Programa POE 1.0

Programa Ordenador de Ecuaciones

Enrique Tarifa, Demetrio Humana, Samuel Franco
Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Jujuy
Gorriti 237 - 4600 San Salvador de Jujuy - Argentina
Tel: 054-388-4221588 - Email: eetarifa@imagine.com.ar

Introducción

Dado un sistema de ecuaciones algebraicas de *N*x*M* (*N* ecuaciones, *M* variables), este programa tiene como objetivo determinar los subsistemas de ecuaciones que deben ser resueltas simultáneamente, como así también la secuencia de resolución de dichos subsistemas. Adicionalmente, si se utiliza el método de Selección Heurística (SH), el programa recomienda un conjunto de *M-N* variables de decisión que hacen posible la resolución del sistema de ecuaciones.

Para determinar los subsistemas y las relaciones existentes entre ellos, el programa ofrece dos métodos: Matriz Diagonalizada (MD) y Selección Heurística (SH). La opción MD determina los subsistemas independientes (disyunción) y los subsistemas dependientes (partición) de un sistema del tipo *N*x*N*. No puede determinar variables de decisión, pero asegura el tamaño mínimo de los subsistemas encontrados. Es decir, no es posible realizar otra partición que origine subsistemas más pequeños.

Por otra parte, la opción SH realiza la disyunción y partición de un sistema *N*x*M*, recomendando un conjunto de *M-N* variables de decisión. Sin embargo, debido a que se utilizan heurísticos, no asegura la solución óptima. El método tiene dos variantes: Iteración y Subsistemas. En la primera se realiza la partición a fin de maximizar el tamaño de los subsistemas esperando con ello minimizar la cantidad de variables de iteración necesarias para resolver el sistema, este conjunto de variables de iteración mínimo es también reportado. En la segunda se realiza la partición a fin de minimizar el tamaño de los subsistemas; es decir, produce resultados similares a los obtenidos con el método MD.

A fin de determinar las variables de decisión de un sistema indeterminado se aconseja la utilización del método SH con la opción Subsistemas porque orientará la selección a fin de lograr tamaño mínimo de los subsistemas. Fijadas las variables de decisión, puede utilizarse cualquiera de las opciones de SH (Iteración o Subsistemas) para estudiar el sistema determinado resultante de la eliminación de dichas variables.

El programa puede detenerse con los siguientes mensajes de error:

- Sistema inconsistente o dependiente: Alguna ecuación es linealmente dependiente (no aporta información), o existe una ecuación inconsistente (aporta información contradictoria).
- Sistema indeterminado: Las ecuaciones no aportan la información suficiente para determinar las incógnitas. Sólo se puede emplear el método SH.

Tanto el ingreso de datos como la salida de los resultados se llevan a cabo mediante archivos de textos.

Método MD

El método de la Matriz Diagonalizada (MD) es aplicable a sistemas de ecuaciones determinados (grados de libertad nulo). El método opera con la Matriz de Incidencia intercambiando filas y columnas para producir una matriz diagonal.

Datos

Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x_3 + x_4 + x_5 = 12$$
$$x_2 - x_3 = -1$$
$$\frac{x_1}{1 + x_1} = 0.5$$
$$x_4 - x_5 = -1$$
$$x_2 + x_3 = 5$$
$$x_1 - x_5 + x_6 = 11$$
$$x_7 + x_8 = 20$$
$$\frac{x_8 - 3}{x_8} = 10$$

Es un sistema determinado de 8x8. La correspondiente Matriz de Incidencia es:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
f_1			1	1	1			
f_2		1	1					
f_3	1							
f_4				1	1			
f_5		1	1					
f_6	1				1	1		
f_7							1	1
f_8								1

