(A) > E(B)$$

$$V(A) < V(B)$$

Variables aleatorias discretas

- La desviación estándar de X :

$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$

- Moda de X : Hace máxima a $p(x)$.
- Mediana X : Hace $F(x) = 0.5$. Significa que es igualmente probable observar valores de X menores que la mediana como observar valores de X mayores que la mediana.

Variables aleatorias discretas

