# Ecuaciones trigonométricas

Una ecuación trigonométrica es aquella ecuación en la que aparecen una o más funciones trigonométricas. En las ecuaciones trigonométricas la incógnita es el ángulo común de las funciones trigonométricas. No puede especificarse un método general que permita resolver cualquier ecuación trigonométrica. Algunas observaciones importantes para tener en cuenta para la resolución:

1) La ecuación trigonométrica se expresa en términos de un mismo ángulo.
2) Se debe expresar la ecuación en términos de una misma función trigonométrica.
3) En caso de no poder expresar la ecuación en una misma función se debe tratar de factorizar y expresar en producto para aplicar el teorema del producto igual a cero.
4) Se resuelve algebraicamente la ecuación, considerando como incógnita la función que aparece en la ecuación.
5) Si se elevan cuadrados o se quitan denominadores deben probarse las soluciones y descartar aquellos valores que no los satisfacen.
6) Se debe tener presente que $-1 \leq \text{sen } x \leq 1$ y $-1 \leq \cos x \leq 1$
7) Siempre ubicar las soluciones en la circunferencia trigonométrica para si hay otros ángulos que verifiquen la ecuación (recordar que la calculadora generalmente no da todas las soluciones).

Observación: en las soluciones pueden aparecer valores extraños (debido a la manipulación de las ecuaciones al tratar de reducirlas), por ejemplo: nos puede resultar un cos $x$ = 2, el que debemos descartar, obviamente, pues el codominio del coseno se limita a [-1, 1]. También, debemos verificar todas las respuestas obtenidas y aceptar sólo aquellas que satisfacen la ecuación original.

Como las funciones trigonométricas repiten su valor y signo en dos de los cuadrantes (debido a su periodicidad), hay que tener presente que siempre habrá por lo menos dos ángulos distintos en la solución de la ecuación. Si consideramos las soluciones para ℝ hay que añadir los ángulos congruentes con las soluciones (k 360º o 2kπ según estemos trabajando con grados o con radianes)

Ejemplo:

$$2.\cos^2 x + 5.\text{sen } x = 4$$

Utilizando la relación pitagórica $\quad 2.(1 - \text{sen}^2 x) + 5.\text{sen } x = 4$

$$2.\text{sen}^2 x + 5.\text{sen } x - 2 = 0$$

Realizando un cambio de variable, sen x=t

$$2.t^2 + 5.t - 2 = 0$$

Aplicando la fórmula resolvente de la ecuación de segundo grado, se obtienen dos soluciones

$$\frac{5 \pm \sqrt{25 - 4.2.(-2)}}{2.2} = \frac{5 \pm 3}{4} = \left\langle \begin{array}{l} t_1 = 2 \\ t_2 = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

| | |
|---|---|
| Si $t_1 = 2$ ; $\text{sen} x = 2$<br>Esta solución se debe descartar porque la imagen del coseno se limita a [-1, 1] | Si<br>$t_2 = \frac{1}{2}$ ; $\text{sen} x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} = 30^o$ y $x = \frac{5\pi}{6} = 150^o$ |

Solución $= \left\{ x / x \in \mathbb{R} \wedge \quad x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \ con \ k \in \mathbb{Z} \right\}$