Como puede observarse, esta matriz contiene muy pocos elementos ocupados, es una matriz rala. Para este tipo de matrices es conveniente adoptar la siguiente representación de lista:

```
{Nombre de la fila 1}
{Valor del elemento} {Nombre de la primera columna ocupada}
{Valor del elemento} {Nombre de la siguiente columna ocupada}
...
{Valor del elemento} {Nombre de la última columna ocupada}

{Nombre de la fila 2}
{Valor del elemento} {Nombre de la primera columna ocupada}
{Valor del elemento} {Nombre de la siguiente columna ocupada}
...
{Valor del elemento} {Nombre de la última columna ocupada}

{Nombre de la fila 3}
{Valor del elemento} {Nombre de la primera columna ocupada}
{Valor del elemento} {Nombre de la siguiente columna ocupada}
...
{Valor del elemento} {Nombre de la última columna ocupada}

...

{Nombre de la fila N}
{Valor del elemento} {Nombre de la primera columna ocupada}
{Valor del elemento} {Nombre de la siguiente columna ocupada}
...
{Valor del elemento} {Nombre de la última columna ocupada}
```

De esta manera, para introducir el sistema de ecuaciones del ejemplo al programa, debe prepararse un archivo de texto con el siguiente formato:

```
f1↵
1 x3↵
1 x4↵
1 x5↵
↵
f2↵
1 x2↵
1 x3↵
↵
f3↵
1 x1↵
↵
f4↵
1 x4↵
1 x5↵
↵
f5↵
1 x2↵
1 x3↵
↵
f6↵
1 x1↵
1 x5↵
1 x6↵
↵
f7↵
1 x7↵
1 x8↵
↵
f8↵
1 x8↵
```

Los valores de los elementos (en este caso tomados todos como 1) deben ser números naturales de 0 a 10; el 0 indica que la variable considerada es fácil de despejar de la función considerada; por el contrario, un valor 10 significa que es muy difícil despejar la variable considerada de la ecuación considerada. Cuando se trabaja con el método de MD, o con el método SH con la opción Subsistemas, estos pesos no son tenidos en cuenta. En cambio, estos pesos sí son empleados cuando se trabaja con el método SH con la opción Iteración.

El nombre del archivo de datos puede ser cualquiera, y lo mismo vale para los nombres de las funciones y de las variables. No obstante, conviene evitar los nombres Sub*i_j* que se reservan para designar a los subsistemas encontrados. Para este ejemplo, el archivo de datos está en "Sistema ejemplo.txt". Los *Enters* (↵) son importantes.

Resultados

Una vez procesado el sistema que figura en el citado archivo, la información se presenta en pantalla, y todo el contenido de la misma puede grabarse en un archivo de texto. Para este caso, el archivo de salida es:

```
f1
1 x3
1 x4
1 x5

f2
1 x2
1 x3

f3
1 x1
```

```
f4
1 x4
1 x5

f5
1 x2
1 x3

f6
1 x1
1 x5
1 x6

f7
1 x7
1 x8

f8
1 x8

=============================================================
Ordenación por Matriz Diagonalizada.
=============================================================
Subsistema independiente N°: 0
-------------------------------------------------------------
Matriz subsistema dependiente Sub0_0
Columnas
1  x1

f3
1  x1

-------------------------------------------------------------
Matriz subsistema dependiente Sub0_1
Columnas
2  x2
2  x3

f2
1  x2
1  x3

f5
1  x2
1  x3

-------------------------------------------------------------
Matriz subsistema dependiente Sub0_2
Columnas
2  x4
2  x5

f1
1  x4
1  x5

f4
1  x4
1  x5

-------------------------------------------------------------
Matriz subsistema dependiente Sub0_3
Columnas
1  x6

f6
1  x6

-------------------------------------------------------------
Matriz ordenada
Columnas
2  x1
2  x2
3  x3
2  x4
3  x5
```

```
1  x6

f3
1  x1

f2
1  x2
1  x3

f5
1  x2
1  x3

f1
1  x3
1  x4
1  x5

f4
1  x4
1  x5

f6
1  x1
1  x5
1  x6

--------------------------------------------------------------
Matriz de adyacencia
Columnas
2 Sub0_3
1 Sub0_2

Sub0_0
1 Sub0_3

Sub0_1
1 Sub0_2

Sub0_2
1 Sub0_3

==============================================================
Subsistema independiente N°: 1
--------------------------------------------------------------
Matriz subsistema dependiente Sub1_0
Columnas
1  x8

f8
1  x8

--------------------------------------------------------------
Matriz subsistema dependiente Sub1_1
Columnas
1  x7

f7
1  x7

--------------------------------------------------------------
Matriz ordenada
Columnas
2  x8
1  x7

f8
1  x8

f7
1  x7
1  x8

--------------------------------------------------------------
Matriz de adyacencia
Columnas
```

```
1 Sub1_1

Sub1_0
1 Sub1_1
```

