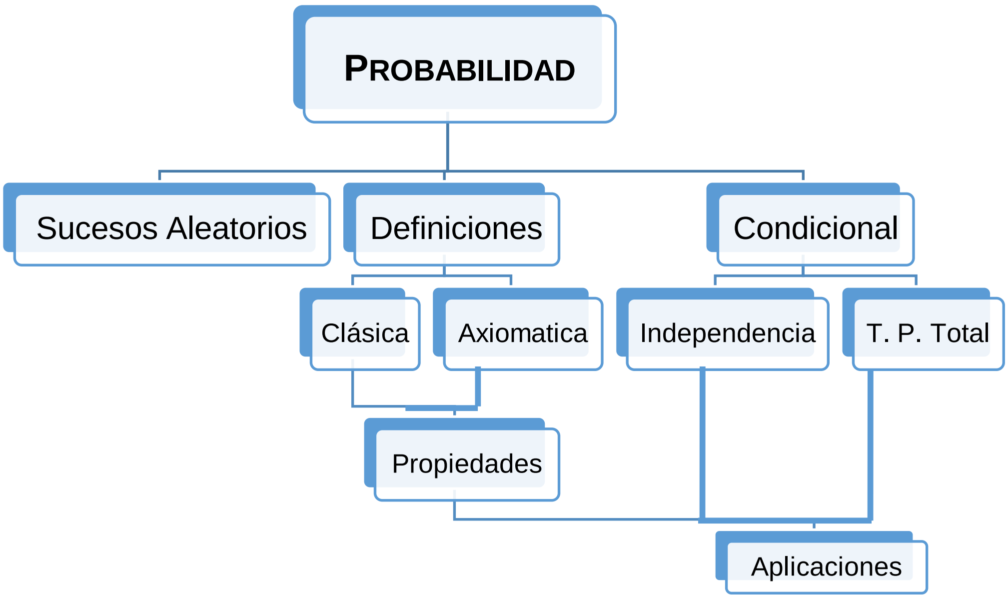
PROBABILIDADES


PROBABILIDAD
Sucesos Aleatorios
Definiciones
Condicional
Clásica
Axiomatica
Independencia
T. P. Total
Propiedades
Aplicaciones

OBJETIVOS

- ✓ Identificar sucesos aleatorios
- ✓ Adquirir los dos conceptos de probabilidad
- ✓ Reconocer y aplicar las distintas propiedades de la probabilidad
- ✓ Distinguir el concepto de probabilidad condicional
- ✓ Determinar si dos sucesos son ó no independientes.
- ✓ Determinar las condiciones y aplicar el teorema de la probabilidad total
- ✓ Resolver situaciones problemática haciendo uso de los distintos conceptos que brinda la probabilidad.

Probabilidad

1.- Introducción

El Análisis Combinatorio y la Teoría de la Probabilidad tienen orígenes comunes: el análisis de juegos de azar. La teoría de la probabilidad comenzó a desarrollarse hace más de trescientos años, cuando Blaise Pascal se interesó por algunos juegos de azar. Fue durante esos estudios cuando Pascal descubrió varias propiedades de los coeficientes binomiales (Teorema del binomio). Luego el matemático francés, Laplace estudiando también juegos de azar, definió la probabilidad de un suceso, que dio lugar al desarrollo de muchos de los fundamentos de la teoría de la probabilidad.

En la actualidad, la teoría de la probabilidad, desempeña un importante papel en diversas disciplinas. Por ejemplo, esta teoría tiene un papel central en el estudio de la genética donde se la puede utilizar para explicar la herencia de diferentes rasgos físicos. Por supuesto la probabilidad sigue siendo una parte muy popular de las matemáticas por sus aplicaciones a los juegos de azar, que siguen recibiendo atención por parte de mucha gente.

En informática, la teoría de la probabilidad desempeña un papel importante en el estudio de la complejidad de los algoritmos. En particular, ideas y técnicas de esta teoría se usan para determinar la complejidad media de los algoritmos. Los algoritmos probabilísticos se pueden utilizar para resolver muchos problemas que no pueden tratarse, de forma sencilla y eficiente, utilizando algoritmos deterministas. Un algoritmo probabilístico, en lugar de seguir siempre los mismos pasos cuando los datos son idénticos como hace un algoritmo determinista, toma algunas decisiones de forma aleatoria, lo que puede llevar a resultados distintos.

2.- Sucesos Aleatorios

La teoría de la probabilidad estudia los llamados experimentos aleatorios, es decir aquellos experimentos que pueden dar lugar a varios resultados sin que se pueda predecir con certeza el resultado concreto. Al repetir el experimento bajo condiciones similares se obtendrán resultados que, por lo general, serán distintos. En consecuencia se puede decir que las características de los experimentos aleatorios son las siguientes:

- ✓ Es posible repetir el experimento en forma indefinida sin cambiar esencialmente las condiciones en las que se realiza.
- ✓ No es posible predecir un resultado en particular.
- ✓ Se puede describir el conjunto de todos los resultados posibles.

- ✓ A medida que el experimento se repite, los resultados parecieran ocurrir en forma caprichosa, pero cuando se repite un número considerable de veces se puede observar un comportamiento de regularidad que lo caracteriza.

Al conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio se le llama *espacio muestral*, y suele representárselo por medio de la letra S.

<u>Definición:</u>

Se llama espacio muestral; al conjunto S de todos los resultados posibles de un experimento o fenómeno aleatorio E.

Los siguientes son ejemplos de experimentos aleatorios con sus posibles espacios muestrales.

E_1: Lanzar una moneda; $S_1 = \{c,\ s\}$

E_2: Lanzar dos moneda; $S_2 = \{(c,c),\ (c,s),\ (s,c),\ (s,s)\}$ que corresponde a un espacio muestral detallado. También podría ser $S_2 = \{0, 1, 2\}$ si lo que interesa es indicar el número de caras obtenidas en cada lanzamiento. Hay que diferenciar entre los resultados $(c,s)\ y\ (s,c)$ lo que se puede lograr pintando las dos monedas de colores distintos, supóngase rojo y blanco, entonces (c,s) corresponde a obtener cara en la moneda roja y sello en la moneda blanca, mientras que (s,c) corresponde a la situación inversa. Una tercera forma de razonar el experimento es considerar que la moneda es la misma y que se la tira dos veces.

