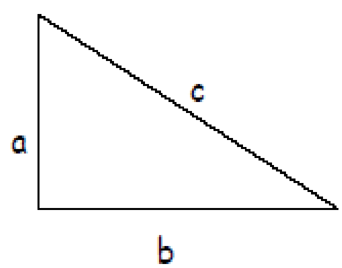
Relaciones entre las funciones trigonométricas de un mismo ángulo.

Un concepto importantísimo que conviene siempre tener presente es el **Teorema de Pitágoras** ya que suele ser de suma utilidad a la hora de resolver problemas trigonométricos.

Teorema de Pitágoras

En todo triángulo rectángulo la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.



$$a^2 + b^2 = c^2$$

Otro concepto que también es de suma utilidad es sin lugar a dudas la identidad fundamental trigonométrica.

Identidad Fundamental Trigonométrica

$$\boxed{\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha = 1}$$

Esta igualdad es llamada **identidad fundamental trigonométrica**

Por ejemplo nos sirve para que conociendo el valor de una función trigonométrica, se puede calcular el valor de las 5 restantes. Es necesario conocer a que cuadrante pertenece el ángulo (para determinar los signos).

Ejemplo:

Sabiendo que $\operatorname{tg} \varepsilon = -4$ y que ε es un ángulo del II cuadrante, obtener el valor de las restantes funciones.

$$\cos \varepsilon = -\sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varepsilon}} = -\sqrt{\frac{1}{1 + (-4)^2}} = -\sqrt{\frac{1}{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

Se eligió el signo negativo porque el valor del coseno en el segundo cuadrante es negativo.

$$\operatorname{sen} \varepsilon = +\sqrt{1 - \cos^2 \varepsilon} = \sqrt{1 - \frac{1}{17}} = \sqrt{\frac{16}{17}} = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

Se eligió el signo positivo porque el valor del seno en el segundo cuadrante es positivo.

Con estos valores podemos obtener las restantes funciones

$$\operatorname{cotg} \varepsilon = \frac{\cos \varepsilon}{\operatorname{sen} \varepsilon} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{17}}}{\frac{4}{\sqrt{17}}} = -\frac{1}{4}$$

$$\sec \varepsilon = \frac{1}{\cos \varepsilon} = \frac{1}{-\frac{1}{\sqrt{17}}} = -\sqrt{17}$$

$$\operatorname{cosec} \varepsilon = \frac{1}{\operatorname{sen} \varepsilon} = \frac{1}{\frac{4}{\sqrt{17}}} = \frac{\sqrt{17}}{4}$$

Identidades Trigonométricas

Son igualdades entre relaciones trigonométricas que se cumplen para cualquier valor de los ángulos que intervienen en la identidad.

A partir de las definiciones de las razones trigonométricas, de las relaciones fundamentales y de las operaciones elementales, se debe lograr una identidad algebraica evidente.

Sugerencia: Aquellas identidades que contengan tangentes, secantes, cosecantes y cotangentes es conveniente escribirlas en función de senos y cosenos.

Recordar que hay que trabajar cada miembro. No está permitido hacer pasajes de términos.

➡ Ejemplo:

$$(\cos x - sen\ x)^2 = 2 - (sen\ x + \cos x)^2$$

Desarrollando el binomio al cuadrado del 2º miembro

$$(\cos x - \mathrm{sen} x)^2 = 2 - \left(\mathrm{sen}^2 x + 2.\cos x.\mathrm{sen} x + \cos^2 x\right)$$

Utilizando la relación pitagórica de las funciones trigonométricas y la propiedad cancelativa

$$(\cos x - \mathrm{sen} x)^2 = 2 - \mathrm{sen}^2 x - 2.\cos x.\mathrm{sen}\, x - \cos^2 x$$

$$(\cos x - \mathrm{sen} x)^2 = 2 - \left(\mathrm{sen}^2 x + \cos^2 x\right) - 2.\cos x.\mathrm{sen}\, x$$

$$(\cos x - \mathrm{sen} x)^2 = 2 - 1 - 2.\cos x.\mathrm{sen}\, x$$

$$(\cos x - \mathrm{sen} x)^2 = 1 - 2.\cos x.\mathrm{sen}\, x$$

Desarrollando el binomio al cuadrado del 1º miembro

$$\cos^2 x - 2\cos x.\mathrm{sen}\, x + \mathrm{sen}^2 x = 1 - 2.\cos x.\mathrm{sen}\, x$$

$$1 - 2\cos x.\mathrm{sen}\, x = 1 - 2.\cos x.\mathrm{sen}\, x$$