El resultado reporta la existencia de dos subsistemas independientes, uno de 6x6 y otro de 2x2. Para el primero, deben resolverse cuatro subsistemas dependientes:

Subsistemas	Ecuaciones	Incógnitas
Sub0_0	f_3	x_1
Sub0_1	f_2, f_5	x_2, x_3
Sub0_2	f_1, f_4	x_4, x_5
Sub0_3	f_6	x_6

Los subsistemas son reportados utilizando el formato de matrices ralas, pero se agrega una primera fila ficticia denominada “Columnas” que sirve para presentar los nombres de las variables y los números de coordinación correspondientes.

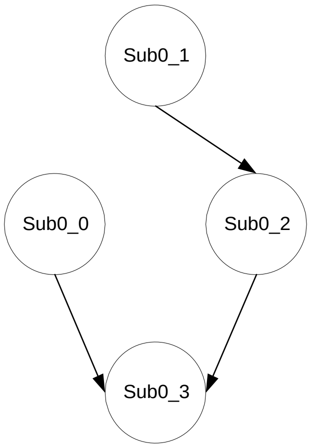
Estos subsistemas pueden resolverse en el orden informado, pero para conocer todas las secuencias posibles de resolución conviene representar la relación existente entre estos subsistemas en forma de dígrafo. Para ello, el programa reporta la Matriz Ordenada (matriz diagonalizada); pero más importante aún, también reporta la Matriz de Adyacencia del digrafo de subsistemas. La Matriz Ordenada es:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
f_3	1					
f_2		1	1			
f_5		1	1			
f_1			1	1	1	
f_4				1	1	
f_6	1				1	1

En esta matriz figuran recuadrados los subsistemas determinados. Como puede apreciarse, el segundo subsistema (Sub0_1) afecta al tercer subsistema (Sub0_2) a través de la variables x_3. Lo mismo ocurre con Sub0_2 y Sub0_3 a través de la variables x_5. Estas relaciones pueden verse mejor en la Matriz de Adyacencia:

	Sub0_3	Sub0_2
Sub0_0	1	
Sub0_1		1
Sub0_2	1	

donde los subsistemas de las filas suministran información a los subsistemas de las columnas, y por lo tanto deben ser resueltos en primer lugar. De esta forma, el digrafo correspondiente es:



Debido a que las ecuaciones f_7 y f_8 no comparten variables con las ya reportadas, ellas constituyen un sistema de ecuaciones independiente que se estudia y reporta de forma similar.

La información del digrafo del sistema de ecuaciones original se guarda en un archivo de texto, para este ejemplo es “Sistema ejemplo.dig”, el cual puede ser procesado por el programa Graphviz para producir una representación gráfica (Figura 1), donde pueden apreciarse los subsistemas independientes y, para cada uno de ellos, pueden verse las relaciones existentes entre sus subsistemas internos. Lo anterior se explicita en el formato de los nombres de los subsistemas Sub*i*_*j*, el cual designa al subsistema dependiente *j* perteneciente al subsistema independiente *i*.