E_3: lanzar un dado; $S_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

E_4: lanzar dos dados; el espacio muestral detallado es el Producto Cartesiano $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ X $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ es decir $S_4 = \{\ (1,1),\ (1,2)\ \ .\ .\ .\ (3,1), .\ .\ .\ \ (6,6)\ \}$

E_5: medición del agua de lluvia caída diariamente (h, medida en mm) en una estación de monitoreo $S_5 = \{\ h \mid 0 \leq h\ \leq 100\ \}$. Supóngase que el agua caída en ese lugar no supera los 100 mm.

No siempre es posible describir el espacio muestral enumerando sus diferentes elementos. A veces se lo define por medio de una condición, o regla, que deben cumplir sus elementos (ej. puntos que se sitúan en una circunferencia). Dependiendo del número de resultados posibles del experimento aleatorio, el espacio muestral podrá ser: *finito* (ej. resultados de la tirada de un dado), *infinito numerable* (cuando a cada elemento del espacio se le puede hacer corresponder un número entero sin límite, ej. vida en años de un componente electrónico), e *infinito no numerable* (ej. números reales en el intervalo [0, 1]).

Se llama suceso a un subconjunto A del espacio muestral, es decir un subconjunto de resultados posibles del experimento.

<u>Definición:</u>

Se llama suceso o evento a todo subconjunto del espacio muestral.

Una consecuencia de esta definición es que el propio espacio muestral S y el conjunto vacío son considerados sucesos.

Para designar sucesos se utilizan las primeras letras del abecedario en mayúsculas, A, B, C, . . . Así $A = \{ c \}$ es un suceso asociado a $S_1 = \{c,\ s\}$, $B = \{ (c, s),\ (c, c)\}$ es un suceso asociado al espacio muestral $S_2 = \{(c, c),\ (c, s),\ (s, c),\ (s, s)\}$, $C = \{ 1,\ 3,\ 5 \}$ es un suceso asociado a $S_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$.

Los sucesos más simples son los *sucesos elementales*, que consisten en un único punto del espacio muestral. De forma más exacta se puede definir los sucesos elementales de un experimento aleatorio como aquellos sucesos que verifican:

- ✓ Siempre ocurre alguno de ellos, y
- ✓ Son mutuamente excluyentes.

Por ejemplo, obtener un 4 es un suceso elemental del experimento de lanzar un dado. Vale decir $A = \{ 4 \}$. Por otra parte, un suceso es *compuesto* cuando –al contrario de los sucesos elementales– puede ser descompuesto en sucesos más simples. Es decir, serían los sucesos que se pueden construir a partir de la unión de sucesos elementales.

Por ejemplo, en el experimento de lanzar un dado, al hecho de obtener un número par le corresponde el suceso compuesto $A = \{ 2, 4, 6 \}$.

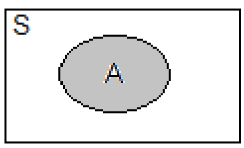
Existen dos sucesos particulares especialmente interesantes. El primero es el suceso imposible $\emptyset$, es decir el subconjunto vacío del espacio muestral, sería el suceso que no ocurrirá nunca. Por otra parte, el propio espacio muestral, será el suceso seguro. S, ocurrirá siempre. Cuando un suceso no coincide ni con el suceso imposible ni con el seguro, se dice que el suceso es probable.

Con la finalidad de tener un lenguaje exento de ambigüedades es necesario establecer una notación precisa para expresar nuevos sucesos a partir de la combinación de dos o más de ellos. Esta notación se logra a través del uso de la Teoría de Conjuntos puesto que los sucesos aleatorios se definieron como tales.

Por lo tanto se puede definir entre los sucesos; las mismas operaciones que se realizan sobre los conjuntos abstractos.

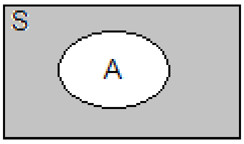
El área sombreada de cada figura representa el sector en el cual se ubica el resultado del experimento. Si $x \in S$ es el resultado de un experimento, entonces se dice que:

a) Ocurre un suceso A si y sólo si $x \in A$, esto se denota por A.



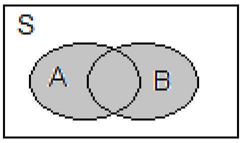
Ocurre el suceso A

b) No ocurre un suceso A si y sólo si $x \in \overline{A}$, esto se denota por $\overline{A}$.



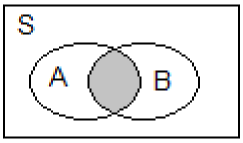
No ocurre el suceso A

c) Ocurre el suceso A ó B ó ambos si y sólo si $x \in A \cup B$, esto se denota por $A \cup B$



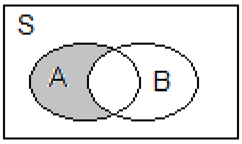
Ocurre el suceso A ó B ó ambos

d) Ocurre el suceso A y B si y sólo si $x \in A \cap B$, esto se denota por $A \cap B$



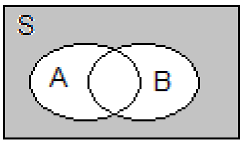
Ocurre el suceso A y B

e) Ocurre el suceso A pero no el B (sólo ocurre A) si y sólo si $x \in A \cap \overline{B}$, esto se denota por $A \cap \overline{B}$



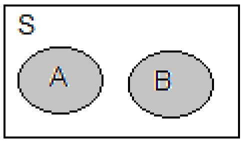
Ocurre el suceso A pero no el B

f) No ocurre el suceso A ni el B (no ocurre ninguno de los sucesos) si y sólo si $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$, esto se denota por $\overline{A} \cap \overline{B}$



No ocurre el suceso A ni el B

g) Los sucesos A y B no ocurren juntos si y sólo si $A \cap B = \emptyset$.