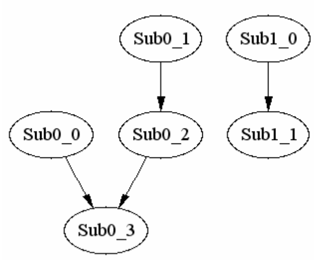


Figura 1: Digrafo del sistema de ecuaciones.

Método SH

El método de Selección Heurística procesa el sistema de ecuaciones aplicando heurísticos. El ordenamiento puede realizarse para generar subsistemas con tamaño mínimo (opción Subsistemas), o para generar subsistemas con tamaño máximo tratando de minimizar la cantidad de variables de iteración (opción Iteración). Este método es apto para operar con sistemas de ecuaciones indeterminados (grados de libertad mayor que cero).

Datos

Sea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x_3 + x_4 + x_5 + x_7 = 12$$
$$x_2 - 2x_3 + x_7 = -1$$
$$\frac{x_1}{1 + x_1} + x_7 = 0.5$$
$$x_4 - x_5 - x_7 = -1$$
$$x_2 + x_3 - x_7 = 5$$
$$x_1 - x_5 + x_6 = 11$$
$$x_8 + x_9 + x_7 = 20$$
$$\frac{x_9 - 3}{x_9} = 10$$

Este sistema es un sistema indeterminado de 8x9 con 9-8 = 1 grados de libertad. La correspondiente Matriz de Incidencia es:

	x_1	**x_2**	**x_3**	**x_4**	**x_5**	**x_6**	**x_7**	**x_8**	**x_9**
f_1			1	1	1		1		
f_2		1	1				1		
f_3	1						1		
f_4				1	1		1		
f_5		1	1				1		
f_6	1				1	1			
f_7							1	1	1
f_8									1

Esta matriz se encuentra en el archivo “Sistema ejemplo 2.txt”:

```
f1↵
1 x3↵
1 x4↵
1 x5↵
1 x7↵
↵
f2↵
1 x2↵
1 x3↵
1 x7↵
↵
f3↵
1 x1↵
1 x7↵
↵
f4↵
1 x4↵
1 x5↵
1 x7↵
↵
f5↵
1 x2↵
1 x3↵
1 x7↵
↵
f6↵
1 x1↵
1 x5↵
1 x6↵
↵
f7↵
1 x7↵
1 x8↵
1 x9↵
```

```
↵
f8↵
1 x9↵
```

Opción Subsistemas

Debido a que es un sistema indeterminado, el método MD no puede aplicarse. De acuerdo a lo sugerido en la sección Introducción, se procesa el sistema con el método SH con la opción Subsistemas para generar el siguiente reporte:

```
f1
1 x3
1 x4
1 x5
1 x7

f2
1 x2
1 x3
1 x7

f3
1 x1
1 x7

f4
1 x4
1 x5
1 x7

f5
1 x2
1 x3
1 x7

f6
1 x1
1 x5
1 x6

f7
1 x7
1 x8
1 x9

f8
1 x9

==============================================================
Ordenación por Selección Heurística
para subsistemas.
==============================================================
Subsistema independiente N°: 0
---------------------------------------------------------------
Matriz MFX
Columnas
1  x9
1  x3
1  x7
1 Ver1
1  x4
1  x5
1 Ver0
1  x1
1  x8
1  x6

f8
1  x9

ItVer1
1  x3

f2
```