Los sucesos A y B no ocurren juntos

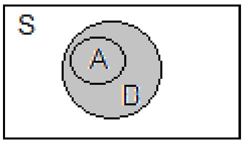
Esta última situación lleva a definir sucesos mutuamente excluyentes, es decir que nunca pueden ocurrir simultáneamente.

Definición:

Se dice que dos sucesos A y B son mutuamente excluyentes si no pueden ocurrir simultáneamente.

La importancia de la condición de exclusión es que permite establecer que si uno de los sucesos ocurre, entonces el otro no puede ocurrir.

h) Siempre que ocurre el suceso A ocurre también a la vez el B $(A \subseteq B)$ si y sólo si $x \in (A \subseteq B)$, esto se denota por $A \subseteq B$.



Ocurre el suceso A y a la vez el B

Es evidente que para cualquier suceso A se cumple que $\emptyset \subseteq A$ y $A \subseteq A$.

3.- Definición y propiedades de la probabilidad

El concepto de probabilidad surge para medir la certeza o incertidumbre de un suceso de un experimento aleatorio. La teoría de la probabilidad surge por la necesidad de encontrar estrategias óptimas para los juegos de azar, aunque rápidamente sobrepasó este campo. La forma más directa de saber la posibilidad de que ocurra un suceso en un experimento aleatorio es repetir dicho experimento muchas veces.

3.1.- Concepto clásico de probabilidad

Supóngase que se repite n veces el experimento E. Sea A un suceso cualquiera asociado a E. Llámese frecuencia absoluta de A , f_A, al número de veces que ocurre el suceso A y frecuencia relativa de A, f_R, al cociente entre su frecuencia absoluta y el número de veces que se realiza el experimento. Es decir que $f_R = \frac{f_A}{n}$

La frecuencia relativa tiene las siguientes propiedades:

a) $0 \leq f_R \leq 1$

b) $f_R = 1$ si y sólo si A ocurre en las n repeticiones, es decir, ocurre siempre.

c) $f_R = 0$ si y sólo si A no ocurre nunca en las n repeticiones.

d) Si A y B son dos sucesos mutuamente excluyentes, entonces $f_{A \cup B} = f_A + f_B$

e) Si n se repite indefinidamente, es decir, "n tiende al infinito", entonces la frecuencia relativa f_R tiende a la probabilidad del suceso A.

De esta forma se puede considerar que f_R es la probabilidad empírica de A, entonces se puede definir la *probabilidad P(A) del suceso A* como:

$$P(A) \cong \lim_{n\to\infty}{}^{1} \frac{f_A}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{frecuencia\ absoluta\ del\ suceso\ A}{n°\ de\ veces\ que\ se\ repite\ el\ experimento}$$

Esta definición indica que la probabilidad del suceso A, P(A), es el límite cuando n tiende al infinito de la frecuencia relativa del suceso.

Obsérvese que si el suceso ocurre siempre $f_A = n\ \ y\ \ P(A) = 1$, por el contrario, si el suceso no ocurre nunca $f_A = 0\ \ y\ \ P(A) = 0$. De esta forma la probabilidad de un suceso está comprendida entre 0 y 1, vale decir que $0 \leq P(A) \leq 1$, y el suceso será tanto más probable cuanto más se acerque a 1 su probabilidad.

Ejemplo

Lanzar una moneda al aire es un experimento clásico. Sea el suceso C: sale cara y el suceso D: sale sello. La probabilidad de C como la de D es $P(C) = P(D) = 0{,}5$.

En el año 1.900 el estadístico Pearson realizó este experimento con un total de 24.000 lanzamientos –tardó unas 40 horas en realizarlo– y obtuvo un resultado de 12.012 caras (y 11.988 sellos). Esto significa que $P(C) = \frac{12.012}{24.000} = 0{,}5005$ que es un valor muy próximo a la probabilidad teórica.

La definición anterior implica, obviamente, que hay que repetir un gran número de veces el experimento para calcular la probabilidad de un suceso. Afortunadamente, el cálculo de la probabilidad se puede simplificar mucho en el caso de que todos los sucesos elementales sean equiprobables[2], es decir, sus frecuencias son iguales cuando el experimento se repite un gran número de veces. En este caso, la probabilidad de un suceso se puede establecer a partir de la definición introducida por Laplace, según la cuál P(A) es el cociente entre el número a de casos favorables al suceso A (ó número de sucesos elementales en que se da A) y el número N de casos posibles (ó número de sucesos elementales del espacio muestral).

$$P(A) = \frac{a}{N} = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles}$$

---

[1] La expresión $\lim_{n\to\infty}$ se lee límite cuando n tiende al infinito. Para el caso que se estudia, el límite es una magnitud fija a la que se aproximan cada vez más los términos de una secuencia infinita de magnitudes.

[2] Equiprobable significa que todos los sucesos son igualmente probables.

En particular, en este caso de sucesos equiprobables, la probabilidad de un suceso elemental será $P(A) = \frac{1}{N}$ La definición anterior también se conoce con el nombre de definición clásica de probabilidad.

Ejemplo 1

El lanzamiento de un dado no trucado supone que los sucesos son equiprobables. Sea el suceso A: sale un cuatro, entonces $P(A) = 1/6$, como ejemplo de un suceso compuesto sea el suceso B: sale un número par, entonces $P(B) = 0{,}5$, puesto que hay tres casos favorables { 2, 4, 6 } de los seis casos posibles { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }.

Ejemplo 2

La extracción de tres fichas al azar y sin sustitución, de una caja que contiene 6 fichas rojas (R), 4 blancas (B) y 5 azules (A).

En primer lugar, el espacio muestral equiprobable S, de este experimento está constituido por ternas, como por ejemplo {R, R, A}, {B, B, B}, {R, B, A}, etc. Que no es necesario expresar por extensión ya que posee muchos elementos y lo que interesa es la cantidad de ternas y no cuáles son esas ternas.

Luego, S es el conjunto de todas las *combinaciones*[3] posibles de 15 fichas tomadas de a 3. Por lo tanto la cantidad de ternas que tiene S ó lo que es lo mismo el cardinal de S, es: $\#S = \binom{15}{3} = 455$

En segundo lugar hay algunas probabilidades típicas que se pueden calcular en este espacio muestral.

a) La probabilidad de que las tres fichas sean blancas. El suceso A es $A = \{B, B, B\}$ Las combinaciones de 4 fichas blancas tomadas de a tres es $\binom{4}{3} = 4$. Por lo tanto la probabilidad de A se calcula como $P(A) = \frac{4}{455}$

b) La probabilidad de sacar una ficha de cada color. El suceso A esta constituido por ternas que tienen la forma { A, B, R }. Las combinaciones de 6 fichas rojas tomadas de a una son $\binom{6}{1} = 6$, para las blancas son $\binom{4}{1} = 4$ y para las azules $\binom{5}{1} = 5$. Por lo tanto la probabilidad de A es $P(A) = \frac{6\,.4\,.5}{455} = \frac{120}{455} = \frac{24}{91}$.

c) La probabilidad de sacar dos fichas rojas y una azul. El suceso A esta constituido por ternas de la forma { A, R, R }. Las combinaciones de 6 fichas rojas tomadas de a dos son $\binom{6}{2} = 15$, para la azul $\binom{5}{1} = 5$. Por lo tanto la probabilidad de A se calcula como $P(A) = \frac{15\,.5}{455} = \frac{75}{455} = \frac{15}{91}$.

[3] Análisis Combinatorio.

d) La probabilidad de que al menos una ficha sea roja. El suceso A está constituido por ternas de la forma {R, B, A} ó { R, R, B }, etc. El complemento del suceso "al menos una ficha roja (1 ó 2 ó 3}" es "ninguna ficha roja $(\overline{A}\,)$". Por lo tanto conviene calcular la probabilidad de A como $P(A) = 1 - P(\overline{A}\,)$ y la probabilidad de $\overline{A}$ son las 3 fichas no rojas que se pueden elegir de entre las 9 fichas que son blancas o azules. $P(\overline{A}\,) = \frac{\binom{9}{3}}{455} = \frac{84}{455} = \frac{12}{65}$ Por lo tanto

$P(A) = 1 - P(\overline{A}\,)$

$P(A) = 1 - \frac{12}{65} = \frac{53}{65}$

e) La probabilidad de que a lo sumo dos fichas sean rojas. El suceso A esta constituido por ternas de la forma {B, A, A}, {R, B, B}, {R, R, A} etc. El suceso "a lo sumo dos fichas rojas" equivale a los sucesos "ninguna ficha roja (B)" ó "una ficha roja (C)" ó "dos fichas rojas (D)".

P(B) es lo mismo que en el inciso anterior. $P(B) = \frac{\binom{9}{3}}{455} = \frac{84}{455} = \frac{12}{65}$

$P(C) = \frac{\binom{9}{2}.\binom{6}{1}}{455} = \frac{36.6}{455} = \frac{216}{455}$ y $P(D) = \frac{\binom{9}{1}.\binom{6}{2}}{455} = \frac{9.15}{455} = \frac{135}{455} = \frac{27}{91}$ Por lo tanto

$P(A) = P(B) + P(C) + P(D)$

$P(A) = \frac{12}{65} + \frac{216}{455} += \frac{27}{91} = \frac{87}{91}$

Otra forma de resolver el inciso es considerando que el suceso "a lo sumo dos fichas rojas (o sea que pueden ser 0 ó 1 ó 2 ´fichas rojas) tiene por complemento el suceso "las tres fichas son rojas $(\overline{A}\,)$"

$P(A) = 1 - P(\overline{A}\,)$ y $P(\overline{A}\,) = \frac{\binom{6}{3}}{455} = \frac{20}{455} = \frac{4}{91}$

$P(A) = 1 - \frac{4}{91}$

$P(A) = \frac{87}{91}$

A veces sucesos que parecen equiprobables no lo son. Por ejemplo si se estudia una ruleta en particular durante el tiempo suficiente, se comprueba que no todos los números son equiprobables. Esto ocurre debido a pequeñas imperfecciones en la propia ruleta. Por esta causa los casinos no permiten la entrada a los jugadores que anotan sistemáticamente los resultados de sus ruletas ya que éstos jugarían con ventaja si se conocieran bien su comportamiento.

3.2.- Definición axiomática[4] de probabilidad

Nótese que las definiciones anteriores presentan dificultades puesto que, ó se necesita repetir un gran número de veces el experimento ó bien se necesita la seguridad de que los sucesos son

[4] Axiomático: relacionado con axioma. Un axioma es una proposición o enunciado tan evidente que se considera que no requiere demostración alguna.

todos equiprobables (lo cual no siempre es obvio). Por estos motivos se utiliza la siguiente definición de probabilidad.

Definición:

Sea E un experimento aleatorio con un espacio muestral S, sea A un suceso cualquiera del espacio muestral se define la probabilidad P(A) como una función real que hace corresponder a cada suceso A un número real de forma tal que se cumplen los tres siguientes axiomas:

a) Para cada A $P(A) \geq 0$*, es decir, la probabilidad de cualquier suceso es mayor o igual que cero.*

b) Para el suceso seguro S, $P(S) = 1$.

c) Dados dos sucesos A y B mutuamente excluyentes $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

El último axioma significa que la probabilidad del suceso unión de dos sucesos mutuamente excluyentes es la suma de las probabilidades de ambos sucesos. Esto se puede generalizar a cualquier número de sucesos mutuamente excluyentes.

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ . \ . \ . \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ . \ . \ . + P(A_n).$$

Los tres axiomas de la definición anterior constituyen la base sobre la que se puede construir toda la teoría del cálculo de probabilidades. Nótese que los axiomas anteriores son coherentes con la definición de la probabilidad basada en las frecuencias relativas de un gran número de experimentos.