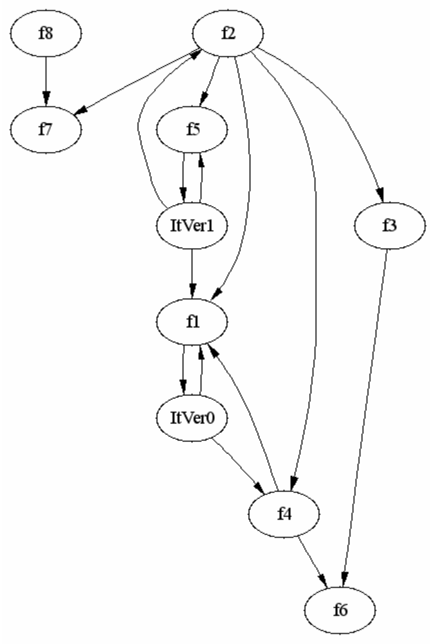
```
1  x7

f5
1 Ver1

ItVer0
1  x4

f4
1  x5

f1
1 Ver0

f3
1  x1

f7
1  x8

f6
1  x6

--------------------------------------------------------------
Matriz de adyacencia
Columnas
2 f7
4 f1
1 f2
2 f5
2 f4
1 f3
1 ItVer1
2 f6
1 ItVer0

f8
1 f7

ItVer1
1 f1
1 f2
1 f5

f2
1 f1
1 f5
1 f4
1 f3
1 f7

f5
1 ItVer1

ItVer0
1 f1
1 f4

f4
1 f1
1 f6

f1
1 ItVer0

f3
1 f6

Variables de decisión
1  x2
```

El reporte recomienda x_2 como variable de decisión. De esta forma, existe un solo subsistema independiente (el N°0) y seis subsistemas dependientes. De acuerdo a la matriz MFX, estos subsistemas son:

Matriz MFX	Subsistemas
f8 1 x9	Sub0_0: Ecuaciones: f8. Incógnitas: x9.
ItVer1 1 x3 f2 1 x7 f5 1 Ver1	Sub0_1: Ecuaciones: f2, f5. Incógnitas: x3, x7.
ItVer0 1 x4 f4 1 x5 f1 1 Ver0	Sub0_2: Ecuaciones: f4, f1. Incógnitas: x4, x5.
f3 1 x1	Sub0_3: Ecuaciones: f3. Incógnitas: x1.
f7 1 x8	Sub0_4: Ecuaciones: f7. Incógnitas: x8.
f6 1 x6	Sub0_5: Ecuaciones: f6. Incógnitas: x6.

Como puede verse, un subsistema queda definido por las ecuaciones e incógnitas comprendidas entre una pareja ItVer*i* y Ver*i*. Si existieran parejas anidadas, el subsistema queda definido por las ecuaciones e incógnitas comprendidas por la pareja más externa.

Esta vez, la matriz de adyacencia MA representa un digrafo donde los nodos no son subsistemas como en el método MD, sino que son ecuaciones. Los subsistemas son representados por los ciclos que aparecen en el digrafo, indicando que las ecuaciones involucradas en ellos deben ser resueltas simultáneamente. El digrafo para este caso es:



Los arcos en el digrafo representan las variables que son despejadas de las ecuaciones representadas por los nodos. Sólo puede despejarse una variable por cada ecuación.

Para este ejemplo, una posible secuencia de resolución es la indicada por la matriz MFX: Sub0_0, Sub0_1, Sub0_2, Sub0_3, Sub0_4, y finalmente Sub0_5. Para obtener todas las secuencias posibles, basta estudiar el digrafo.

Cada subsistema de más de una ecuación puede ser resuelto con algún método numérico apropiado, pero también puede ser resuelto utilizando variables de iteración que rompan los ciclos. Para ello, en el digrafo y en la matriz MFX se indican los puntos de corte. Por ejemplo, para el subsistema Sub0_1 se recomienda el siguiente procedimiento para su resolución:

Matriz MFX	Interpretación
ItVer1 1 x3	Proponer un valor para la variable de iteración x3.
f2 1 x7	Con el valor conocido de x3, despejar x7 de f2.
f5 1 Ver1	Verificar el cumplimiento de la ecuación f5. Repetir la iteración hasta que se encuentre el valor de x3 que satisfaga la ecuación f5. Otra alternativa es despejar un nuevo valor de x3 a partir de f5, y repetir la iteración hasta que el valor despejado de f5 concuerde con el valor propuesto.