Una consecuencia de la definición axiomática de probabilidad es que si en un espacio muestral finito S con n puntos muestrales se conoce la probabilidad P_i de cada suceso elemental de S que satisfacen las condiciones:

$a)\ P_i \geq 0 \ \ \forall\, i = 1,\ 2, . \ . \ . n$ y $b)\ \sum_{i=1}^{n} P_i = 1$, entonces todo suceso A tiene asignada una probabilidad que se puede deducir a partir de los sucesos elementales, pues A siempre se puede expresar como la unión de sucesos elementales y estos por definición son mutuamente excluyentes.

Ejemplo 1

Sea $S = \{a,\ b,\ c,\ d\}$ tal que $P(a) = \frac{1}{6},\ P(b) = \frac{1}{5},\ P(c) = \frac{1}{3},\ y\ P(d) = \frac{3}{10}$. La función de probabilidad P está bien definida ya que se cumple: $P_i \geq 0\ \forall\, x_i\ \in S$ y $\sum_{i=1}^{4} P(x_i) = \frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{3}{10} = 1$. Si el suceso A es $A = \{a, d\}$ se puede establecer que $P(A) = P(a) + P(d) = \frac{1}{6} + \frac{3}{10} = \frac{14}{30}$.

Ejemplo 2

Sea $S = \{1,\ 2,\ 3\,\}$ tal que $P(1) = \frac{1}{10},\ \ P(\{1,\ 2\}) = \frac{2}{5}\ \ y\ \ P(3) = \frac{3}{5}$. La función de probabilidad P está bien definida ya que $P(1) = \frac{1}{10},\ \ P(2) = P(\{1,\ 2\}) - P(1) = \frac{3}{10},$ y $P(3) = \frac{3}{5}$, todos mayores que cero y además $\sum_{i=1}^{3} P(x_i) = \frac{1}{10} + \frac{3}{10} + \frac{3}{5} = 1.$

Ejemplo 3

Sean $S = \{1,\ 2,\ 3\}$ tal que $P(\{1,\ 2\}) = \frac{2}{5}\ \ y\ \ P(3) = \frac{3}{5}$ En este caso no es una función de probabilidad, porque no se puede determinar a partir de las condiciones dadas $P(1),\ P(2),$ $P(\{1,\ 3\})\ ni\ \ P(\{2,\ 3\})$.

3.3.- Propiedades de la probabilidad

A partir de la definición axiomática se pueden deducir algunas propiedades importantes de la probabilidad. Estas propiedades son útiles para calcular la probabilidad de sucesos a partir de las probabilidades conocidas de otros sucesos más sencillos, cumpliendo así el propósito de toda propiedad: simplificar el cálculo.

Se enunciaran estas propiedades como teoremas.

Teorema 1:

La probabilidad de que no ocurra el suceso A es: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Demostración.

Se sabe que $S = A \cup \overline{A}\ \ y\ \ A \cap \overline{A} = \emptyset$. Luego $P(S) = P(A) + P(\overline{A}) = 1$ por los axiomas b) y c). De la última igualdad se puede despejar $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ quedando demostrado el teorema.

Ejemplo

Sea el experimento lanzar un dado no trucado y sea el suceso A: sale 6. Entonces se sabe que $P(A) = \frac{1}{6}$ Por lo tanto $\overline{A}$: No sale 6 y $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = \frac{5}{6}$

Este último resultado es el mismo que se obtiene al hacer el cociente entre casos favorables (5) y casos posibles (6).

Teorema 2:

La probabilidad del suceso imposible es cero. $P(\emptyset) = 0$

Demostración.

Se sabe que $\overline{S} = \emptyset$ Por lo tanto $P(\emptyset) = P(\overline{S})$ y por el teorema 1 se puede escribir esto último como $P(\emptyset) = P(\overline{S}) = 1 - P(S)$. Por el axioma b) se tiene que P(S) =1 Por lo tanto se tiene finalmente, que $P(\emptyset) = P(\overline{S}) = 1 - P(S) = 1 - 1 = 0$ quedando demostrado así que $P(\emptyset) = 0$

Teorema 3:

La probabilidad de que ocurra al menos uno de los sucesos A ó B se puede calcular como:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Demostración.

Se sabe que $A \cup B = A \cup (B \cap \overline{A})$ y $B = (A \cap B) \cup (B \cap \overline{A})$.

Luego $P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap \overline{A})$ y $P(B) = P(A \cap B) + P(B \cap \overline{A})$. En ambos casos por el axioma c).

De la última igualdad se deduce que $P(B \cap \overline{A}) = P(B) - P(A \cap B)$. Reemplazando esto en la primera igualdad.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap \overline{A})$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ que es lo que se quería demostrar.

Nótese que en el caso particular de que los sucesos A y B fuesen mutuamente excluyentes ($A \cap B = \emptyset$) este teorema se reduciría al axioma c).

Ejemplo

Calcular la probabilidad de obtener un número par ó un número mayor que tres al lanzar un dado no cargado.

A: obtener un número par $\{2,\ 4,\ 6\}$, entonces $P(A) = \frac{1}{2}$

B: obtener un número mayor que tres: $\{4,\ 5,\ 6\}$, entonces $P(B) = \frac{1}{2}$

$A \cap B = \{4,\ 6\}$, entonces $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$ Por lo tanto:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Obsérvese que es el resultado esperado ya que los números pares ó mayores que tres son $\{2,\ 4,\ 5,\ 6\}$, por lo tanto su probabilidad será $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

El resultado de este teorema se puede generalizar para la unión de más de dos sucesos. En el caso de tres sucesos A, B y C se tendría

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

Teorema 4:

La probabilidad que entre dos sucesos A y B ocurra sólo A, es: $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

Demostración.

$A = A \cap S$ por ser S el espacio muestral y A un evento de él.

$A = A \cap (B \cup \overline{B})$ por ser $S = B \cup \overline{B}$

$A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$ por propiedad distributiva de la intersección de conjuntos.

Como los sucesos $(A \cap B)$ y $(A \cap \overline{B})$ son mutuamente excluyentes, se tiene

$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$, despejando $P(A \cap \overline{B})$

$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$, que es lo que se quería demostrar.

<u>Teorema 5:</u>

La probabilidad que no ocurra el suceso A ni ocurra el suceso B, es:

$a)\ P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cup B) \qquad b) P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - P(A \cap B)$

Demostración.

a) La ley de De Morgan en teoría de conjuntos establece que:

$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Luego

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P\overline{(A \cup B)}$

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cup B)$ por el teorema 1. Y esto es lo que se quería demostrar.

La parte b) se demuestra de manera similar.

<u>Corolario:</u>

La probabilidad que ocurra <u>al menos uno</u> de entre varios sucesos es igual a 1 menos la probabilidad que <u>no ocurra ninguno de ellos.</u>

Para el caso de dos sucesos $P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B})$

Para el caso de tres sucesos $P(A \cup B \cup C) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C})$

<u>Teorema 6:</u>

La probabilidad del suceso A, que está incluido en el suceso B $(A \subseteq B)$*, es menor que la probabilidad que este último. Si* $A \subseteq B \implies P(A) \leq P(B)$

Demostración.

Si $A \subseteq B$, entonces $B = A \cup (B \cap \overline{A})$ luego $P(B) = P(A) + P(B \cap \overline{A})$

Como $P(B \cap \overline{A}) \geq 0$ es $P(A) \leq P(B)$ que es lo que se quería demostrar.

Ejemplo1

Dados $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ y $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$ se puede establecer que:

a) $P(\overline{B}\ ) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ por el teorema 1.

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{19}{30}$ por el teorema 3.

c) $P(\overline{A} \cap B\ ) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$ por el teorema 4.

d) $P(\overline{A} \cup \overline{B}\ ) = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ por el teorema 5 inciso b)

e) $P(\overline{A} \cup B) = P(\overline{A}) + P(B) - P(\overline{A} \cap B) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} + \frac{2}{15} = \frac{7}{10}$ por el teorema 3

Ejemplo 2

En un vivero una planta puede tener una enfermedad A con probabilidad $\frac{1}{5}$, otra enfermedad B con probabilidad $\frac{2}{7}$ y la enfermedad A ó la enfermedad B ó ambas con probabilidad $\frac{3}{7}$. ¿Cuál es la probabilidad de que una planta cualquiera tenga:

a) ambas enfermedades?

b) sólo la enfermedad B?

c) no esté enferma?

Del enunciado se puede establecer que: $P(A) = \frac{1}{5}$, $P(B) = \frac{2}{7}$, $P(A \cup B) = \frac{3}{7}$.

a) El teorema 3 establece: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ de donde trasponiendo términos se deduce que $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

$P(A \cap B) = \frac{1}{5} + \frac{2}{7} - \frac{3}{7} = \frac{2}{35}$ es decir que la probabilidad de que una planta tenga ambas enfermedades es de $\frac{2}{35}$.

b) Lo que se debe calcular es $P(\overline{A} \cap B)$ es decir que no tenga la enfermedad A y tenga la enfermedad B. Por lo tanto

$P(\overline{A} \cap B\ ) = P(B) - P(A \cap B)$ por el teorema 4.

$P(\overline{A} \cap B\ ) = \frac{2}{7} - \frac{2}{35} = \frac{8}{35}$ es decir que la probabilidad de que una planta sólo tenga la enfermedad B es de $\frac{8}{35}$.

c) Que la planta no esté enferma significa que no tenga ni la enfermedad A ni la enfermedad B, es decir calcular $P(\overline{A} \cap \overline{B}\ )$.

El teorema 5 inciso a) establece que $P(\overline{A} \cap \overline{B}\ ) = 1 - P(A \cup B)$

$P(\overline{A} \cap \overline{B}\ ) = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$ es decir que la probabilidad de que la planta no esté enferma es de $\frac{4}{7}$

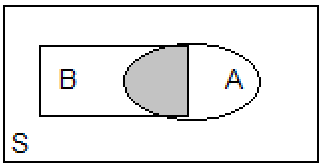
4.- Probabilidad condicionada

En muchas ocasiones interesa conocer la probabilidad de un suceso A en el caso de que se haya cumplido otro suceso B. A esta probabilidad de que se cumpla A bajo la condición de que se haya cumplido B se la llama *probabilidad de A condicionada a B* y se denota por P(A | B).

Definición:

Dados dos sucesos cualesquiera A y B asociados a un espacio muestral S, se define la probabilidad del suceso A condicionado a B, $P(A|B)$*, como* $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Como es lógico esta definición tiene sentido si $P(B) > 0$. Al calcular la probabilidad condicionada se sustituye el espacio muestral S por el suceso B, de modo que, haciendo corresponder probabilidades a áreas en el espacio muestral, P(A | B) será la fracción del nuevo espacio muestral B en que ocurre A.



P(A | B) significa que se esta calculando la probabilidad de A referida al espacio muestral reducido B, en vez de referida al espacio muestral original S.

Destáquese que si las probabilidades estan condicionadas a un suceso cualquiera, entonces tal suceso pasa a tener formalmente las características de un espacio muestral reducido en relación al espacio original S, de modo que todas las propiedades de las probabilidades que se cumplen en S son también válidas en el espacio reducido. De hecho cuando se plantea la probabilidad de un suceso A, P(A), es totalmente concordante a denotarla como P(A | S).

Como consecuencia de la observación anterior es posible demostrar las siguientes propiedades.

$a)\ P(\overline{A}|B) = 1 - P(A|B)$

$b)\ P(\overline{A}|\overline{B}) = 1 - P(A|\overline{B})$

$c)\ P((A \cup C)\ |B) = P(A\ |B) + P(C\ |B) - P((A \cap C)|B)$

$d)\ P\left((A \cap \overline{C})\ \middle|\ B\right) = P(A\ |B) - P((A \cap C)|B)$

Ejemplo 1

Se lanza un dado no cargado, si el resultado es par ¿cuál es la probabilidad de que el número sea 6?

S = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }; A: el número es un 6 { 6 }; B: el número es par { 2, 4, 6 }.