Note que el subsistema se marca utilizando la función artificial ItVer1 para el inicio de la iteración, y la variable artificial Ver1 para el cierre o verificación de la iteración. Por otra parte, es posible intercambiar la variable de decisión x_2 con la variable de iteración x_3 sin alterar la secuencia de resolución del sistema. Es decir, es posible tomar como nueva variable de decisión a x_3, y como nueva variable de iteración a x_2 sin que se deba alterar la secuencia de resolución. Más aún, es posible cortar el ciclo en cualquier arco; por ejemplo, se puede tomar como nueva variable de iteración a x_7 en cuenta de x_3. Considerando todas estas alternativas, se recomienda que las variables con valores enteros sean tomadas como variables de decisión, y que las variables con rango más limitado (máximo valor-mínimo valor) y con comportamiento más lineal sean tomadas como variables de iteración.

Sin embargo, si la intención es resolver los subsistemas utilizando variables de iteración, lo mejor es procesar el sistema de ecuaciones utilizando la opción Iteración en lugar de la opción Subsistemas.

Opción Iteración

Utilizando el método SH con la opción Iteración se genera el siguiente reporte:

```
f1
1 x3
1 x4
1 x5
1 x7

f2
1 x2
1 x3
1 x7

f3
1 x1
1 x7

f4
1 x4
1 x5
1 x7

f5
1 x2
1 x3
```

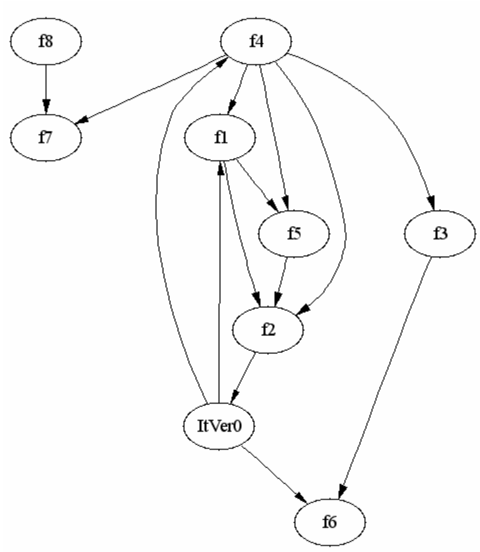
```
1 x7

f6
1 x1
1 x5
1 x6

f7
1 x7
1 x8
1 x9

f8
1 x9

=============================================================
Ordenación por Selección Heurística
para variables de iteración.
=============================================================
Subsistema independiente N°: 0
------------------------------------------------------------
Matriz MFX
Columnas
1  x9
1  x5
1  x7
1  x3
1  x2
1 Ver0
1  x1
1  x6
1  x8

f8
1  x9

ItVer0
1  x5

f4
1  x7

f1
1  x3

f5
1  x2

f2
1 Ver0

f3
1  x1

f6
1  x6

f7
1  x8

------------------------------------------------------------
Matriz de adyacencia
Columnas
2 f7
2 f1
1 f4
2 f6
3 f2
2 f5
1 f3
1 ItVer0

f8
1 f7

ItVer0
```

1 f1 1 f4 1 f6 f4 1 f1 1 f2 1 f5 1 f3 1 f7 f1 1 f2 1 f5 f5 1 f2 f2 1 ItVer0 f3 1 f6 Variables de decisión 1 x4

Este reporte recomienda x_4 como variable de decisión. De esta forma, existe un solo subsistema independiente (el N°0) y cinco subsistemas dependientes (uno menos que con la opción Subsistemas). De acuerdo a la matriz MFX, estos subsistemas son:

Matriz MFX	**Subsistemas**
f8 1 x9	Sub0_0: Ecuaciones: f8. Incógnitas: x9.
ItVer0 1 x5 f4 1 x7 f1 1 x3 f5 1 x2 f2 1 Ver0	Sub0_1: Ecuaciones: f4, f1, f5, f2. Incógnitas: x5, x7, x3, x2.
f3 1 x1	Sub0_2: Ecuaciones: f3. Incógnitas: x1.
f6 1 x6	Sub0_3: Ecuaciones: f6. Incógnitas: x6.
f7 1 x8	Sub0_4: Ecuaciones: f7. Incógnitas: x8.