$A \cap B = \{6\}$ Por lo tanto $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ $\ y\ $ $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$P(A\ |B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$

La forma de calcular esta probabilidad sin aplicar la definición, es considerando el espacio muestral reducido B, o sea que B = {2, 4, 6 } y a partir de allí calcular la probabilidad de que el número sea 6. Es decir $P(A\,|B) = \frac{1}{3}$

Ejemplo 2

El lanzamiento de un par de dados no cargado. Si la suma es 6, encontrar la probabilidad de que uno de los dados tenga un dos.

S = { (1, 1), (1, 2), . . ., (2, 1), (2, 2), . . . (6, 1), . . . (6, 6) } 36 elementos.

B: la suma de los dados es 6, B = { (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1) } 5 elementos

A: uno de los dados es un 2, A = { (2, 4), (4, 2) } 2 elementos

$A \cap B = \{\,(2,4),\ (4,2)\}$

$P(A\,|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{2}{5}$

En forma directa $P(A\,|B) = \frac{2}{5}$, es decir teniendo en cuenta que el espacio reducido es B con 5 elementos (casos posibles) y el evento A tiene dos elementos (casos favorables).

Ejemplo 3

Si $P(A) = \frac{2}{5},\ P(B) = \frac{2}{3},\ P(A \cap B) = \frac{1}{6}$, entonces

$P(A\,|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{4}$

$P(B\,|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{5}} = \frac{5}{12}$

$P(\overline{A}\,|B) = 1 - P(A|B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

4.1.- SUCESOS DEPENDIENTES E INDEPENDIENTES

La definición de probabilidad condicionada permite calcular la probabilidad de la intersección de dos sucesos –cuestión que aún no se sabía cómo– es decir la probabilidad de que dos sucesos ocurran en forma simultánea.

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ por lo tanto

$P(A \cap B) = P(A|B)\,P(B)$ ó bien $P(A \cap B) = P(B|A)\,P(A)$

De esta forma la probabilidad de que tanto el suceso A como el B ocurran es igual a la probabilidad de que A ocurra dado que B haya ocurrido, multiplicado por la probabilidad de que ocurra B. Esto se puede generalizar a la intersección de más de dos sucesos. En el caso particular de 3 sucesos

$P(A \cap B \cap C) = P(A|B \cap C)\,P(B \cap C)$

$P(A \cap B \cap C) = P(A|B \cap C)\,P(B\,|\,C)\,P(C)$

Un caso importante es cuando se cumple: $P(A|B) = P(A)$

En este caso la probabilidad de que ocurra A no está afectada por la ocurrencia de B y se dice que los dos sucesos son *independientes*. Esto se puede observar si en $P(A \cap B) = P(A|B)\,P(B)$ se hace cumplir la última condición enunciada.

$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$

Es decir la probabilidad de la intersección de dos sucesos independientes –la probabilidad de que ocurran ambos sucesos– es igual al producto de sus probabilidades. Esta última relación se toma usualmente como condición necesaria y suficiente para la existencia de independencia.

Definición:

Se dice que dos sucesos A y B asociados a un espacio muestral S son sucesos independientes si y sólo si $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$

Los sucesos A y B son independientes $\Leftrightarrow$ $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$

La condición de independencia entre dos sucesos establece que la ocurrencia de uno de ellos no altera la probabilidad de ocurrencia del otro. Esta condición se puede aplicar en dos direcciones. La más frecuente ocurre cuando mediante un simple razonamiento basado en las condiciones en las que se realiza el experimento permite deducir que los sucesos A y B son independientes, entonces se aplica $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$. La otra dirección ocurre cuando es difícil establecer a priori que los sucesos son independientes, entonces si es posible establecer que se cumple $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$ se deduce que A y B son sucesos independientes.

El concepto de independencia se puede generalizar a n sucesos. Se dice que los n sucesos son mutuamente independientes cuando cualquier pareja de sucesos es independiente y la probabilidad de la intersección de cualquier número de sucesos independientes es el producto de sus probabilidades. En el caso de tres sucesos independientes:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)\,P(B)\,P(C)$$

Cuando no se cumple $P(A|B) = P(A)$ hay que utilizar $P(A \cap B) = P(A|B)\,P(B)$ para calcular la probabilidad de la intersección. En este caso se dice que los sucesos son *dependientes*, es decir, la probabilidad de que ocurra uno de ellos depende de que haya ocurrido o no el otro.

Ejemplo 1

En el ejemplo ya planteado anteriormente –En un vivero una planta puede tener una enfermedad A con probabilidad $\frac{1}{5}$, otra enfermedad B con probabilidad $\frac{2}{7}$ y la enfermedad A ó la enfermedad B ó ambas con probabilidad $\frac{3}{7}$ – no se puede establecer a priori[5] si las enfermedades A y B son o

[5] A priori es una locución latina que se refiere a aquello que se realiza con anterioridad a la reflexión sobre el asunto en cuestión.

no independientes, pero del enunciado se establece que: $P(A) = \frac{1}{5}$, $P(B) = \frac{2}{7}$, $P(A \cup B) = \frac{3}{7}$.

Por el teorema 3 se sabe que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ de donde

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B) = \frac{1}{5} + \frac{2}{7} - \frac{3}{7} = \frac{2}{35}$$

Por otro lado $P(A)\,P(B) == \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{7} = \frac{2}{35}$

Obsérvese que $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$ por lo tanto se puede afirmar que los sucesos son independientes, el que una planta tenga la enfermedad A es independiente a que contraiga la enfermedad B y viceversa. En otras palabras, el que una planta tenga una enfermedad no afecta el que contraiga la otra.

Ejemplo 2

Si $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(B) = \frac{2}{3}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ ¿son independientes los sucesos A y B?

Si los sucesos son independientes se debe cumplir que:

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$$

$$\frac{1}{6} = \frac{2}{5}\,\frac{2}{3}$$

$\frac{1}{6} \neq \frac{4}{15}$ En consecuencia los sucesos no son independientes.

Ejemplo 3

El mecanismo que acciona una línea de embalaje en una exportadora depende de dos subsistemas independientes, A y B con probabilidad de falla de $\frac{1}{10}$ y $\frac{1}{15}$ respectivamente, durante un día cualquiera. La línea deja de funcionar si fallan simultáneamente ambos subsistemas. ¿Cuál es la probabilidad de que en un día cualquiera

a) la línea se detenga?

Para que esto ocurra deben fallar ambos subsistemas, que corresponde a

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B) = \frac{1}{10}\,\frac{1}{15} = \frac{1}{150}$$

b) falle solo el subsistema A? Esto se calcula aplicando el teorema 4.

$$P\left(A \cap \overline{B}\ \right) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{10} - \frac{1}{150} = \frac{7}{75}$$

c) la línea funcione?

Esto ocurriría si al menos un subsistema funciona. Por el teorema 5, inciso b)

$$P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\ \right) = 1 - P(A \cap B) = 1 - P(A)\,P(B) = 1 - \frac{1}{150} = \frac{149}{150}$$

4.2.- Teorema de la probabilidad total

En muchas ocasiones resulta difícil calcular directamente la probabilidad de un suceso, pero puede lograrse a partir de la probabilidad de ocurrencia de una serie de otros sucesos. Esto conduce a lo que se conoce como probabilidad total.
Previamente se recordará la definición de partición de un conjunto pero adaptada a un espacio muestral.

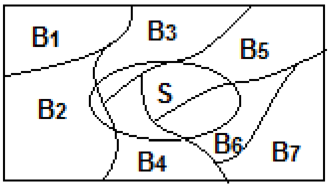
Definición:
Se llama partición de un espacio muestral S a una serie de k sucesos B_i *que cumplen las siguientes condiciones:*
a) $B_i \neq \emptyset \ \forall\, i = 1,\ 2,\ 3, . . . \ ,\ k$
b) $B_i \cap B_j = \emptyset \ \ si \ \ i \neq j$
c) $B_1 \cup B_2 \cup \ . . . \cup B_k = S$ *lo que también se expresa como* $\bigcup_{i=1}^{k} B_i$

Nótese que los sucesos son no vacíos y mutuamente excluyentes entre ellos, es decir no tienen elementos en común y además la unión de todos ellos es el espacio muestral.
Un ejemplo de partición es un rompecabezas, ya que cada pieza es un subconjunto del cuadro completo.

Teorema de la probabilidad total:
Sea el suceso A del espacio muestral S y $\{\, B_i \mid i = 1,\ 2,\ . . . \ k\}$ *una partición de S, entonces se puede establecer que* $P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(A \mid B_i)\, P(B_i)$ *con* $P(B_i) > 0 \ \forall\, i$*,*

Demostración.
Para demostrar el teorema se aplica las condiciones de partición de un espacio muestral y se expresa el suceso A como
$$A = A \cap S = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right) = \bigcup_{i=1}^{k} (A \cap B_i)$$
Al ser los sucesos B_i disjuntos también lo son los diferentes $(A \cap B_i)$ de forma que la probabilidad de A usando $P(A \cap B) = P(A|B)\, P(B)$ se puede expresar
$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{k} P(A \mid B_i)\, P(B_i)$ que es lo que se quería demostrar.

Siguiendo con la analogía del rompecabezas, si el suceso A a que hace referencia el teorema lo asimilamos a la figura central de éste, se tendrá que algunas piezas contienen parte de la figura central, no importa que la mayoría de las piezas no contribuyan a su formación, lo que equivale a decir que algunas $A \cap B_i$ son vacías, lo fundamental es que al armar el compecabezas completo la figura central quedará completa.
El sigueinte gráfico puede ayudar a comprender la demostración del teorema.



Ejemplo 1

Supóngase que en unas elecciones; las probabilidades de que ganen tres partidos políticos B_1, B_2 y B_3 son 0,5; 0,3 y 0,2 respectivamente. Si gana B_1 la probabilidad de que suban los impuestos es 0,8; mientras que para los casos que salgan elegidos B_2 y B_3 es 0,2 y 0,5 respectivamente. ¿Cuál es la probabilidad de que suban los impuestos?

Los tres partidos políticos conforman el espacio muestral S y $\{B_1, B_2, B_3\}$ conforman una partición de S puesto que son no vacíos, disjuntos dos a dos y además $S = B_1 \cup B_2 \cup B_3$. Por otro lado se sabe que $P(B_1) = 0{,}5;\ P(B_2) = 0{,}3\ y\ P(B_3) = 0{,}2$

Sea el suceso A: suben los impuestos.

$P(A\,|B_1) = 0{,}8;\quad P(A\,|B_2) = 0{,}2\ \ y\ \ P(A\,|B_3) = 0{,}5$

Por el teorema de la probabilidad total

$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(A \mid B_i)\, P(B_i)$

$P(A) = P(A \mid B_1)\, P(B_1) + P(A \mid B_2)\, P(B_2) + P(A \mid B_3)\, P(B_3)$

$P(A) = 0{,}8 * 0{,}5 + 0{,}2 * 0{,}3 + 0{,}5 * 0{,}2 = 0{,}56$

Ejemplo 2

Una automotriz fabrica tres tipos de coches $B_1,\ B_2\ y\ B_3$ con una proporción de cada tipo de $\frac{2}{5};\ \frac{1}{2}\ y\ \frac{1}{10}$ respectivamente. La probabilidad de que un coche tipo B_1 se averíe en el primer año es 0,07, la de que se averíe uno del tipo B_2 es 0,04 y del tipo B_3 es 0,09. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra el suceso A: un coche producido en esa fábrica tenga una avería antes de un año?

El espacio muestral S es la producción total de esa fábrica, por lo tanto, $S = B_1 \cup B_2 \cup B_3$

$A = A \cap S$

$A = A \cap (B_1 \cup B_2 \cup B_3)$

$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup (A \cap B_3)$

$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3)$

$P(A) = P(A \mid B_1)\, P(B_1) + P(A \mid B_2)\, P(B_2) + P(A \mid B_3)\, P(B_3)$

$P(A) = 0{,}07 * \frac{2}{5} + 0{,}04 * \frac{1}{2} + 0{,}09 * \frac{1}{10} = 0{,}057$