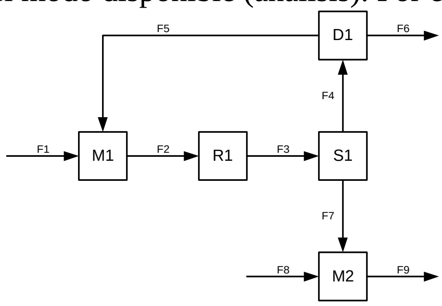
El digrafo para este caso es:



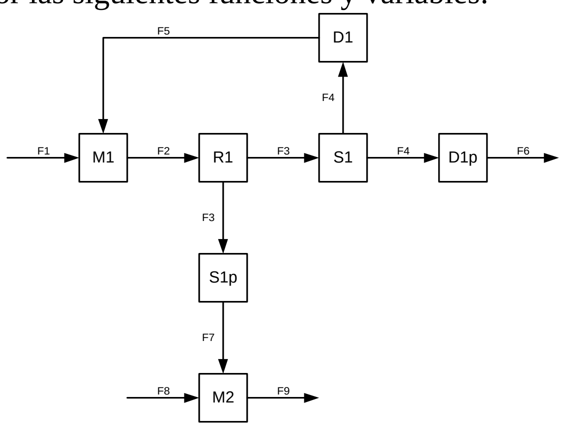
Note que esta vez el sistema se resuelve con una única variable de iteración, pero los subsistemas encontrados son más grandes que los encontrados con la opción Subsistemas.

Enfoque modular para plantas

El programa también puede utilizarse para resolver *flowsheet* de plantas. Las corrientes deben ser consideradas como variables y los equipos como funciones. En caso de existir un equipo con más de una corriente de salida, se debe reemplazar dicho equipo por tantas funciones como salidas tenga. Si los módulos de los equipos no pueden ser invertidos, conviene asignar 10 a los pesos de las corrientes de entradas, y 1 a los pesos de las corrientes de salida. El programa tratará de respetar estas asignaciones, pero igualmente puede sugerir alguna inversión que facilite la resolución de la planta. Esta inversión, puede hacerse con un bloque de control adicionado al equipo invertido para emular el modo de simulación que se requiere (diseño o control) utilizando el modo disponible (análisis). Por ejemplo, la siguiente planta:



puede ser representada por las siguientes funciones y variables:



La correspondiente Matriz de Incidencia es:

	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	F9
M1	10	1			10				
R1		10	1						
S1			10	1					
S1p			10				1		
D1				10	1				
D1p				10		1			
M2							10	10	1

Conclusiones

En resumen, se recomiendan las distintas opciones del programa para los siguientes casos:

- **Método MD:** Determina los subsistemas con tamaño mínimo para un sistema determinado. Es la mejor opción si se desea utilizar un método numérico multivariables para resolver los subsistemas con más de una ecuación. Como realiza una evaluación exhaustiva, puede demorar con sistemas grandes.
- **Método SH-Opción Iteración:** Utiliza técnica heurística, por lo tanto es rápido pero no asegura la solución óptima. Intenta maximizar el tamaño de los subsistemas con la intención de minimizar la cantidad de variables de iteración. Puede determinar variables de decisión en sistemas indeterminados. Se recomienda cuando se desea resolver los subsistemas utilizando variables de iteración.
- **Método SH-Opción Subsistemas:** Utiliza técnica heurística. Se recomienda para determinar las variables de decisión de un sistema indeterminado. También, se lo recomienda para identificar subsistemas de tamaño mínimo para ser resueltos con métodos numéricos multivariables, sobre todo para sistemas grandes donde el método MD puede demorar demasiado.

San Salvador de Jujuy, 30 de Enero de 2004.-